

分数阶黏弹性模型在饱和软土与单桩相互作用中的应用

艾智勇^{1,2}, 赵勇智^{1,2}, 刘文杰^{1,2}

(1. 同济大学 土木工程学院, 上海 200092; 2. 同济大学 岩土及地下工程教育部重点实验室, 上海 200092)

摘要: 引入基于分数阶导数的 Merchant 模型, 以描述饱和软土的黏弹性特征, 并通过积分变换推导出变换域内的应力—应变关系; 根据弹性—黏弹性对应原理, 得到横观各向同性分数阶黏弹性饱和软土地基的解答, 并将其作为地基边界元解的核函数; 基于轴向受力的 2 节点桩单元的单元刚度矩阵, 构建单桩的有限元解; 将地基的边界元解和桩的有限元解进行耦合, 以求解地基与单桩的相互作用问题; 随后, 设计算例验证本文理论的正确性, 并对分数阶对桩—土相互作用的影响进行分析。

关键词: 饱和软土地基; 轴向受荷桩; 分数阶导数; 横观各向同性; 黏弹性; 边界元—有限元耦合法

中图分类号: TU 443

文献标志码: A

Application of the Fractional Viscoelastic Model in Interaction of Saturated Soft Soils and Piles

AI Zhiyong^{1,2}, ZHAO Yongzhi^{1,2}, LIU Wenjie^{1,2}

(1. School of Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. Key Laboratory of Geotechnical and Underground Engineering of the Ministry of Education, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: To describe the viscoelastic characteristics of saturated soft soils, the fractional Merchant model is introduced, and the stress-strain relationship in the transformed domain is derived through integral transforms. Based on the elastic-viscoelastic correspondence principle, the solution of the fractional transversely isotropic viscoelastic saturated soft soils is obtained, which is the kernel function of the boundary element solution for the soils. Based on the stiffness matrix of a 2-noded pile element subjected to axial loading, the finite element solution for the pile is constructed. The boundary element solution for the soils

is coupled with the finite element solution for the pile to solve the interaction between the soils and piles. Several examples are designed to verify the presented theory and to analyze the influence of the fractional order on the pile-soil interaction.

Key words: saturated soft soils; axially loaded piles; fractional derivative; transverse isotropy; viscoelasticity; boundary element-finite element coupling method

桩基础因其优良的承载特性, 在软土地区得到了广泛的应用。目前, 对于饱和地基与竖向受荷单桩的相互作用, 已经取得了丰硕的成果, 如文献[1-3]等。而对于软黏土, 其固有的流变性质比较突出, 地基的蠕变阶段较长, 因此有必要考虑土体的流变特性来进行桩-土共同作用分析。王建华等^[4]基于 Merchant 黏弹性模型, 使用积分方程法得到了垂直受荷单桩与层状黏弹性地基的共同作用解答。吴文兵等^[5]以广义 Voigt 模型来模拟土体的流变特性, 研究了层状黏弹性地基中单桩变形的时间效应。Feng 等^[6]通过修正的 Burgers 模型, 对多层黏弹性介质中的竖向受荷单桩进行了研究。Ai 等^[7]对横观各向同性黏弹性饱和土中轴向受荷桩的时变行为进行了研究。这些研究多采用 Kelvin 模型、Merchant 模型等传统整数阶导数模型来表征地基的流变特性。然而, 在某些情况下, 特别是在蠕变或松弛的初始阶段, 模型的应力-应变曲线与实验数据不能很好地吻合^[8]。有关研究^[9-10]表明, 基于分数阶导数的本构模型可以更好地与实验结果相吻合, 并且可以更好地模拟材料的黏弹性。为此, Ai 等^[11]根据分数阶导数的 Merchant 模型, 采用精细积分法求得了多层横观

收稿日期: 2020-10-31

基金项目: 国家自然科学基金(50578121; 41672275)

第一作者: 艾智勇(1966—), 男, 教授, 博士生导师, 工学博士, 主要研究方向为岩土及地下工程。

E-mail: zhiyongai@tongji.edu.cn



论文
拓展
介绍

各向同性黏弹性地基的固结解答,并证明了分数阶导数模型在模拟软黏土流变行为上的优势。

本文旨在引入分数阶 Merchant 模型,采用边界元与有限元耦合的方法,探讨分数阶黏弹性模型在饱和软土地基与单桩相互作用分析中的应用。

1 分数阶黏弹性地基的边界元解

1.1 分数阶黏弹性模型

根据 Ai 等^[12]的研究,相比于 Maxwell 模型和 Kelvin 模型,Merchant 模型更能体现软土的流变性质,因此选取分数阶的 Merchant 模型来描述地基的应力-应变关系。传统整数阶和改进的分数阶 Merchant 模型分别如图 1a、1b 所示,其中 η 和 η_1 表示黏滞系数。二者均含有弹性模量分别为 E_0 和 E_1 的胡克弹性体 H_0 和 H_1 ;不同的是,分数阶模型用 Abel 粘壶^[13]代替了传统的牛顿粘壶。

对于传统 Merchant 模型,其的应力-应变关系为

$$\sigma'_s + \frac{\eta}{E_0 + E_1} \frac{d\sigma'_s}{dt} = \frac{E_0 E_1}{E_0 + E_1} \epsilon + \frac{\eta E_0}{E_0 + E_1} \frac{d\epsilon}{dt} \quad (1)$$

式中: σ'_s 为有效应力; ϵ 为应变; t 为时间。

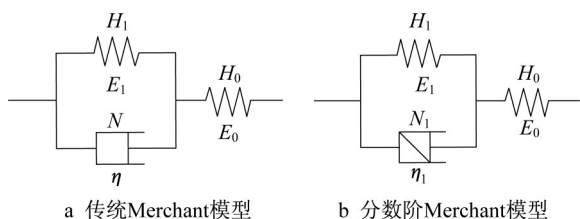


图1 黏弹性本构模型示意图

Fig. 1 Sketch of viscoelastic constitutive model

传统的牛顿粘壶满足牛顿摩擦定律,即 $\sigma'_s(t) \sim d^1 \epsilon(t)/dt^1$,它表示应力与应变对时间的一阶导数成正比。当用 Abel 粘壶替代传统的牛顿粘壶后,分数阶 Merchant 模型的应力-应变关系可表示为

$$\sigma'_s + \frac{\eta_1}{E_0 + E_1} \frac{d^\alpha \sigma'_s}{dt^\alpha} = \frac{E_0 E_1}{E_0 + E_1} \epsilon + \frac{\eta_1 E_0}{E_0 + E_1} \frac{d^\alpha \epsilon}{dt^\alpha} \quad (2)$$

式中: d^α/dt^α 为对时间 t 阶次为 $\alpha (0 < \alpha \leq 1)$ 的导数。

对于分数阶导数,这里采取 Riemann-Liouville 的定义^[14]。在区间 $(0, T)$ 上,函数 $g(t)$ 的 α 次微分为

$$\frac{d^\alpha g(t)}{dt^\alpha} = \left[\frac{1}{\Gamma(1-\alpha) \cdot t^\alpha} \right] dg(0 \leq t \leq T) \quad (3)$$

式中: $\Gamma(x)$ 为 Gamma 函数,它的定义为

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} \cdot e^{-t} dt \quad \text{Re}(x) > 0 \quad (4)$$

$$\Gamma(1+x) = x \cdot \Gamma(x) \quad (5)$$

为简化推导,引入 Laplace-Hankel 变换和逆变换^[15]

$$\bar{g}^m(\xi, s) = \int_0^\infty \int_0^\infty g(r, t) J_m(\xi r) r e^{-st} dr dt \quad (6)$$

$$g(r, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \int_0^\infty \bar{g}^m(\xi, s) J_m(\xi r) \xi e^{st} d\xi ds \quad (7)$$

式中: $\bar{g}^m(\xi, s)$ 是函数 $g(r, t)$ 在经过变换后的函数, ξ 和 s 分别为 Hankel 和 Laplace 变换参数; $J_m(\xi r)$ 为 m 阶 Bessel 函数。

对式(2)进行 Laplace-Hankel 变换,并结合分数阶导数的定义,即式(3)-(5),可以推导得到

$$\frac{\bar{\epsilon}(s)}{\bar{\sigma}'_s(s)} = \frac{1}{E_0} + \frac{1}{E_1 + s^\alpha \eta_1} \quad (8)$$

1.2 地基中任意点广义应力和位移的边界元解

根据弹性-黏弹性对应原理^[16],用式(8)获得的柔度系数代替相关的弹性参数,可获得横观各向同性分数阶黏弹性饱和软土地基的解^[11],即地基中任意 α 点受 n 向单位荷载时引起的 s 时刻 β 点 m 方向上地基位移 $\bar{R}_{mn}(\alpha, \beta, s)$ 及超孔压 $\bar{R}_n(\alpha, \beta, s) (m=r, z; n=z)$,它们也是积分变换域内的地基柔度系数。

如图 2 所示将地基划分为 N 个层元,将桩划分为 $i+1$ 个桩单元。其中,桩嵌入的土层部分划分与桩单元一致。按照边界元法的理论,把获得的地基柔度系数 $\bar{R}_{mn}(\alpha, \beta, s)$ 及 $\bar{R}_n(\alpha, \beta, s)$ 作为边界元法的核函数,则对任意厚度为 L 的地基区域,在桩土边界面上沿深度方向积分,可得该区域内荷载作用下地基任意一点的位移和孔压。

$$\bar{u}_{mn}(L, \beta, s) = \int_L \bar{R}_{mn}(\alpha, \beta, s) \bar{p}_n(\alpha, s) dL \quad (9)$$

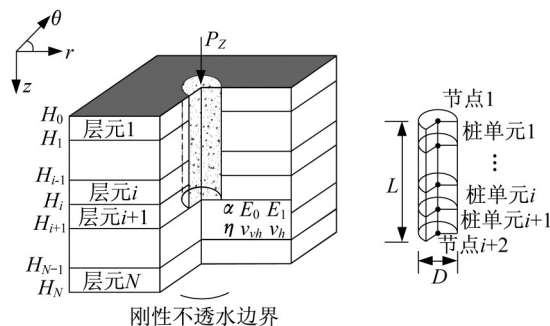


图2 地基与单桩模型示意图

Fig. 2 Sketch of the model of the foundation and the single pile

$$\bar{\sigma}(L, \beta, s) = \int_L \underline{R}_n(\alpha, \beta, s) \bar{p}_n(\alpha, s) dL \quad (10)$$

式中: $\bar{u}_{mm}(L, \beta, s)$ 和 $\bar{\sigma}(L, \beta, s)$ 分别为变换域内 L 段 n 方向的荷载引起的 s 时刻 β 点 m 方向上的位移和超孔压; $\bar{p}_n(\alpha, s)$ 为点 α 处 n 向所受荷载。

式(9)、式(10)即为边界元法中的边界积分方程,也是地基内部沿深度方向受荷的边界元解答。

2 轴向受荷单桩的有限元解

采用 2 节点轴力杆单元模拟轴向受荷单桩, 2 节点轴力杆单元的刚度矩阵为

$$\mathbf{K}_{pe} = \frac{E_p A_p}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

式中: E_p 和 A_p 分别为桩的弹性模量和横截面积; l 为杆单元长度。

根据有限元原理, 可得以下有限元求解方程:

$$\mathbf{K}_p \mathbf{a} = \mathbf{p} \quad (12)$$

式中: $\mathbf{a} = \sum_e \mathbf{a}_e$ 和 $\mathbf{p} = \sum_e \mathbf{p}_e$ 分别为总的节点位移向量和节点力向量; $\mathbf{a}_e = [u_{z1}, u_{z2}]^T$ 和 $\mathbf{p}_e = [P_{z1}, P_{z2}]^T$ 分别为单元的节点位移向量和力向量; $\mathbf{K}_p = \sum_e \mathbf{K}_{pe}$ 为所有桩单元组装得到的单桩总刚度矩阵。

3 边界元与有限元的耦合求解

图 2 为多层横观各向同性黏弹性饱和地基与其嵌入的由 2 节点单元所组成的单桩。地基划分为 N 个层元, 单桩划分为 $i+1$ 个单元, 且桩嵌入的土层部分划分与桩单元一致。 E_0 、 E_1 、 η 和 α 为分数阶 Merchant 模型参数; ν_h 为水平向应力引起的正交水平向应变的泊松比; ν_{vh} 为竖直向应力引起的水平向应变的泊松比。

总的等效节点力矩阵 \mathbf{p} 由外部荷载引起的等效节点力和桩与地基之间的相互作用力引起的等效节点力两部分组成, 因此式(12)可以写成如下形式:

$$\mathbf{K}_p \mathbf{U}(t) = \mathbf{F}(t) - \mathbf{Q}(t) \quad (13)$$

式中: $\mathbf{U}(t)$ 即节点位移矩阵 \mathbf{a} , 它表示其是随时间变化的; $\mathbf{F}(t)$ 和 $\mathbf{Q}(t)$ 分别是由外部荷载和桩-土相互作用力(侧摩阻力和端阻力)引起的等效节点力。

如图 2, 在桩-土界面处, 土内表面单元与桩单元对应, 则边界单元节点与桩单元节点重合。设任意时刻边界某一单元内的任意一点的荷载与该单元 2 个节点上的边界力具有插值关系, 即

$$p_n(\alpha, t) = N P_{ne}(t) \quad (14)$$

式中: $\mathbf{N} = [N_1, N_2]$; $\mathbf{P}_{ne}(t)$ 为由地基内表面单元 e 的 2 个节点上的 n 向边界力所构成的向量。

将积分区段 L_e 取为边界单元长度, 对式(14)进行 Laplace-Hankel 变换后代入式(9)和式(10)可得

$$\bar{u}_m(L_e, \beta, s) = \sum_n \left(\int_{L_e} \bar{R}_{mn}(\alpha, \beta, s) N dL_e \right) \cdot \bar{P}_{ne}(s) \quad (15)$$

$$\bar{\sigma}(L_e, \beta, s) = \sum_n \left(\int_{L_e} \bar{R}_n(\alpha, \beta, s) N dL_e \right) \cdot \bar{P}_{ne}(s) \quad (16)$$

式中: $\bar{u}_m(L_e, \beta, s)$ 和 $\bar{\sigma}(L_e, \beta, s)$ 分别表示 L_e 段的所有荷载引起的 β 点的 m 向位移和超孔压。

对所有单元进行累加, 可以得到由整个桩身范围的作用力引起的 β 点的位移及超孔压, 为

$$\bar{u}_m(L, \beta, s) = \sum_{e=1}^{i+1} \sum_n \left(\int_{L_e} \bar{R}_{mn}(\alpha, \beta, s) N dL_e \right) \cdot \bar{P}_{ne}(s) \quad (17)$$

$$\bar{\sigma}(L, \beta, s) = \sum_{e=1}^{i+1} \sum_n \left(\int_{L_e} \bar{R}_n(\alpha, \beta, s) N dL_e \right) \cdot \bar{P}_{ne}(s) \quad (18)$$

式中: L 为整个桩身桩长; $i+1$ 为总的单元数。

将 β 点依次取作单元节点, 可以得到一系列关系式。在此基础上, 它们统一用矩阵方程表示为

$$\bar{\mathbf{W}}(s) = \bar{\mathbf{H}} \bar{\mathbf{P}}(s) \quad (19)$$

$$\bar{\sigma}(s) = \bar{\mathbf{Y}} \bar{\mathbf{P}}(s) \quad (20)$$

式中: $\bar{\mathbf{W}}(s)$ 、 $\bar{\sigma}(s)$ 和 $\bar{\mathbf{P}}(s)$ 分别是由所有节点位移、超孔压和边界力所构成的总向量; $\bar{\mathbf{H}}$ 和 $\bar{\mathbf{Y}}$ 是由式(17)和式(18)构建的总柔度矩阵。

对于桩单元而言, 根据有限元理论, 地基反力引起的等效节点力向量为

$$\mathbf{Q}_{ne}(t) = \int_{L_e} \mathbf{N}^T p_n(\alpha, t) dL_e \quad (21)$$

将式(14)代入式(21), 可以得到

$$\mathbf{Q}_{ne}(t) = \int_{L_e} \mathbf{N}^T N dL_e \cdot \mathbf{P}_{ne}(t) \quad (22)$$

对式(22)进行 Laplace-Hankel 变换, 然后将 2 个方向的力向量合并到一起, 并组装所有的桩单元, 可以得到总的关系式, 为

$$\bar{\mathbf{Q}}(s) = \mathbf{T} \bar{\mathbf{P}}(s) \quad (23)$$

式中: $\mathbf{T} = \sum_e \sum_n \int_{L_e} \mathbf{N}^T N dL_e$, 为组装后总体转换矩阵, 它构建了边界力向量 $\mathbf{P}(s)$ 与等效节点力向量 $\mathbf{Q}(s)$ 之间的关系。

结合式(19)与式(23), 可以得到

$$\bar{\mathbf{Q}}(s) = \mathbf{T} \bar{\mathbf{H}}^{-1} \bar{\mathbf{W}}(s) \quad (24)$$

因桩-土单元划分是一致的,由桩-土界面处的位移连续条件可知

$$U(t) = W(t) \quad (25)$$

对式(13)进行 Laplace-Hankel 变换,并将式(24)、式(25)代入,可以得到外力与单元节点位移的关系,即

$$\tilde{U}(s) = (K_p + TH^{-1})^{-1} \tilde{F}(s) \quad (26)$$

式中: $\tilde{F}(s)$ 为单桩所受外力荷载向量。

将求得的 $\tilde{U}(s)$ 代入式(19)可得对应的边界力,再代入式(20)便得到对应时刻桩周土中的超孔压,而这些量的真实值可通过 Laplace-Hankel 逆变换得到。

4 数值计算与分析

因目前未见有分数阶黏弹性饱和地基与单桩共同作用的文献,为验证本文理论的正确性,将本文理论退化为基于整数阶 Merchant 模型的黏弹性饱和地基与单桩共同作用问题(分数阶次取1),并与王建华等^[4]的结果进行对比。对比算例为嵌入3层饱和黏弹性地基中的竖向受荷单桩,长径比 $L_p/D=25$,桩顶荷载为 V 。第3层土为半无限空间,黏弹性土体参数选取如表1。其中, h_i 为第 i 层土的厚度, k_i 为渗透系数, $\kappa_{0i} = E_p/E_{0i}$, $\kappa_{1i} = E_p/E_{1i}$, $\chi_i = R_p E_p / (k_i \eta_i)$, E_{0i} 表示第 i 层土的 Merchant 模型参数 E_0 , E_{1i} 表示第 i 层土的参数 E_1 。为便于分析,定义量纲一化时间因子 $\tau^* = 2E_{11}\eta_1 k_1 t / (\gamma_w R_p^2)$,量纲一化位移 $w^* = R_p E_{13} u_z(z) / V$,量纲一化轴力 $N^* = N / V$ 。

表1 饱和黏弹性地基参数

土层	h_i/R_p	$k_i/\text{cm}\cdot\text{s}^{-1}$	ν_i	κ_{0i}	κ_{1i}	χ_i
1	16	8×10^{-5}	0.4	1 000	10 000	6.25×10^4
2	16	4×10^{-5}	0.3	100	1 000	1.25×10^4
3	$+\infty$	1×10^{-5}	0.2	10	100	5×10^3

单桩沿深度变化的轴力和竖向位移经量纲一化处理分别绘于图3和图4。由图可见,桩身轴力和竖向位移随时间逐渐增大,但各土层对应的桩段上的轴力和竖向位移随深度的减少程度不同,这体现了土层分布的成层性对计算结果的影响。另外,本文解答与文献[4]吻合较好,这就验证了本文理论和数值计算方法的适用性。

考虑到对桩身长径比、桩-土刚度比进行分析的文献已较为丰富,故本文仅针对性地探究 Abel 粘壶

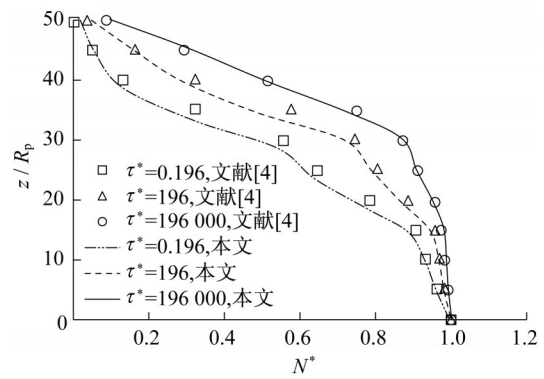


图3 黏弹性地基中桩身轴力

Fig. 3 Axial force along the pile in viscoelastic soils

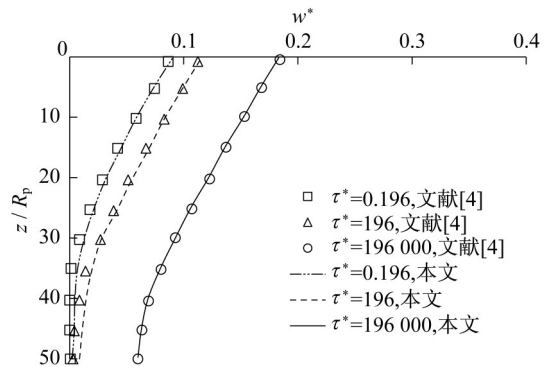


图4 黏弹性地基中桩身竖向位移

Fig. 4 Vertical displacement of the pile in viscoelastic soils

分数阶次 α 对地基-单桩相互作用的影响,并阐明其优越性。算例设计如下:大小为 V 的轴向荷载作用在双层黏弹性地基中的单桩顶部,桩的长径比 $L/D=40$,桩身模量为20GPa。双层地基厚度分别为 $h_1/D=20$, $h_2/D=200$;地基渗透系数为 $k_1=1 \times 10^{-7} \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, $k_2=1 \times 10^{-8} \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$;泊松比 $\nu_1=0.25$, $\nu_2=0.35$;其余黏弹性参数如表2所示,其中,下标 i 表示土层号, $\zeta_i = E_{hi}/E_{vi} = \eta_{hi}/\eta_{vi}$, $\varsigma_i = G_{vi}/E_{vi}$ 。为了便于分析,定义量纲一化参数如下:时间因子 $\tau = E_{0v1} k_1 t / \gamma_w D^2$,位移 $w^* = E_{0v1} Du_z(z) / V$ 。

表2 黏弹性地基参数

土层	ζ_i	ς_i	E_{0vi}/MPa	E_{1vi}/MPa	$\eta_{vi}/\text{MPa}\cdot\text{s}^{-1}$
1	2.0	0.40	5	1.0	5×10^7
2	1.5	0.37	2	0.8	2×10^8

对于分数阶次如何取值,可照文献[9-10]中的方法,即:针对实际工程不同区域及流变特性不同的软土,获取土样进行室内试验,得到其应力-应变曲线;然后通过拟合方法选取合适的 α 值,以拟合其独

特的流变性,并使计算结果与试验情况进一步吻合。对分数阶次的大概范围而言,根据分级加载单面排水流变固结试验与渗透试验,2组萧山软土土样分数阶次 α 分别为0.13和0.35^[10,17];为此,刘忠玉和杨强^[10]在研究分数阶次对土体固结流变的影响时,分数阶次 α 分别取0.10、0.35、0.50和1.00。类似地,为研究分数阶次的影响,本文分别计算了 $\alpha=0.1, 0.6, 1.0$ 这3种情况下的桩身位移,并将不同 τ 时刻的位移曲线表示在图5中。其中, $\tau=0.001$ 表示初始时刻, $\tau=10^8$ 和 $\tau=10^{15}$ 分别表示了中间时刻和固结流变完成时刻。

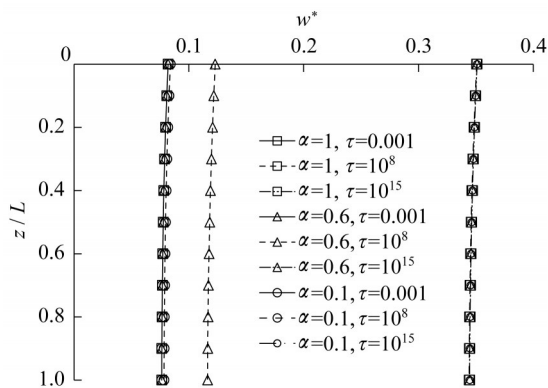


图5 不同分数阶次下桩身竖向位移

Fig. 5 Vertical displacement of the pile at different fractional orders

从图5可知,在不同的分数阶次下,无论是桩身初始位移(实线),还是最终位移(点划线)均相同,这说明分数阶次对桩身位移的初始值和最终值不产生影响;然而在中间时刻(虚线),随着流变的进行,不同分数阶次的桩身位移明显不同;其中,分数阶次 $\alpha=1.0$ 对应的桩身位移最大,而 $\alpha=0.1$ 对应的桩身位移最小。这是因为分数阶次越大,地基固结流变的速率越快,故桩身位移达到终态的时间也越短。

5 结语

为更好地描述软土地基与单桩相互作用的时变行为,引入分数阶Merchant模型,以探讨分数阶黏弹性模型在饱和横观各向同性地基与单桩相互作用分析中的应用,然后通过数值算例验证其适用性,并对分数阶次的影响进行了分析,得出了以下结论:

(1)分数阶次对桩身位移的初始值和最终值不产生影响。在相同的工况下,不同的分数阶次对应的初始沉降和最终沉降都相同。

(2)分数阶次显著影响着流变过程。分数阶次越大,地基固结流变的速率越快,故桩身位移达到终态的时间也越短。

本文所用分数阶黏弹性本构模型虽能更好地拟合土体的流变性质,但桩周土仍处于弹性阶段,并未考虑土体的塑性变形;另外,本文仅对单桩与土体的相互作用进行了分析,将来可进一步考虑桩-桩之间的相互作用,进而对群桩基础进行研究。

作者贡献声明:

艾智勇:提出理论分析方法,建立桩土相互作用模型,指导理论求解及修改,指导后续分析工作,指导文章撰写及修改工作。

赵勇智:参与理论求解及修改工作,参与算例设计及分析工作,参与完成文章初稿,进行稿件修改。

刘文杰:引入分数阶导数模型,参与理论求解工作,参与完成文章初稿。

参考文献:

- [1] NIUMPRADIT B, KARASUDHI P. Load transfer from an elastic pile to a saturated porous elastic soil [J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 1981, 5 (2): 115. DOI: 10.1002/nag.1610050203.
- [2] SENJUNTICHAJ T, SORNPAKDEE N, TEERAWONG J, et al. Time-dependent response of an axially loaded elastic bar in a multilayered poroelastic medium [J]. Journal of Engineering Mechanics ASCE, 2007, 133 (5): 578. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9399(2007)133:5(578).
- [3] 王建华, 陆建飞, 沈为平. Biot固结理论在单桩负摩擦研究中的应用[J]. 岩土工程学报, 2000, 22(5): 590. WANG Jianhua, LU Jianfei, SHEN Weiping. The application of Biot consolidation theory to the negative friction problem of single pile [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2000, 22(5): 590.
- [4] 王建华, 陆建飞, 沈为平. 层状地基中考虑固结和流变的垂直单桩的理论分析[J]. 水利学报, 2001, 32(4): 57. DOI: 10.13243/j.cnki.slx.2001.04.010. WANG Jianhua, LU Jianfei, SHEN Weiping. Theoretical study on single pile in layered saturated soil considering the consolidation and rheology [J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2001, 32 (4): 57. DOI: 10.13243/j.cnki.slx.2001.04.010.
- [5] 吴文兵, 窦斌, 王奎华, 等. 静荷载作用下黏弹性地基单桩沉降的时间效应[J]. 建筑科学与工程学报, 2012, 29(3): 73. WU Wenbing, DOU Bin, WANG Kuihua, et al. Time effect of settlement of single pile in viscoelastic foundation undergoing static loading [J]. Journal of Architecture and Civil Engineering, 2012, 29(3): 73.
- [6] FENG S, LI X, JIANG F, et al. A nonlinear approach for

- time-dependent settlement analysis of a single pile and pile groups[J]. *Soil Mechanics and Foundation Engineering*, 2017, 54(1): 7. DOI: 10.1007/s11204-017-9426-8.
- [7] AI Z Y, DAI Y C, CHENG Y C. Time-dependent analysis of axially loaded piles in transversely isotropic saturated viscoelastic soils [J]. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2019, 101: 173. DOI: 10.1016/j.engabound.2019.01.004.
- [8] 张为民. 一种采用分数阶导数的新流变模型理论[J]. *湘潭大学自然科学学报*, 2001, 23(1): 30. DOI: 10.13715/j.cnki.nsjxu.2001.01.007.
- ZHANG Weimin. A new rheological model theory with fractional order derivatives [J]. *Natural Science of Xiangtan University*, 2001, 23(1): 30. DOI: 10.13715/j.cnki.nsjxu.2001.01.007.
- [9] YIN D S, H W, CHENG C. Fractional order constitutive model of geomaterials under the condition of triaxial test [J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2013, 37(8): 961. DOI: 10.1002/nag.2139.
- [10] 刘忠玉, 杨强. 基于分数阶 Kelvin 模型的饱和黏土一维流变固结分析[J]. *岩土力学*, 2017, 38(12): 3680. DOI: 10.16285/j.rsm.2017.12.036.
- LIU Zhongyu, YANG Qiang. One-dimensional rheological consolidation analysis of saturated clay using fractional order Kelvin's model[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2017, 38(12): 3680. DOI: 10.16285/j.rsm.2017.12.036.
- [11] AI Z Y, ZHAO Y Z, LIU W J. Fractional derivative modeling for axisymmetric consolidation of multilayered cross-anisotropic viscoelastic porous media[J]. *Computers and Mathematics with Applications*, 2020, 79(5): 1321. DOI: 10.1016/j.camwa.2019.08.033.
- [12] AI Z Y, ZHAO Y Z, SONG X, *et al.* Multi-dimensional consolidation analysis of transversely isotropic viscoelastic saturated soils[J]. *Engineering Geology*, 2019, 253: 1. DOI: 10.1016/j.enggeo.2019.02.022.
- [13] KOELLER R C. Applications of fractional calculus to the theory of viscoelasticity[J]. *Transactions of the ASME Journal of Applied Mechanics*, 1984, 51(2): 299. DOI: 10.1115/1.3167616.
- [14] 陈文. 力学与工程问题的分数阶导数建模[M]. 北京: 科学出版社, 2010.
- CHEN Wen. Fractional derivative modeling of mechanics and engineering problems[M]. Beijing: Science Press, 2010.
- [15] SNEDDON I N. The use of integral transform[M]. New York: McGraw-Hill, 1972.
- [16] 魏培君, 张双寅, 吴永礼. 黏弹性力学的对应原理及其数值反演方法[J]. *力学进展*, 1999, 29(3): 317.
- WEI Peijun, ZHANG Shuangyin, WU Yongli. Correspondence principle and numerical methods of inverse integral transformation in viscoelastic mechanics[J]. *Advances in Mechanics*, 1999, 29(3): 317.
- [17] 李西斌. 软土流变固结理论与试验研究[D]. 杭州: 浙江大学, 2005.
- LI Xibin. Theoretical and experimental studies on rheological consolidation of soft soil [D]. Hangzhou: Zhejiang University, 2005.

~~~~~

(上接第 1532 页)

- [9] FERNANDES L M, FUKUSHIMA M, JÚDICE J, *et al.* The second-order cone quadratic eigenvalue complementarity problem [J]. *Optimization Methods and Software*, 2015, 31(1): 1. DOI: 10.1080/10556788.2015.1040156.
- [10] ADLY S, RAMMAL H. A new method for solving second-order cone eigenvalue complementarity problems [J]. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 2015, 165(2): 563. DOI: 10.1007/s10957-014-0645-0.
- [11] SEEGER A, VICENTE-PÉREZ J. On cardinality of Pareto spectra [J]. *Electronic Journal of Linear Algebra*, 2011, 22(1): 758.
- [12] MA Changfeng. The semismooth and smoothing Newton methods for solving Pareto eigenvalue problem [J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2012, 36(1): 279. DOI: 10.1016/j.apm.2011.05.045.
- [13] WÄCHTER A, BIEGLER L T. On the implementation of an interior-point filter line-search algorithm for large-scale nonlinear programming [J]. *Mathematical Programming*, 2006, 106(1): 25. DOI: 10.1007/s10107-004-0559-y.
- [14] JÚDICE J, RAYDAN M, S. ROSA S, *et al.* On the solution of the symmetric eigenvalue complementarity problem by the spectral projected gradient algorithm [J]. *Numerical Algorithms*, 2008, 47(4): 391. DOI: 10.1007/s11075-008-9194-7.
- [15] LE THI H A, MOEINI M, DINH T P, *et al.* A DC programming approach for solving the symmetric Eigenvalue complementarity problem [J]. *Computational Optimization and Applications*, 2012, 51(3): 1097. DOI: 10.1007/s10589-010-9388-5.
- [16] BRÁS C P, FISCHER A, JÚDICE J, *et al.* A block active set algorithm with spectral choice line search for the symmetric eigenvalue complementarity problem [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2017, 294: 36. DOI: 10.1016/j.amc.2016.09.005.
- [17] MURRAY W. Sequential quadratic programming methods for large-scale problems [J]. *Computational Optimization and Applications*, 1997, 7(1): 127. DOI: 10.1007/978-0-585-26778-4\_8.
- [18] GOULD N I M, TOINT P L. SQP methods for large-scale nonlinear programming [C]// IFIP TC7 Conference on System Modelling and Optimization. Boston: Springer, 1999: 149-178.
- [19] 袁亚湘, 孙文瑜. 最优化理论与方法 [M]. 北京: 科学出版社, 1997.
- YUAN Yaxiang, SUN Wenyu. Optimization theory and method [M]. Beijing: Science Press, 1997.