文章编号: 0253-374X(2021)12-1635-07

基于向量式有限元法的磁浮列车磁力耦合系统 建模与数值分析

孙友刚^{1,2},徐俊起²,王素梅³,袁 野⁴,倪一清³

(1. 同济大学铁道与城市轨道交通研究院,上海 201804;2. 同济大学国家磁浮交通工程技术研究中心,上海 201804;3. 香港理工大学 国家轨道交通电气化与自动化工程技术研究中心香港分中心,香港 999077;4. 江苏大学电气信息工程学院,江苏镇江 212036)

摘要:针对中低速磁浮列车悬浮系统,基于向量式有限元法 建立可变刚度的高架轨道梁模型,同时基于牛顿力学方程建 立车辆系统模型,并通过可控悬浮电磁力将2个模型耦合。 以轨道梁的跨中位移、梁端转角、振动加速度以及悬浮间隙 偏差值为重要指标,从所提出的车-桥磁力耦合模型出发,通 过数值仿真得到磁浮列车及轨道线路相应结构构件的振动 响应及位移变形响应规律。最后,通过全尺寸磁浮列车现场 试验初步验证所提出的磁力耦合模型的有效性。

关键词:磁浮列车;动力学建模;高架轨道梁;向量式有限元;磁力耦合系统
 中图分类号: U237
 文献标志码: A

Modeling and Numerical Analysis of Maglev Train Magnetic Coupling System Based on Vector Form Intrinsic Finite Element Method

SUN Yougang^{1,2}, XU Junqi², WANG Sumei³, YUAN Ye⁴, NI Yiqing³

 (1. Institute of Rail Transit, Tongji University, Shanghai 201804, China; 2. National Maglev Transportation Engineering R&D Center, Tongji University, Shanghai 201804, China; 3. National Rail Transit Electrification and Automation Engineering Technology Research Center, Hong Kong Branch, The Hong Kong Polytechnic University, Hong Kong 999077, China;
 4. School of Electrical and Information Engineering, Jiangsu University, Zhenjiang 212036, China)

Abstract: For the levitation system of medium-low speed maglev train, an elevated rail beam model with variable stiffness based on vector form intrinsic finite

element method and a vehicle system model based on Newtonian mechanics equations were established. The two models were coupled by controllable levitation electromagnetic force. Then, the mid-span displacement of rail beam, the angle of beam end, the vibration acceleration and the deviation of suspended airgap were taken as the important indexes. The vibration response and the displacement deformation response of the corresponding structural component of maglev train and track line were obtained through numerical simulation based on the proposed coupled model of vehicle-bridge magnetic force. Finally, the effectiveness of the proposed magnetic coupling model was verified through the field experiment of full-size maglev train preliminarily.

Key words: maglev train; dynamic modeling; elevated track beam; vector finite element; magnetic coupling system

电磁悬浮(EMS)型磁浮列车是一种新型轨道交 通工具,具有无接触、无摩擦、噪声低、易维护等优 点^[1-3]。近年来,我国磁浮交通尤其是低速磁浮交通 得到迅猛发展,但在大规模商业化前,磁浮交通技术 仍存在诸多亟待解决的问题,如磁浮控制系统可靠 性、磁浮车辆的承载力、车-轨耦合作用机理等^[4-5]。 其中,磁浮列车的车-轨耦合模型如何更加准确地反 映磁浮交通的特征和机理,一直困扰着磁浮技术专 家和工程师。磁浮交通的轨道梁多为高架结构,目 前大部分磁浮车-轨耦合建模方法要么忽略或简化 非线性项,电磁力线性化后类似弹簧阻尼器(失去本



收稿日期: 2021-01-02

基金项目:国家自然科学基金(51905380,52072269);上海市多网多模式轨道交通协同创新中心基金;上海市级科技重 大专项(2021SHZDZX0100);中央高校基本科研业务费专项资金

第一作者:孙友刚(1989—),男,副教授,工学博士,主要研究方向为磁浮列车动力学及控制。 E-mail: 1989voga@tongji.edu.cn

通信作者:王素梅(1989—),女,工学博士,主要研究方向为磁浮列车建模。 E-mail: may. sm. wang@polyu. edu. hk

质特征),要么只建立在轨道梁某个位置的静态悬浮 (不能反映列车速度影响)。因此,亟需研究由可控 电磁力无接触耦合的车--轨动力学机理,建立反映不 同速度下车辆和轨道垂向运行动态特性的计算 模型。

在早期磁浮列车动态特性研究中,将磁浮列车 简化为轨道上的一个移动力^[6]或者移动质量^[7],但是 这样的模型无法反映车辆的动力学行为。翟婉明 等[8]和赵春发等[9]同时考虑车辆系统和轨道系统,提 出了用弹簧阻尼器替代多电磁铁磁浮的车--轨耦合 模型。然而,将电磁力简化为弹簧阻尼器虽然提高 了计算效率,但是不能完全反映电磁力的非线性特 征。Yau^{10]}考虑比例-积分(PI)控制器下的非线性电 磁力,将磁浮列车简化为一系列考虑二系悬挂系统 的二自由振子模型,其中轨道被简化为单跨的欧拉 梁。每个振子间没有任何连接,并且不能研究车辆 的点头等运动状态。Han等^[11]提出了一种基于多体 动力学的磁浮车辆动力学模型,该模型考虑了分段 开关轨道的灵活性。利用所建立的分析模型,进行 了中低速下悬浮稳定性和安全性的仿真研究。Han 等^[12]基于多体动力学开发了EMS型磁浮列车系统 集成模型,分析了列车沿曲线运行时侧风的影响和 横向阻尼器的影响。Zhang等^[13]设计了低动力作用 下的新型中低速磁浮列车悬浮架,并进行了动力学 数值仿真验证。对于电磁力控制环节仿真,采用了 简化的线性磁力控制模型。Sun 等^[14]建立了EMS型 磁浮列车的车--轨耦合动力学模型,研究了车--轨耦 合共振的发生机理,但是未考虑动态跑车过程。近 些年,学者们[15-16]利用成熟的商业有限元软件进行轨 道建模,再联合其他软件模块组成联合仿真模型,大 大提高了精确度,但是大量的网格和多个软件成本 增大了计算负担和花费,并且无法提供数学模型给 控制器设计使用。

综上,EMS型磁浮列车系统的车-轨动力学耦 合机理和模型研究已取得较大进展,但是对不同速 度和电磁力非线性共同作用下的动态跑车过程仍然 研究不足。就磁浮车辆行驶在桥梁上的运动而言, 涉及到2个子系统的相互耦合问题,而且这种耦合 行为会随着时间的变化而改变。简化的模型不能完 全反映耦合特性,而传统有限元在分析磁浮列车车--桥的动力耦合行为时计算又非常耗时。向量式有限 元法是以向量式力学为基础的新型有限元计算方 法。该方法通过数值计算的方式来准确预测和分析 结构的真实运动行为,还可以用来分析大变形、大变 位、断裂、多体运动等复杂行为。采用点值描述的方 式,将连续结构体以一组有限的质点来描述,每个质 点可以独立且并行计算,故该方法可以用来分析多 个运动变形体的相互作用。基于此,将向量式有限 元法作为一种更加简单高效的计算方法进行磁浮列 车车-桥耦合作用分析。

针对上述问题,首先推导出磁浮列车的磁力耦 合模型,其中高架轨道模型采用向量式有限元法。 然后,以梁的跨中位移、梁端转角、振动加速度以及 悬浮间隙偏差为重要指标,对不同车速下的磁浮列 车动态通过轨道梁的过程进行仿真分析。最后,利 用上海临港中低速磁浮基地的全尺寸试验样车,对 该建模方法的准确性和有效性进行初步验证。

1 磁浮列车磁力耦合模型

以向量式有限元法进行车-桥动力学分析时,可 采用点值描述法将车辆和桥梁用一组质点表示,每 个质点均满足牛顿第二定律。作用在车辆上的外力 以及作用在桥梁上的外力为悬浮力的作用力和反作 用力,施加在桥梁上每个质点的内力可以由梁单元 的逆向运动得到。

如图1所示,一节磁浮列车以匀速v行驶在简支 梁上。车体由1个车厢、5个悬浮架组成。每个悬浮 架有2个电磁铁模块(左右各1个),每个模块由4个 电磁铁线圈构成。左右模块相同位置的每2个电磁 铁线圈的电磁力简化为一个集中悬浮力。为了用向 量式有限元法模拟车-桥系统,对于车辆模型采用多 体车辆有限元模型,对于桥梁采用向量式有限元梁 单元模拟。在建模前,作出如下合理假设:①只考虑 二维的车-桥模型,忽略磁浮车辆的纵向运动(纵向 为垂直于重力和轨道中心线的竖直平面方向);②桥 梁采用欧拉-伯努利梁来表示,桥梁的截面均匀。将 桥梁离散成一组有质量的点,点与点之间用无质量 的单元连接。

1.1 车体运动方程

在如图1所示的车-桥模型中, F_{ij} (*i*=1,...,5,*j*=1,...,4)为电磁铁产生的悬浮力, m_c 为车厢质量, m_{bi} (*i*=1,...,5)为悬浮架质量, z_{bi} 为每个 悬浮架质心垂向位移, θ_{bi} 为每个悬浮架转动角度, z_c 为车厢质心垂向位移, θ_c 为车厢转动角度, l_m 为2个 悬浮架中心距离, l_b 为悬浮架质心与空气弹簧的距离, l_n (*n*=1,...,10)为车厢质心到每个空气弹簧的 距离, c_c 为空气弹簧阻尼, k_c 为空气弹簧刚度, J_c 为车



图1 磁浮列车通过多跨简支梁

Fig.1 Maglev train passing through multi-span simply supported beam



0

0

0

0

 $J_{\rm b5}$

0

$$\ddot{\boldsymbol{\theta}}_{br} = \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_{b1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddot{\theta}_{b2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddot{\theta}_{b3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddot{\theta}_{b4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddot{\theta}_{b5} \end{bmatrix}$$

$$\bar{L}_{br} = \begin{bmatrix} I_{10} - I_{1} + I_{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2l_{b} - l_{3} + l_{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2l_{b} - l_{5} + l_{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2l_{b} - l_{7} + l_{8} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2l_{b} - l_{9} + l_{10} \end{bmatrix}$$

$$\bar{\theta}_{mix} = \begin{bmatrix} \theta_{c} + \theta_{b1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \theta_{c} + \theta_{b2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta_{c} + \theta_{b3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \theta_{c} + \theta_{b4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \theta_{c} + \theta_{b5} \end{bmatrix}$$

$$\bar{F}_{br} = \left(-F_{11}l_{b} - \frac{F_{12}l_{b}}{2} + \frac{F_{13}l_{b}}{2} + F_{14}l_{b}, -F_{21}l_{b} - \frac{F_{22}l_{b}}{2} + \frac{F_{23}l_{b}}{2} + F_{24}l_{b}, -F_{31}l_{b} - \frac{F_{32}l_{b}}{2} + \frac{F_{33}l_{b}}{2} + F_{34}l_{b}, -F_{41}l_{b} - \frac{F_{42}l_{b}}{2} + \frac{F_{43}l_{b}}{2} + F_{44}l_{b}, -F_{51}l_{b} - \frac{F_{52}l_{b}}{2} + \frac{F_{53}l_{b}}{2} + F_{54}l_{b} \right)^{\mathrm{T}}$$

1.2 可控电磁力模型

对于磁浮列车的悬浮控制,采用双环控制,并取 得了成功应用^[17]。因为斩波器的成功应用,所以这 里只设计电流环。采用经典的比例-微分(PD)控制 器,悬浮力F计算式如下所示:

$$F = K_{\rm e} \left(\frac{K_{\rm p}(h - h_0) + K_{\rm d}\dot{h} + I_0}{h} \right)^2 \tag{5}$$

式中: K_e 为电磁力常数; K_p 为比例项系数; K_d 为微分 项系数;h为实时悬浮间隙; h_0 为理想悬浮间隙; I_0 为 平衡电流。

1.3 轨道梁运动方程

对轨道梁作以下假设:

(1)轨道梁看作是无限长的欧拉-伯努利梁。

(2)轨道扣件与桥梁之间采用刚性阻尼连接,如 图2所示。





轨道和桥梁模型均采用向量式点值描述,每个 点满足牛顿第二定律,而作用在轨道和桥梁上的每 个质点的内力可以采用向量式梁单元求得。依据向 量式理论,桥梁可采用一组质点进行模拟,相邻质点 之间采用向量式梁单元连接,每个质点均满足牛顿 第二定律,即: $M_{a}\ddot{X}_{a} = F_{a,ext} + F_{a,int} + F_{a,d}$ (6) 式中: M_{a} 和 \ddot{X}_{a} 分别为任一质点的质量矩阵和位移矩

阵, M_{α} ^{X_{α}}为任一质点的惯性力; $F_{\alpha,ext}$ 、 $F_{\alpha,int}$ 、 $F_{\alpha,d}$ 分别为任一质点受到的内力、外力和阻尼力。

对于作用在桥梁质点上的内力,可采用向量式 梁单元理论中的逆向运动进行求解。向量式有限元 法的梁理论是采用点值描述的方法来描述梁受力后 其位置的变化,以途径单元将梁的变形简化成每个 途径单元内的小变形,这样梁的内力就可采用材料 力学的公式来计算;为了得到节点位移中连接单元 的纯变形,可将当前时刻梁的构型(1_t-2_t)做一个虚 拟的逆向运动(1_d-2_d),如图3所示。此逆向运动包 括逆向平动位移(-u₁)和逆向转动位移-θ。通过 梁的虚拟逆向运动,将刚体运动从全位移中分离,以 便得到梁的纯变形,即



 $\Delta e = l_{\rm t} - l_{\rm a}, \theta_1 = \beta_{\rm 1t} - \beta_{\rm 1a} - \varphi, \theta_2 = \beta_{\rm 2t} - \beta_{\rm 2a} - \theta(7)$



 $J_{\rm b1}$

0

0

0

 \cap

()

()

 $0 J_{b3} 0$

 $[2l_{1} - l_{1} + l_{2}]$

 $0 \quad J_{\rm h4}$

 $J_{\rm b2} = 0$

()

0

 \cap

式中: $\Delta e_{,0_{1},0_{2}}$ 分别为轴向纯变形、梁单元节点1和2 的纯转动位移; $l_{,}$ 和 l_{a} 分别为梁单元的当前时刻 ($1_{t}-2_{t}$)和初始时刻($1_{a}-2_{a}$)的单元长度;(β_{1t},β_{2t})和 (β_{1a},β_{2a})分别为节点1和2在当前时刻和初始时刻的 转动位移。

在得到梁单元的节点变形后,可采用一组内插 函数来计算梁单元上任一点的变形,此插值函数即 变形函数。在求得梁单元上每一点的变形后,根据 节点内力平衡和节点变形所产生的虚功与梁单元的 变形虚功相等的条件,即可求得梁单元的内力。

轨道梁上列车范围内的外力P仅包括轨道与悬浮 架之间的悬浮力,即:

$$P = F_{\underline{k}} \tag{8}$$

式中:*F*[®] 为悬浮力。可以利用中心差分法求解车辆和桥梁的微分方程^[18-19],表达式如下所示:

$$X_{a,-1} = X_{a,0} - \Delta t \left(1 - \frac{a_0 \Delta t}{2M_a} \right) \dot{X}_{a,0} + \left(F_{a,0,\text{ext}} + F_{a,0,\text{int}} + \frac{a_1 F_{a,0,\text{int}}}{\Delta t} \right) \frac{\Delta t^2}{2M_a}$$
(9)
$$X_{a,n+1} = \frac{4}{C_1} X_{a,n} + \frac{C_2}{C_1} X_{a,n-1} + \frac{F_{a,n,\text{ext}} + F_{a,n,\text{int}} - a_1 \left(\frac{F_{a,n,\text{int}} - F_{a,n-1,\text{int}}}{\Delta t} \right)$$
(10)
$$C_1 M_a$$

式中: a_0 和 a_1 为阻尼因子; $C_1 = a_0h + 2$ 和 $C_2 = a_0h - 2$ 分别为与阻尼因子 a_0 有关的阻尼系数; $X_{a,-1}, X_{a,0}, X_{a,n}, X_{a,n-1}$ 和 $X_{a,n+1}$ 分别是-1时刻、初始 时刻、n时刻、(n-1)时刻和(n+1)时刻的位移矩阵; $F_{a,0,\text{ext}}$ 和 $F_{a,n,\text{ext}}$ 分别是初始时刻和n时刻的外力矩 阵; $F_{a,0,\text{int}}, F_{a,n-1,\text{int}}$ 和 $F_{a,n,\text{int}}$ 分别是初始时刻、(n-1)时刻和n时刻的内力矩阵。

2 数值仿真与分析

根据所提出的磁浮列车磁力耦合模型,通过数 值仿真来研究该方法的有效性和相关规律。工况为 一节磁浮列车分别以 60 km·h⁻¹、80 km·h⁻¹和 100 km·h⁻¹的速度通过五跨的简支轨道梁。每跨轨道梁 之间有简支梁跨端结构缝。磁浮系统相关仿真参数 的取值如表1和表2所示。

对60、80、100 km·h⁻¹车速下的磁浮列车动态通 过轨道梁的过程进行仿真,梁的跨中垂向位移、梁端 转角、梁的中点垂向加速度、车厢垂向加速度、悬浮 间隙偏差和电磁力的仿真结果如图4~9所示。

	表1 欧拉	伯努利梁参数	
Tab.1	Parameters o	f Euler-Berno	olli beam
	抗弯刚度 EI/	每米质量 m/	

跨长L/m	$(N \cdot m^2)$	(kg•m ⁻¹)	阻尼比 ξ
24	3.15×10^{10}	4.6×10^{3}	0.035

表 2 磁浮车辆参数

Tab.2 Parameters of maglev vehicle

物理量	数值	物理量	数值
$m_{ m c}/{ m kg}$	1.04×10^{4}	$J_{\rm c}/({\rm kg}{ m \cdot}{ m m}^4)$	3.85×10^{5}
$m_{ m b\it i}/ m kg$	2.23×10^{3}	$J_{\rm bi}/({\rm kg}{ m \cdot}{ m m}^4)$	1.15×10^{3}
$k_{\rm c}/({ m N}\cdot{ m m}^{-1})$	1.6×10^{5}	$c_{\rm c}/({\rm N} \cdot {\rm s} \cdot {\rm m}^{-2})$	1.0×10^{4}
I_0/A	25.74	$l_{\rm m}/{ m m}$	1.150
$l_{\rm b}/{ m m}$	0.575	l_1/m	7.450
l_2/m	5.150	l_3/m	4.300
l_4/m	2.000	l_5/m	1.150
K	65,000	K	1 500



图4 第3根轨道梁的跨中垂向位移







从图4~9可以看出,60、80、100 km·h⁻¹车速下, 梁的跨中垂向位移分别为2.012、2.014、2.015 mm, 而梁端转角分别为0.268 4‰、0.269 4‰ 和 0.274 1‰。图8、9的周期波动是由车辆通过多跨简 支梁时产生的,尖峰跳跃是由梁端边界条件产生的。 由图4~9可以看出,在低速下轨道梁跨中垂向位移、 梁端转角和车厢垂向加速度随速度变化的趋势并不



图6 第3根轨道梁中点垂向加速度

Fig.6 Vertical acceleration at the midpoint of the third track beam



图7 车厢垂向加速度

Fig.7 Vertical acceleration of the carriage





电磁力的振动响应有随速度增大而增加的趋势。

3 试验验证

在同济大学国家磁浮交通工程技术研究中心的 上海临港磁浮试验基地进行相关试验,对模型有效 性进行初步验证。如图10a所示,上海临港中低速磁 浮试验列车为五悬浮架结构^[20]。每个悬浮架系统主



Fig.9 Change of electromagnetic force

要由悬浮架、空簧、悬浮电磁铁和悬浮控制器组成。 控制算法在悬浮控制器内编程实现,可由上位机实 时采集悬浮间隙和悬浮电流,在车厢里可以布置加 速度传感器。如图10b所示,在磁浮轨道梁的中点 位置布置传感器(压电式加速度传感器、激光位移传 感器、拉线式位移传感器、光纤光栅应变传感器),采 样频率为5000 Hz。磁浮列车分别以20、40、60 km・ h⁻¹的速度通过高架轨道梁,并通过电压式数据采集 仪以及光纤光栅数据解调仪采集相关试验数据。



a 磁浮列车 b 轨道梁下布置传感器 图 10 试验现场布置 Fig.10 Test on site

选取工况为:磁浮列车以60 km·h⁻¹的速度通过 轨道梁时的实测数据作对比分析。轨道梁跨中垂向 位移实测值和仿真值的对比如图11所示。







实测的最大跨中位移为2.013 mm,仿真的最大 跨中位移为2.011 mm。实测数据和仿真数据的曲 线重合度较高。平均电流、悬浮间隙和轨道梁振动 一阶频率如表3所示。通过数据对比,初步验证了 所提出的向量式有限元磁浮列车磁力耦合系统建模 方法的有效性。

- 表3 各物理量实测数据和仿真数据对比(60 km·h⁻¹)
- Tab.3 Comparison of various physical quantities between measured data and simulation data $(60 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1})$

物理量	仿真值	实测值
电流平均值/A	26.24	25.81
悬浮间隙平均值/mm	8.53	8.82
轨道梁中点垂向振动 一阶频率/Hz	6.49	6.85

4 结语

提出了一种基于向量式有限元法的磁力耦合计 算模型。分别对60、80、100 km·h⁻¹车速下的磁浮列 车动态通过轨道梁的过程进行仿真,获得了梁的跨 中垂向位移、梁端转角、轨道梁中点垂向加速度、车 厢垂向加速度、悬浮间隙偏差和电磁力的仿真结果。 可以看出,轨道梁中点垂向加速度、悬浮间隙偏差以 及电磁力对速度的敏感性高于轨道梁跨中垂向位 移、梁端转角和车厢垂向加速度。因此,在控制器设 计时可考虑引入轨道垂向加速度作为状态反馈,为 中低速磁浮的提速设计新的控制算法。最后,在同 济大学国家磁浮交通工程技术研究中心的上海临港 磁浮试验基地进行整车试验,验证了所提出的基于 向量式有限元法的磁浮列车磁力耦合模型的有 效性。

作者贡献声明:

孙友刚:总体方案设计和仿真。
徐俊起:悬浮控制算法设计。
王素梅:向量式有限元建模。
袁 野:试验数据采集。
倪一清:试验方案设计。

参考文献:

- LEE H W, KIM K C, LEE J. Review of maglev train technologies [J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2006, 42 (7): 1917.
- [2] KUSAGAWA S, BABA J, SHUTOH K, et al. Multipurpose design optimization of EMS-type magnetically levitated vehicle

based on genetic algorithm [J]. IEEE Transactions on Applied Superconductivity, 2004, 14(2): 1922.

- [3] ZHANG L, HUANG J, HUANG L, et al. Stability and bifurcation analysis in a maglev system with multiple delays[J]. International Journal of Bifurcation & Chaos, 2015, 25(5):1.
- [4] 周丹峰,李杰,余佩倡,等.磁浮交通轨排耦合自激振动分析及 自适应控制方法[J].自动化学报,2019,45(12):2328.
 ZHOU Danfeng, LI Jie, YU Peichang, *et al.* Analysis and adaptive control of the track induced self-excited vibration for the maglev transport [J]. Acta Automatica Sinica, 2019, 45 (12):2328.
- [5] WU H, ZENG X, YU Y. Motion stability of high-speed maglev systems in consideration of aerodynamic effects: a study of a single magnetic suspension system [J]. Acta Mechanica Sinica, 2017, 33(6): 1084.
- [6] CAI Y, CHEN S S, ROTE D M, et al. Vehicle/guideway interaction for high speed vehicles on a flexible guideway [J]. Journal of Sound and Vibration, 1994, 175(5): 625.
- [7] 周又和,武建军,郑晓静,等.磁浮列车的动力稳定性分析与 Liapunov指数[J].力学学报,2000,32(1):42.
 ZHOU Youhe, WU Jianjun, ZHENG Xiaojing, *et al.* Analysis of dynamic stability for magnetic levitation vehicles by Liapunov characteristic number [J]. Acta Mechanica Sinica, 2000, 32(1):42.
- [8] 翟婉明,赵春发.磁浮车辆/轨道系统动力学(I):磁/轨相互 作用及稳定性[J].机械工程学报,2005,41(7):1.
 ZHAI Wanming, ZHAO Chunfa. Dynamics of maglev vehicle/ guideway systems (I): magnet/rail interaction and system stability[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2005, 41(7): 1.
- [9] 赵春发,翟婉明.磁浮车辆/轨道系统动力学(Ⅱ):建模与仿真
 [J].机械工程学报,2005,41(8):163.
 ZHAO Chunfa, ZHAI Wanning. Dynamics of maglev vehicle/ guideway system (Ⅱ): modeling and simulation [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2005, 41(8): 163.
- [10] YAU J D. Vibration control of maglev vehicles traveling over a flexible guideway [J]. Journal of Sound and Vibration, 2009, 321(1): 184.
- [11] HAN J B, HAN H S, LEE J M, et al. Dynamic modeling and simulation of EMS maglev vehicle to evaluate the levitation stability and operational safety over an elastic segmented switch track[J]. Journal of Mechanical Science & Technology, 2018, 32(7):2987.
- [12] HAN J B, KIM K J. Characteristics of vibration in magnetically levitated trains subjected to crosswind [J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part F: Journal of Rail and Rapid Transit, 2018, 232(5): 1347.
- [13] ZHANG M, LUO S, GAO C, et al. Research on the mechanism of a newly developed levitation frame with mid-set air spring[J]. Vehicle System Dynamics, 2018, 56(12): 1797.
- [14] SUN Y, XU J, QIANG H, et al. Hopf bifurcation analysis of (下转第1700页)