第 49 卷第 5 期
2021 年 5 月

同济大学学报(自然科学版)
JOURNAL OF TONGJI UNIVERSITY(NATURAL SCIENCE)

Vol. 49 No. 5
May 2021

文章编号：0253-374X(2021)05-0751-08 **DOI**：10. 11908/j. issn. 0253-374x. 20442

广义 Petersen 图 $P(n,1)$ 和 $P(n,2)$ 的意大利控制数

高 红[1]，黄佳欢[1]，尹亚男[1]，杨元生[2]

（1. 大连海事大学 理学院，辽宁 大连 116026；2. 大连理工大学 计算机科学与技术学院，辽宁 大连 116024）

摘要：在图 $G=(V,E)$ 中，f 为从顶点集合 V 到 $\{0,1,2\}$ 的映射，如果满足所有 $f(v)=0$ 的顶点 v 其邻域中至少有一个被赋值为2的顶点或者至少有两个被赋值为1的顶点，则 f 称为图 G 的意大利控制函数。图 G 中所有顶点的函数值之和为 f 的权重。权重的最小值为图 G 的意大利控制数。确定图的意大利控制数是 NP（non-deterministic polynomial）困难的。通过构造可递推的意大利控制函数，计算出广义 Petersen 图 $P(n,1)$ 和 $P(n,2)$ 意大利控制数的上界。利用袋装法和控制代价函数法分别证明出 $P(n,1)$ 和 $P(n,2)$ 意大利控制数的下界。最终确定了 $P(n,1)$ 和 $P(n,2)$ 意大利控制数的精确值。

关键词：图的控制；意大利控制数；Petersen 图

中图分类号：O157. 5 **文献标志码**：A

Italian Domination Number of Generalized Petersen Graph $P(n,1)$ and $P(n,2)$

GAO Hong[1], *HUANG Jiahuan*[1], *YIN Yanan*[1], *YANG Yuansheng*[2]

(1. College of Science, Dalian Maritime University, Dalian 116026, China; 2. School of Computer Science and Technology, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: In a graph $G=(V,E)$, let f be a mapping from vertex and set V to $\{0,1,2\}$. If every vertex v such that $f(v)=0$ is adjacent to at least one vertex assigned 2 under f or adjacent to at least two vertices assigned 1 under f, then f is called an Italian domination function of G. The sum of $f(v)$ all over G is the weight of f. The minimum weight is the Italian domination number of G. To determine the Italian domination number of a graph is NP-complete. The upper bounds on Italian domination numbers of $P(n,1)$ and $P(n,2)$ are calculated by constructing recursive Italian dominating functions. The lower bounds on Italian domination numbers of $P(n,1)$ and $P(n,2)$ are proved using the bagging method and the dominating cost function method respectively. Therefore, the Italian domination numbers of $P(n,1)$ and $P(n,2)$ are determined.

Key words: domination on graphs; Italian domination number; Petersen graph

$G=(V,E)$ 表示一个图，顶点集合为 V，边的集合为 E。顶点 v 的开邻域为 $N(v)=\{u|(u,v)\in E(G)\}$，闭邻域为 $N[v]=N(v)\cup\{v\}$。顶点 v 的度是 $N(v)$ 中包含的顶点的个数，即 $\deg(v)=|N(v)|$。图 G 的最大度和最小度分别记作 $\Delta(G)$ 和 $\delta(G)$。若对于任意的 $v\in V$，都有 $\deg(v)=r$，则图 G 称为 r-正则图。

在图 $G=(V,E)$ 中，若 $D\subseteq V(G)$ 且 $N[D]=V(G)$，则称 D 为 G 的一个控制集。控制集包含元素个数的最小值称为图 G 的控制数，记为 $\gamma(G)$。图的控制有很多种类型，其中意大利控制[1]是一种新兴的控制类型，又称为罗马{2}-控制[2]或弱{2}-控制[3]。设 $f: V\rightarrow\{0,1,2\}$ 为图 G 上的函数，如果所有满足 $f(v)=0$ 的顶点 v 在其邻域中至少有一个被赋值为2的顶点或者至少有两个被赋值为1的顶点，那么函数 f 称为图 G 的意大利控制函数。意大利控制函数的权重等于图 G 中所有顶点的函数值之和，权重的最小值为图 G 的意大利控制数，记为 $\gamma_I(G)$。若 f 为图 G 的意大利控制函数并且 $w(f)=\gamma_I(G)$，则 f 称为 γ_I-function。若图 G 满足 $2\gamma(G)=\gamma_I(G)$，则称图 G 为意大利图。关于意大利控制的研究可以参考文献[4-10]。

本文研究了广义 Petersen 图 $P(n,1)$ 和 $P(n,2)$ 意大利控制数。通过构造可递推的意大利控制函数计算出意大利控制数的上界。利用袋装法和控制代

收稿日期：2020-10-23
基金项目：国家自然科学基金(60271079)
第一作者：高红(1976—)，女，副教授，工学博士，主要研究方向为图的控制理论、机器学习算法等。
E-mail：gaohong@dlmu. edu. cn

论文拓展介绍

价函数法分别证明出$P(n,1)$和$P(n,2)$意大利控制数的下界。最终确定了$P(n,1)$和$P(n,2)$意大利控制数的精确值。

1 $P(n,1)$的意大利控制数

1.1 $P(n,1)$意大利控制数的上界

广义Petersen图$P(n,k)$是3正则图,有$2n$个顶点。图1a和1b显示的是$P(6,1)$和$P(6,2)$。为了便于表示Petersen图的意大利控制函数,本文将$P(n,k)$表示为剪开的形式,图1c和1d显示的是$P(6,1)$和$P(6,2)$的剪开图。

设$G=P(n,k)$,f为图G上的意大利控制函数,则有下面的形式:

$$f(V(G))=\begin{pmatrix} f(v_0) & f(v_2) & f(v_4) & \cdots & f(v_{2n-2}) \\ f(v_1) & f(v_3) & f(v_5) & \cdots & f(v_{2n-1}) \end{pmatrix}$$

定理1 $\gamma_I(P(n,1))\leqslant n$。

证明:令$G=P(n,1)$,在图G上构造意大利控制函数如下:

当 $n\equiv 0(\bmod 2)$ 时,$f(V(G))=\begin{pmatrix}10\\01\end{pmatrix}^{\frac{n}{2}}$;当$n\equiv 1(\bmod 2)$时,$f(V(G))=\begin{pmatrix}10\\01\end{pmatrix}^{\frac{n-1}{2}}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$。其中的$\frac{n}{2}$和$\frac{n-1}{2}$表示将括号内的两列重复$\frac{n}{2}$和$\frac{n-1}{2}$次。$f$的权重为:当$n\equiv 0(\bmod 2)$时,$w(f)=2\times\frac{n}{2}=n$;当$n\equiv 1(\bmod 2)$时,$w(f)=2\times\frac{n-1}{2}+1=n$。因此,$\gamma_I(P(n,1))\leqslant w(f)=n$。

1.2 $P(n,1)$意大利控制数的下界

下面用袋装法证明$P(n,1)$意大利控制数的下界也是n。令f是$P(n,1)$上的意大利控制函数,记$w(f_i)=f(v_{2i})+f(v_{2i+1})$, $V^i=\{v_{2i},v_{2i+1}\}$, $0\leqslant i\leqslant n-1$。

引理1 如果$w(f_i)=0(0\leqslant i\leqslant n-1)$,则$w(f_{i-1})+w(f_{i+1})\geqslant 4$,下标对$2n$取模。

证明:因为$w(f_i)=0$,即$f(v_{2i})=f(v_{2i+1})=0$,根据意大利控制函数的定义,可知$f(v_{2i-2})+f(v_{2i+2})\geqslant 2$且$f(v_{2i-1})+f(v_{2i+3})\geqslant 2$。因此,

$$\begin{aligned}&w(f_{i-1})+w(f_{i+1})=\\&f(v_{2i-2})+f(v_{2i-1})+f(v_{2i+2})+f(v_{2i+3})=\\&f(v_{2i-2})+f(v_{2i+2})+f(v_{2i-1})+f(v_{2i+3})\geqslant\\&2+2=4\end{aligned}$$

定理2 $\gamma_I(P(n,1))\geqslant n$。

证明:令$G=P(n,1)$,通过下面的步骤将G的顶点装入B_1、B_2、B_3、B_4、B_5五个集合(袋子)中。

令$B_1=B_2=B_3=B_4=B_5=\phi$, $m_1=m_2=m_3=m_4=m_5=0$,$D[i]=0$ $(0\leqslant i\leqslant n-1)$。

第1步:对所有满足$w(f_i)=0\wedge w(f_{i+1})=2$的$i$,将$V^i$和$V^{i+1}$装入$B_1$,即$B_1=B_1\cup V^i\cup V^{i+1}$,并

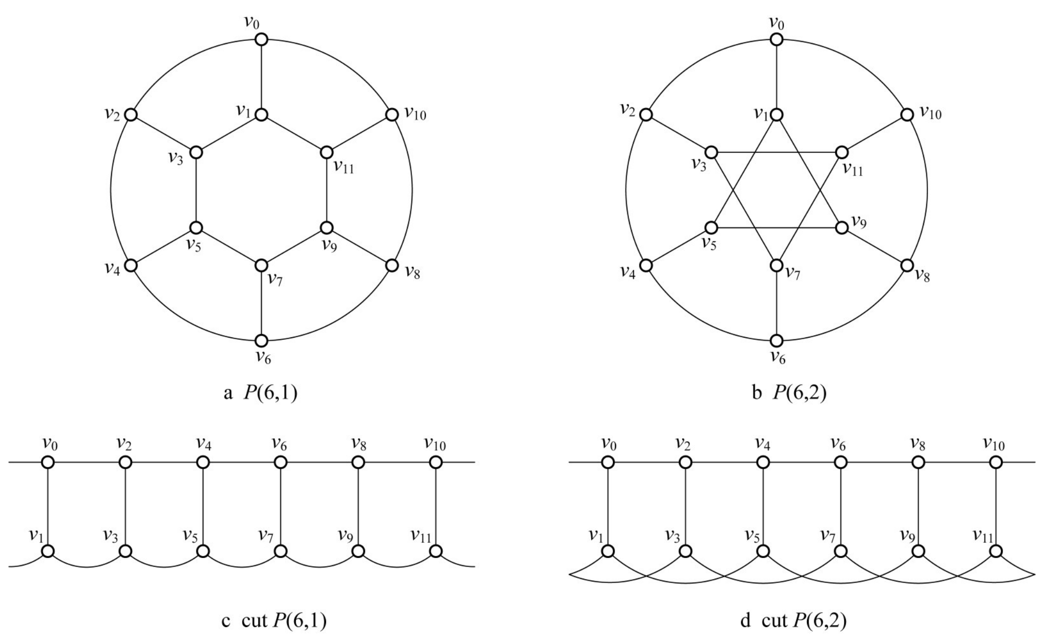


图1 Petersen图 $P(6,1)$和$P(6,2)$

Fig. 1 Petersen graph $P(6,1)$ and $P(6,2)$

且$m_1=m_1+1$,$D[i]=D[i+1]=1$。这里"∧"表示"并且"。

第2步:对有满足$w(f_i)=0\wedge w(f_{i+1})\geqslant 3\wedge w(f_{i+2})=0\wedge D[i+2]=0$的$i$,将$V^i$,$V^{i+1}$和$V^{i+2}$装入$B_2$,即$B_2=B_2\cup V^i\cup V^{i+1}\cup V^{i+2}$,并且$m_2=m_2+1$,$D[i]=D[i+1]=D[i+2]=1$。

第3步:对所有满足$w(f_i)=0\wedge w(f_{i+1})\geqslant 3\wedge(w(f_{i+2})\geqslant 1\vee D[i+2]=1)$的$i$,将$V^i$和$V^{i+1}$装入$B_3$,即$B_3=B_3\cup V^i\cup V^{i+1}$,并且$m_3=m_3+1$,$D[i]=D[i+1]=1$。

第4步:所有满足$w(f_i)=0\wedge w(f_{i+1})\leqslant 1$的$i$,由引理1知,$w(f_{i-1})\geqslant 3$,将$V^{i-1}$和$V^i$装入$B_4$,即$B_4=B_4\cup V^{i-1}\cup V^i$,并且$m_4=m_4+1$,$D[i-1]=D[i]=1$。

经过以上步骤,对于所有满足$D[i]=0$的i,都有$w(f_i)>0$。

令$B_5=V(G)-B_1-B_2-B_3-B_4$,$m_5=\frac{|B_5|}{2}$。因为$2m_1+3m_2+2m_3+2m_4+m_5=n$,所以

$$\begin{aligned}&f(V(G))\geqslant\\&2m_1+3m_2+3m_3+3m_4+m_5\geqslant\\&2m_1+3m_2+2m_3+2m_4+m_5=\\&n\end{aligned}$$

综上可得,$\gamma_I(P(n,1))\geqslant n$。

根据定理1和定理2,可以得到定理3。

定理3　对任意的正整数$n\geqslant 3$,$\gamma_I(P(n,1))=n$。

1.3　$P(n,1)$意大利控制数与2-彩虹控制数和经典控制数的关系

定理4[11]　对任意的正整数$n\geqslant 5$,$\gamma_{r2}(P(n,1))\geqslant n$,其中$\gamma_{r2}$表示2-彩虹控制数。

由定理3和定理4可以得到定理5。

定理5　$\gamma_I(P(n,1))=\gamma_{r2}(P(n,1))$。

定理6[12]　对任意的正整数$n\geqslant 3$,当$n\equiv 2(\bmod 4)$时,$\gamma(P(n,1))=\frac{n}{2}+1$;当$n\equiv 0,1,3(\bmod 4)$时,$\gamma(P(n,1))=\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil$。

根据定理3和定理6,可以得到定理7。

定理7　当$n\equiv 0(\bmod 4)$时,$\gamma_I(P(n,1))=2\gamma(P(n,1))$;当$n\not\equiv 0(\bmod 4)$时,$\gamma_I(P(n,1))\neq 2\gamma(P(n,1))$。因此,当$n\equiv 0(\bmod 4)$时,$P(n,1)$是意大利图;当$n\not\equiv 0(\bmod 4)$时,$P(n,1)$不是意大利图。

2　$P(n,2)$的意大利控制数

2.1　$P(n,2)$意大利控制数的上界

定理8[2]　对于任意的图G,$\gamma_I(G)\leqslant\gamma_{r2}(G)$,其中$\gamma_{r2}(G)$表示2-彩虹控制数。

定理9[13]　当$n\equiv 0,3,4,9(\bmod 10)$时,$\gamma_{r2}(P(n,2))=\left\lceil\frac{4n}{5}\right\rceil$;否则,$\gamma_{r2}(P(n,2))=\left\lceil\frac{4n}{5}\right\rceil+1$。

定理10　当$n\equiv 0,3,4(\bmod 5)$时,$\gamma_I(P(n,2))\leqslant\left\lceil\frac{4n}{5}\right\rceil$;当$n\equiv 1,2(\bmod 5)$时,$\gamma_I(P(n,2))\leqslant\left\lceil\frac{4n}{5}\right\rceil+1$。

证明:根据定理2和定理3,可以得到当$n\equiv 0,3,4,9(\bmod 10)$时,$\gamma_I(P(n,2))\leqslant\gamma_{r2}(P(n,2))=\left\lceil\frac{4n}{5}\right\rceil$。当$n\equiv 1,2,6,7(\bmod 10)$时,$\gamma_I(P(n,2))\leqslant\gamma_{r2}(P(n,2))=\left\lceil\frac{4n}{5}\right\rceil+1$。

当$n\equiv 5,8(\bmod 10)$时,通过构造可递推的意大利控制函数可以证明$\gamma_I(P(n,2))$的上界是$\left\lceil\frac{4n}{5}\right\rceil$而不是$\left\lceil\frac{4n}{5}\right\rceil+1$。当$n\equiv 5(\bmod 10)$时,构造$f(V(G))=\begin{pmatrix}01001\\00110\end{pmatrix}^{\frac{n}{5}}$,则$w(f)=\frac{n}{5}\times 4=\frac{4n}{5}$。当$n\equiv 8(\bmod 10)$时,构造$f(V(G))=\begin{pmatrix}01001\\00110\end{pmatrix}^{\frac{n}{5}}\begin{pmatrix}001\\110\end{pmatrix}$,则$w(f)=\frac{n-3}{5}\times 4+3=\frac{4n+3}{5}$。因此,当$n\equiv 5,8(\bmod 10)$时,$\gamma_I(P(n,2))\leqslant\left\lceil\frac{4n}{5}\right\rceil$。

综上,定理成立。

2.2　$P(n,2)$意大利控制数的下界

定理11[2]　若G为连通图且最大度$\Delta(G)=\Delta$,则$\gamma_I(G)\geqslant\frac{2|V(G)|}{\Delta+2}$。

设$P(n,2)=(V,E)$,f为$P(n,2)$的意大利控制函数,$V_i=\{v\in V|f(v)=i,i=0,1,2\}$,则$f$也可表示为$f=(V_0,V_1,V_2)$,$\gamma_I(P(n,2))=w(f)=\sum_{v\in V}f(v)=|V_1|+2|V_2|$。

定义1　设$f=(V_0,V_1,V_2)$为$P(n,2)$的γ_I-function,则控制代价函数g_f和剩余代价函数r_f分别定义为

当$v\in V_0$时,

$g_f(v)=0.2\left|V_1\cap N(v)\right|+0.5\left|V_2\cap N(v)\right|$;

当$v\in V_1$时,

$g_f(v)=0.4+0.2\left|V_1\cap N(v)\right|+0.5\left|V_2\cap N(v)\right|$;

当$v\in V_2$时,

$g_f(v)=0.5+0.2\left|V_1\cap N(v)\right|+0.5\left|V_2\cap N(v)\right|$;

$r_f(v)=g_f(v)-0.4$;$g_f(V)=\sum\limits_{v\in V}g_f(v)$;

$r_f(V)=\sum\limits_{v\in V}r_f(v)=\sum\limits_{v\in V}(g_f(v)-0.4)$。

根据$g_f(v)$的定义(见定义1)和意大利控制函数的定义,可以得到下面的命题。

命题1 对于任意的顶点$v\in V$都有$g_f(v)\geqslant 0.4$。

设 $E_{11}=\{(u,v)\in E\left|u,v\in V_1\right.\}$, $E_{12}=\{(u,v)\in E\left|u\in V_1,v\in V_2\right.\}$,根据$r_f(V)$的定义(见定义1)及意大利控制函数的定义,则命题2~8成立。

命题2 若存在$v\in V_0$满足$\left|N(v)\cap V_1\right|=2$,则$r_f(V)\geqslant 0$。

命题3 若存在$v\in V_0$满足$\left|N(v)\cap V_1\right|=3$,则$r_f(V)\geqslant 0.2$。

命题4 若存在$v\in V_2$,则$r_f(V)\geqslant 0.4$。

命题5 若存在$(u,v)\in E_{11}$,则$r_f(V)\geqslant 0.4$。

命题6 若存在$v\in V_0$满足$\left|N(v)\cap V_1\right|=\left|N(v)\cap V_2\right|=1$,则$r_f(V)\geqslant 0.6$。

命题7 若存在$v\in V_0$满足$\left|N(v)\cap V_1\right|=2$且$\left|N(v)\cap V_2\right|=1$,则$r_f(V)\geqslant 0.8$。

命题8 若存在$(u,v)\in E_{12}$,则$r_f(V)\geqslant 1$。

命题2~8的示意图见图2a~2g,图中括号外的数字表示顶点的函数值$f(v)$,括号内的数字表示$g_f(v)$的值。

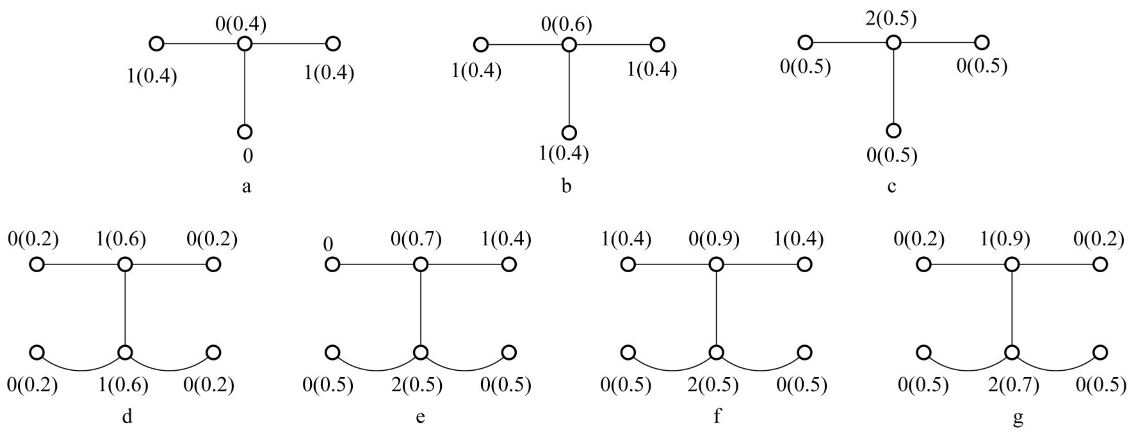


图2 命题2~8的示意图

Fig. 2 Sketches for propositions 2 to 8

定理12 设$f=(V_0,V_1,V_2)$为$P(n,2)$的γ_I-function,如果$n\equiv 1(\bmod 5)$,那么$\gamma_I(P(n,2))>\left\lceil\frac{4n}{5}\right\rceil$等价于$r_f(V)>0.2$。如果$n\equiv 2(\bmod 5)$,那么$\gamma_I(P(n,2))>\left\lceil\frac{4n}{5}\right\rceil$等价于$r_f(V)>0.4$。

证明:首先证明$g_f(V)=\gamma_I(P(n,2))$。实际上,

$$
\begin{aligned}
&g_f(V)=\\
&\sum_{v\in V}g_f(v)=\\
&\sum_{v\in V_0}g_f(v)+\sum_{v\in V_1}g_f(v)+\sum_{v\in V_2}g_f(v)=\\
&\sum_{v\in V_0}(0.2\left|V_1\cap N(v)\right|+0.5\left|V_2\cap N(v)\right|)+\\
&\sum_{v\in V_1}(0.4+0.2\left|V_1\cap N(v)\right|+0.5\left|V_2\cap N(v)\right|)+\\
&\sum_{v\in V_2}(0.5+0.2\left|V_1\cap N(v)\right|+0.5\left|V_2\cap N(v)\right|)=\\
&0.2\sum_{v\in V_1}\left|N(v)\cap V_0\right|+0.5\sum_{v\in V_2}\left|N(v)\cap V_0\right|+\\
&0.4\left|V_1\right|+0.2\sum_{v\in V_1}\left|N(v)\cap V_1\right|+\\
&0.5\sum_{v\in V_2}\left|N(v)\cap V_1\right|+0.5\left|V_2\right|+\\
&0.2\sum_{v\in V_1}\left|N(v)\cap V_2\right|+0.5\sum_{v\in V_2}\left|N(v)\cap V_2\right|=\\
&0.4\left|V_1\right|+0.2\sum_{v\in V_1}\left|N(v)\cap V_0\right|+\\
&0.2\sum_{v\in V_1}\left|N(v)\cap V_1\right|+0.2\sum_{v\in V_1}\left|N(v)\cap V_2\right|+\\
&0.5\left|V_2\right|+0.5\sum_{v\in V_2}\left|N(v)\cap V_0\right|+
\end{aligned}
$$

$0.5\sum_{v\in V_2}\left|N(v)\cap V_1\right|+0.5\sum_{v\in V_2}\left|N(v)\cap V_2\right|=$
$0.4\left|V_1\right|+0.2\sum_{v\in V_1}\left|N(v)\right|+$
$0.5\left|V_2\right|+0.5\sum_{v\in V_2}\left|N(v)\right|=$
$0.4\left|V_1\right|+0.2\times 3\left|V_1\right|+0.5\left|V_2\right|+0.5\times 3\left|V_2\right|=$
$\left|V_1\right|+2\left|V_2\right|=$
$\gamma_I(P(n,2))$

由$r_f(V)$的定义(见定义1)知,$r_f(V)=\sum_{v\in V}(g_f(v)-0.4)=g_f(V)-0.8n$。再根据$g_f(V)=\gamma_I(P(n,2))$,有$r_f(V)=\gamma_I(P(n,2))-0.8n$,即$\gamma_I(P(n,2))=r_f(V)+0.8n$。从而可得

$$\gamma_I(P(n,2))>\left\lceil\frac{4n}{5}\right\rceil\Leftrightarrow r_f(V)>\left\lceil\frac{4n}{5}\right\rceil-0.8n$$

如果$n\equiv 1(\bmod 5)$,可令$n=5q+1$,则$\left\lceil\frac{4n}{5}\right\rceil-0.8n=\left\lceil\frac{4(5q+1)}{5}\right\rceil-\frac{4(5q+1)}{5}=4q+1-4q-\frac{4}{5}=0.2$。

如果$n\equiv 2(\bmod 5)$,可令$n=5q+2$,则$\left\lceil\frac{4n}{5}\right\rceil-0.8n=\left\lceil\frac{4(5q+2)}{5}\right\rceil-\frac{4(5q+2)}{5}=4q+2-4q-\frac{8}{5}=0.4$。

所以,当$n\equiv 1(\bmod 5)$时,$\gamma_I(P(n,2))>\left\lceil\frac{4n}{5}\right\rceil$等价于$r_f(V)>0.2$。当$n\equiv 2(\bmod 5)$时,$\gamma_I(P(n,2))>\left\lceil\frac{4n}{5}\right\rceil$等价于$r_f(V)>0.4$。

定理 13 令$G=P(n,2)=(V,E)$,则当$n\equiv 0,3,4(\bmod 5)$时,$\gamma_I(G)\geqslant\left\lceil\frac{4n}{5}\right\rceil$;当$n\equiv 1,2(\bmod 5)$时,$\gamma_I(G)\geqslant\left\lceil\frac{4n}{5}\right\rceil+1$。

证明:设$f=(V_0,V_1,V_2)$为$P(n,2)$的γ_I-function。

情况1 当$n\equiv 0,3,4(\bmod 5)$时,由$G=P(n,2)$可知,$\Delta(G)=3$且$\left|V(G)\right|=2n$。根据定理11,可得$\gamma_I(P(n,2))\geqslant\left\lceil\frac{4n}{5}\right\rceil$。

情况2 若$n\equiv 1,2(\bmod 5)$,欲证$\gamma_I(P(n,2))\geqslant\left\lceil\frac{4n}{5}\right\rceil+1$,即证$\gamma_I(P(n,2))>\left\lceil\frac{4n}{5}\right\rceil$。由定理12可知,只需证明:当$n\equiv 1(\bmod 5)$时,$r_f(V)>0.2$;当$n\equiv 2(\bmod 5)$,$r_f(V)>0.4$。

情形(1) $\left|V_2\right|\geqslant 2$。若$\left|V_2\right|\geqslant 2$,则由命题4可知,$r_f(V)\geqslant 0.8>0.4>0.2$。

情形(2) $\left|E_{11}\right|\geqslant 2$。若$\left|E_{11}\right|\geqslant 2$,则由命题5可知,$r_f(V)\geqslant 0.8>0.4>0.2$。

情形(3) $\left|V_2\right|+\left|E_{11}\right|\geqslant 2$。若$\left|V_2\right|+\left|E_{11}\right|\geqslant 2$,则由命题4~5可知,$r_f(V)\geqslant 0.8>0.4>0.2$。

情形(4) $\left|E_{12}\right|\geqslant 1$。若$\left|E_{12}\right|\geqslant 1$,则由命题8可知,$r_f(V)\geqslant 1>0.4>0.2$。

情形(5) 存在$v\in V_0$满足$\left|N(v)\cap V_1\right|\geqslant 1$且$\left|N(v)\cap V_2\right|=1$。这种情况由命题6~7可知,$r_f(V)\geqslant 0.6>0.4>0.2$。

综上,情形(1)~(5)证明完毕。

情形(6) $\left|V_2\right|=1$且$\left|E_{12}\right|=0$且$\left|E_{11}\right|=0$。

情形(7) $\left|E_{11}\right|=1$且$\left|V_2\right|=0$。

情形(8) 存在$v\in V_0$满足$\left|N(v)\cap V_1\right|=3$。

情形(9) 排除以上8种情形,可知$\left|V_2\right|=0$,$\left|E_{11}\right|=0$且对于$v\in V_0$均满足$\left|N(v)\cap V_1\right|\leqslant 2$。根据意大利控制的定义,当$i\equiv 0(\bmod 2)$时,一定存在顶点$v_i$满足$f(v_i)=1$。

下面将证明情形(6)~(9)也满足:当$n\equiv 1(\bmod 5)$时,$r_f(v)>0.2$;当$n\equiv 2(\bmod 5)$时,$r_f(v)>0.4$。

情形(6) $\left|V_2\right|=1$且$\left|E_{12}\right|=0$且$\left|E_{11}\right|=0$。可令$f(v_0)=2$或$f(v_1)=2$。当$n\equiv 1(\bmod 5)$时,由命题4,$r_f(v)\geqslant 0.4>0.2$。

当$n\equiv 2(\bmod 5)$时,用反证法,假设$r_f(v)\leqslant 0.4$。

若$f(v_0)=2$,则由$\left|V_2\right|=1$,$\left|E_{12}\right|=0$可得$f(v_1)=f(v_2)=0$。由$\left|V_2\right|=1$并排除情形(5)可得$f(v_3)=f(v_4)=0$。由意大利控制的定义知,$f(v_5)=1$。于是,$v_1\in V_0$且$\left|N(v_1)\cap V_1\right|=\left|N(v_1)\cap V_2\right|=1$。由命题6知,$r_f(v)\geqslant 0.6>0.4$,与假设矛盾。

若$f(v_1)=2$,由$\left|V_2\right|=1$,$\left|E_{12}\right|=0$可得$f(v_0)=f(v_5)=0$。由$\left|V_2\right|=1$并排除情形(5)可得$f(v_2)=0$。由意大利控制的定义可得,$f(v_3)=f(v_4)=1$。于是,$v_5\in V_0$且$\left|N(v_5)\cap V_1\right|=$

$\left|N(v_5)\cap V_2\right|=1$。由命题6，$r_f(v)\geqslant 0.6>0.4$，矛盾。

图3给出了情形(6)中意大利控制函数的示意图，图中黑色实心点表示$f(v)=0$的顶点，空心圆圈表示$f(v)=1$的顶点，较大的空心圆圈表示$f(v)=2$的顶点。

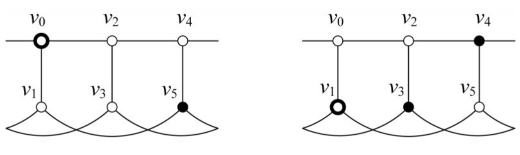


图3 情形(6)中的意大利控制函数f的示意图

Fig. 3 Italian domination function f in Case (6)

情形(7) $\left|E_{11}\right|=1$且$\left|V_2\right|=0$。当$n\equiv 1(\bmod 5)$时，根据命题5，$r_f(v)\geqslant 0.4>0.2$。

当$n\equiv 2(\bmod 5)$时，用反证法，假设$r_f(v)\leqslant 0.4$。

令$f(v_0)=f(v_1)=1$或$f(v_0)=f(v_2)=1$或$f(v_1)=f(v_5)=1$。

如果$f(v_0)=f(v_1)=1$，由$\left|E_{11}\right|=1$且$\left|V_2\right|=0$，则$f(v_2)=f(v_5)=0$。根据意大利控制的定义，$f(v_4)=1$。$f(v_3)$可以是1也可以是0。若$f(v_3)=1$，则$\left|N(v_2)\cap V_1\right|=3$，由命题3和命题5，$r_f(v)\geqslant 0.6>0.4$，矛盾。若$f(v_3)=0$，由$\left|E_{11}\right|=1$且$\left|V_2\right|=0$，则$f(v_6)=0$。然后由意大利控制的定义，$f(v_7)=1$。$f(v_8)=1$或0。若$f(v_8)=1$，则$\left|N(v_6)\cap V_1\right|=3$，由命题3和命题5，$r_f(v)\geqslant 0.6>0.4$，矛盾。若$f(v_8)=0$，根据意大利控制的定义，$f(v_9)=1$。于是，$f(v_5)=0$且$\left|N(v_5)\cap V_1\right|=3$，由命题3和命题5，$r_f(v)\geqslant 0.6>0.4$，矛盾。

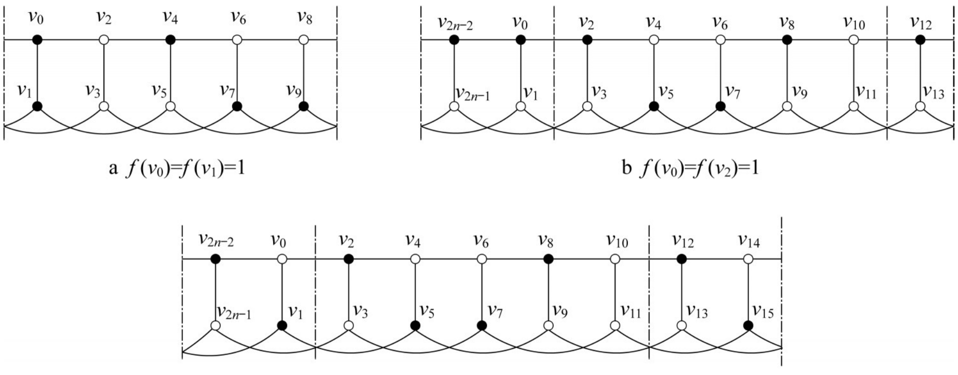
如果$f(v_0)=f(v_2)=1$，由$\left|E_{11}\right|=1$且$\left|V_2\right|=0$，则$f(v_1)=f(v_3)=f(v_4)=0$。根据意大利控制的定义，$f(v_5)=1$。$f(v_6)=1$或0。若$f(v_6)=1$，则$\left|N(v_4)\cap V_1\right|=3$，由命题3和命题5，$r_f(v)\geqslant 0.6>0.4$，矛盾。若$f(v_6)=0$，根据意大利控制的定义，$f(v_7)=f(v_8)=1$。由$\left|E_{11}\right|=1$且$\left|V_2\right|=0$知，$f(v_9)=f(v_{10})=f(v_{11})=0$。然后由意大利控制的定义可得，$f(v_{12})=1$。由$\left|E_{11}\right|=1$且$\left|V_2\right|=0$知，$f(v_{13})=f(v_{14})=0$。然后可得，$f(v_{15})=1$。$f(v_{16})=1$或0。若$f(v_{16})=1$，则$\left|N(v_{14})\cap V_1\right|=3$，由命题3和命题5，$r_f(v)\geqslant 0.6>0.4$，矛盾。若$f(v_{16})=0$，根据意大利控制的定义，$f(v_{17})=f(v_{18})=1$。由$\left|E_{11}\right|=1$且$\left|V_2\right|=0$知，$f(v_{19})=f(v_{20})=f(v_{21})=0$。这样下去，可得：当$i\equiv 2,5,7,8(\bmod 10)$时，$f(v_i)=1$；当$i\equiv 3,4,6,9,10,11(\bmod 10)$时，$f(v_i)=0$。因为$n\equiv 2(\bmod 5)$，可令$n=5q+2$，则$2n-2=10q+2$，故$v_{2n-2}\in V_1, v_0\in V_1$且$(v_{2n-2},v_0)\in E$，由命题5，$r_f(v)\geqslant 0.8>0.4$，矛盾。

如果$f(v_1)=f(v_5)=1$，由$\left|E_{11}\right|=1$且$\left|V_2\right|=0$知，$f(v_0)=f(v_4)=f(v_9)=0$。根据意大利控制的定义，$f(v_2)=1$。由$\left|E_{11}\right|=1$且$\left|V_2\right|=0$知，$f(v_3)=0$。$f(v_6)=0$或1。若$f(v_6)=1$，则$v_4\in V_0$且$\left|N(v_4)\cap V_1\right|=3$，由命题3和命题5，$r_f(v)\geqslant 0.6>0.4$，矛盾。若$f(v_6)=0$，根据意大利控制函数的定义，$f(v_7)=f(v_8)=1$。由$\left|E_{11}\right|=1$且$\left|V_2\right|=0$知，$f(v_{10})=f(v_{11})=0$。然后可得，$f(v_{12})=1$。再由$\left|E_{11}\right|=1$且$\left|V_2\right|=0$知，则$f(v_{13})=f(v_{14})=0$。然后可得，$f(v_{15})=1$。$f(v_{16})=0$或1。若$f(v_{16})=1$，则$\left|N(v_{14})\cap V_1\right|=3$，由命题3和命题5，$r_f(v)\geqslant 0.6>0.4$，矛盾。若$f(v_{16})=0$，根据意大利控制的定义，$f(v_{17})=f(v_{18})=1$。由$\left|E_{11}\right|=1$且$\left|V_2\right|=0$知，$f(v_{19})=f(v_{20})=f(v_{21})=0$。然后可得，$f(v_{22})=1$。这样下去，可得：当$i\equiv 2,5,7,8(\bmod 10)$时，$f(v_i)=1$；当$i\equiv 3,4,6,9,10,11(\bmod 10)$时，$f(v_i)=0$。因为$n\equiv 2(\bmod 5)$，可令$n=5q+2$，则$2n-2=10q+2$，故$v_{2n-2}\in V_1, v_0\in V_0$且$\left|N(v_0)\cap V_1\right|=3$，由命题3和命题5，$r_f(v)\geqslant 0.6>0.4$，矛盾。

图4给出了情形(7)中意大利控制函数示意图，图中黑色实心点表示$f(v)=0$的顶点，空心圆圈表示$f(v)=1$的顶点。

情形(8) 存在$v\in V_0$，满足$\left|N(v)\cap V_1\right|=3$。用反证法，假设当$n\equiv 1(\bmod 5)$时，$r_f(v)\leqslant 0.2$；当$n\equiv 2(\bmod 5)$时，$r_f(v)\leqslant 0.4$。

令$f(v_2)=0$，$f(v_0)=f(v_3)=f(v_4)=1$。由$\left|V_2\right|=0$且$\left|E_{11}\right|=1$知，则$f(v_1)=f(v_5)=f(v_6)=f(v_7)=0$。根据意大利控制的定义，$f(v_8)=f(v_9)=1$。于是，$(v_8,v_9)\in E$，由命3和命题5，$r_f(v)\geqslant 0.6>0.4>0.2$，矛盾。



a $f(v_0)=f(v_1)=1$　　b $f(v_0)=f(v_2)=1$

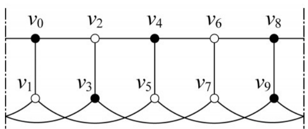
c $f(v_1)=f(v_5)=1$

图4　情形(7)中的意大利控制函数f的示意图

Fig. 4　Italian domination function f in Case (7)

图5给出了情形(8)中意大利控制函数的示意图。

情形(9)存在v_i满足$f\left(v_i\right)=1$且$i\equiv 0(\bmod 2)$。



$f(v_2)=0, f(v_0)=f(v_3)=f(v_4)=1$

图5　情形(8)中的意大利控制函数f的示意图

Fig. 5　Italian domination function f in Case (8)

用反证法,假设当$n\equiv 1(\mathrm{mod}5)$时,$r_f(v)\leqslant 0.2$;当$n\equiv 2(\mathrm{mod}5)$时,$r_f(v)\leqslant 0.4$。

令$f(v_0)=1$。由$\left|V_2\right|=0$且$\left|E_{11}\right|=1$知,则$f(v_1)=f(v_2)=0$。$f(v_3)=1$或0。

若$f(v_3)=1$,排除情形(8),$f(v_4)=0$。根据意大利控制的定义,$f(v_5)=f(v_6)=1$。由$\left|V_2\right|=0$且$\left|E_{11}\right|=1$知,$f(v_7)=f(v_8)=f(v_9)=0$。然后由意大利控制的定义,$f(v_{10})=1$。由$\left|V_2\right|=0$且$\left|E_{11}\right|=1$,$f(v_{11})=f(v_{12})=0$。然后可得,$f(v_{13})=1$。排除情形(8),$f(v_{14})=0$。然后可得,$f(v_{15})=f(v_{16})=1$。由$\left|V_2\right|=0$且$\left|E_{11}\right|=1$,$f(v_{17})=f(v_{18})=f(v_{19})=0$。排除情形(8),$f(v_{21})=0$。根据意大利控制的定义,$f(v_{20})=1$。这样下去,可得:当$i\equiv 3,5,6,10(\bmod 10)$时,$f(v_i)=1$;当$i\equiv 2,4,7,8,9,11(\bmod 10)$时,$f(v_i)=0$。若$n\equiv 1(\bmod 5)$,可令$n=5q+1$,$2n-2=10q$,故$f(v_{2n-2})=1$,则$v_{2n-2},v_0\in V_1$且$(v_{2n-2},v_0)\in E$。若$n\equiv 2(\mathrm{mod}5)$,可令$n=5q+2$,则$2n-1=10q+3$,故$f(v_{2n-1})=1$,则$v_3,v_{2n-1}\in V_1$且$(v_3,v_{2n-1})\in E$。根据情形(7),当$n\equiv 1(\mathrm{mod}5)$时,$r_f(v)>0.2$;当$n\equiv 2(\mathrm{mod}5)$时,$r_f(v)>0.4$,矛盾。

若$f(v_3)=0$,根据意大利控制的定义,$f(v_4)=1$。由$\left|V_2\right|=0$且$\left|E_{11}\right|=1$,则$f(v_5)=f(v_6)=0$。由意大利控制的定义,$f(v_7)=1$。排除情形(8),$f(v_8)=0$。然后可得,$f(v_9)=f(v_{10})=1$。由$\left|V_2\right|=0$且$\left|E_{11}\right|=1$,则$f(v_{11})=f(v_{12})=f(v_{13})=0$。然后可得,$f(v_{14})=1$。再排除情形(8),$f(v_{15})=f(v_{16})=0$。然后可得,$f(v_{17})=1$。排除情形(8),$f(v_{18})=0$,然后可得,$f(v_{19})=f(v_{20})=1$。由$\left|V_2\right|=0$且$\left|E_{11}\right|=1$,$f(v_{21})=0$。这样下去,可得:当$i\equiv 4,7,9,10(\mathrm{mod}10)$时,$f(v_i)=1$;当$i\equiv 2,3,5,6,8,11(\mathrm{mod}10)$时,$f(v_i)=0$。若$n\equiv 1(\mathrm{mod}5)$,可令$n=5q+1$,则$2n-2=10q$,故$f(v_{2n-2})=1$,于是$v_{2n-2},v_0\in V_1$且$(v_{2n-2},v_0)\in E$。根据情形(7),$r_f(v)>0.2$,矛盾。若$n\equiv 2(\mathrm{mod}5)$,可令$n=5q+2$,则$2n-1=10q+3$,故$f(v_{2n-1})=1$,于是$\left|N(v_3)\cap V_0\right|=2$,这种情况不满足意大利控制函数的定义。因此,$r_f(v)\leqslant 0.4$不成立。

图6给出了情形(9)中的意大利控制函数示意图。

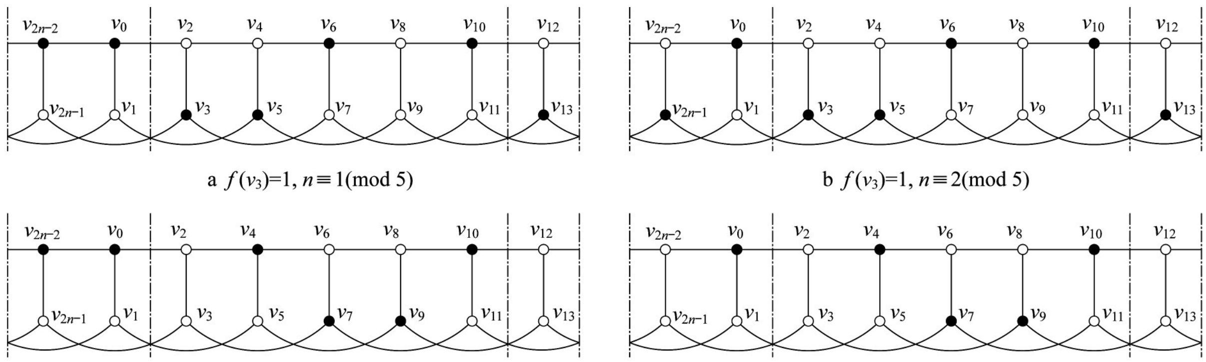
由定理10和定理13,可得定理14。

定理14 当$n\equiv 0,3,4(\bmod 5)$时,$\gamma_I(P(n,2))=\left\lceil\frac{4n}{5}\right\rceil$;当$n\equiv 1,2(\mathrm{mod}5)$时,$\gamma_I(P(n,2))=\left\lceil\frac{4n}{5}\right\rceil+1$。

2.3　$P(n,2)$意大利控制数与2-彩虹控制数和经典控制数的关系

根据定理9和定理14,可以得到定理15。

定理15 当$n\equiv 0,1,2,3,4,6,7,9(\bmod 10)$时,$\gamma_I(P(n,2))=\gamma_{r2}(P(n,2))$;当$n\equiv 5,8(\bmod 10)$时,



a $f(v_3)=1, n\equiv 1(\bmod 5)$

b $f(v_3)=1, n\equiv 2(\bmod 5)$

c $f(v_3)=0, n\equiv 1(\bmod 5)$

d $f(v_3)=0, n\equiv 2(\bmod 5)$

图6 情形(9)中的意大利控制函数f的示意图

Fig. 6 Italian domination function f in Case (9)

$\gamma_I(P(n,2))=\gamma_{r2}(P(n,2))-1$。

定理16[12] 若$n\geqslant 5$,则$\gamma(P(n,2))=\left\lceil\frac{3n}{5}\right\rceil$。

根据定理14和定理16,可以得到定理17。

定理17 $\gamma_I(P(n,2))\neq 2\gamma(P(n,2))$,因此$P(n,2)$不是意大利图。

3 结论

本文主要研究了广义Petersen图$P(n,1)$和$P(n,2)$的意大利控制数。通过构造可递推的意大利控制函数得到$P(n,1)$和$P(n,2)$意大利控制数的上界。利用袋装法和控制代价函数法分别证明出$P(n,1)$和$P(n,2)$意大利数的下界。最终确定了$P(n,1)$和$P(n,2)$意大利控制数的精确值:$\gamma_I(P(n,1))=n$;当$n\equiv 0,3,4(\bmod 5)$时,$\gamma_I(P(n,2))=\left\lceil\frac{4n}{5}\right\rceil$;当$n\equiv 1,2(\bmod 5)$时,$\gamma_I(P(n,2))=\left\lceil\frac{4n}{5}\right\rceil+1$。同时还得到了$P(n,1)$和$P(n,2)$意大利控制数与2-彩虹控制数之间的关系:$\gamma_I(P(n,1))=\gamma_{r2}(P(n,1))$;当$n\equiv 5,8(\bmod 10)$时,$\gamma_I(P(n,2))=\gamma_{r2}(P(n,2))-1$;否则,$\gamma_I(P(n,2))=\gamma_{r2}(P(n,2))$。

此外,当$n\equiv 0(\bmod 4)$时,$P(n,1)$是意大利图;当$n\not\equiv 0(\bmod 4)$时,$P(n,1)$不是意大利图。$P(n,2)$不是意大利图。

作者贡献说明:

高 红:提出证明方法,算法总体设计,论文定稿。
黄佳欢:论文写作,画图,程序编写。
尹亚男:论文初稿的写作,程序调试。
杨元生:方法指导和程序设计指导。

参考文献:

[1] HENNING M A, KLOSTERMEYER W F. Italian domination in trees [J]. Discrete Applied Mathematics, 2017, 217: 557.

[2] CHELLALI M, HAYNES T W, HEDETNIEMI S T, *et al.* Roman {2}-domination [J]. Discrete Applied Mathematics, 2016, 204: 22.

[3] LI Zepeng, SHAO Zehui, XU Jin. Weak {2}-domination number of Cartesian products of cycles [J]. Journal of Combinatorial Optimization, 2018, 35: 75.

[4] GAO Hong, XI Changqing, LI Kun, *et al.* The Italian domination numbers of generalized Petersen graphs $P(n,3)$ [J]. Mathematics, 2019, 7: 714.

[5] STEPIEN Z, SZYMASZKIEWICZ A, SZYMASZKIEWICZ L, *et al.* 2-rainbow domination number of $C_n\Box C_5$ [J]. Discrete Applied Mathematics, 2014, 170: 113.

[6] BRESAR B, SUMENJAK T K. On the 2-rainbow domination in graphs [J]. Discrete Applied Mathematics, 2007, 155: 2394.

[7] HAO Guoliang, HU Kangxiu, WEI Shouliu, *et al.* Global Italian domination in graphs [J]. Quaestiones Mathematicae, 2018, 41: 1.

[8] RAHMOUNI A, CHELLALI M, Independent Roman {2}-domination in graphs [J]. Discrete Applied Mathematics, 2018, 236: 408.

[9] FAN Wenjie, YE Ansheng, MIAO Fang, *et al.* Outer-independent Italian domination in graphs [J]. IEEE Access, 2019, 7: 22756.

[10] HAYNES T W, HENNING M A. Perfect Italian domination in trees [J]. Discrete Applied Mathematics, 2019, 260: 164.

[11] SHAO Zehui, JIANG Huiqin, WU Pu, *et al.* On 2-rainbow domination of generalized Petersen graphs [J]. Discrete Applied Mathematics, 2019, 257: 370.

[12] EBRAHIMI B J, JAHANBAKHT J, MAHMOODIAN E S. Vertex domination of generalized Petersen graphs [J]. Discrete Mathematics, 2009, 309: 4355.

[13] TONG Chunling, LIN Xiaohui, YANG Yuansheng, *et al.* 2-rainbow domination of generalized Petersen graphs $P(n,2)$ [J]. Discrete Applied Mathematics, 2009, 157: 1932.