

弹性需求的 Logit 随机共乘用户均衡模型和算法

马捷^{1,2}, 李锐³, 王华⁴

(1. 东南大学交通学院, 江苏南京 211189; 2. 道路交通工程国家级实验教学示范中心(东南大学), 江苏南京 211189;

3. 河海大学土木与交通学院, 江苏南京 210024; 4. 新加坡国立大学土木与环境工程系, 新加坡 117576)

摘要: 基于 Logit 选择模型和弹性需求函数, 建立了弹性需求的 Logit 随机共乘用户均衡模型, 并提出了自适应并行投影算法以求解共乘出行交通分配问题, 最后通过 2 个城市交通网络算例验证了模型和算法的有效性。结果表明: 弹性需求参数和用户感知离散参数是影响共乘出行的重要因素, 出行需求和平均出行时间随着弹性需求参数和用户感知离散参数的增加而降低; 所提出算法可求解大规模共乘出行交通分配问题并获得全局最优解。

关键词: 交通运输规划与管理; 共乘出行; 交通网络建模; 交通分配; 投影算法; 并行计算

中图分类号: U491

文献标志码: A

Logit-based Stochastic Ridesharing User Equilibrium Model with Elastic Demand and Its Algorithm

MA Jie^{1,2}, LI Rui³, WANG Hua⁴

(1. School of Transportation, Southeast University, Nanjing 211189, China; 2. National Demonstration Center for Experimental Road and Traffic Engineering Education (Southeast University), Nanjing 211189, China; 3. School of Civil and Transportation Engineering, Hohai University, Nanjing 210024, China; 4. Department of Civil and Environmental Engineering, National University of Singapore, Singapore 117576, Singapore)

Abstract: Based on the Logit choice model and elastic demand function, a Logit-based stochastic ridesharing user equilibrium model with elastic demand was built, and a self-adaptive parallel projection algorithm was proposed to solve the ridesharing traffic assignment problem. Finally, the effectiveness of the proposed model and algorithm was verified by two benchmark urban transportation networks. It is shown that the elastic demand parameter and user perception dispersion

parameter are critical factors affecting the ridesharing, and the travel demand and average travel time decrease with the increase of the elastic demand parameter and user perception dispersion parameter. The proposed algorithm can solve the large-scale ridesharing traffic assignment problem efficiently and obtain the globally optional solution.

Key words: transportation planning and management; ridesharing; transportation network modeling; traffic assignment; projection algorithm; parallel computing

随着共享经济的兴起, 共享出行成为当前城市交通网络的重要出行方式^[1], 共乘出行(即顺风车出行等)作为共享出行的典型形式之一也受到广大交通出行者的青睐^[2-3]。共乘出行是指具有共同出行起讫点的出行者们通过网约车平台进行匹配并分别成为共乘驾驶员和共乘乘客, 乘客通过支付一定补偿费用给驾驶员从而分担出行费用的一种出行方式, 可在降低出行者出行费用的同时满足出行者的出行需求^[1]。虽然共乘出行占当前城市交通网络中机动车的出行比例仍较低, 但是由于城市交通网络的复杂性, 共乘出行交通方式已经极大地改变了城市交通网络的结构和出行者的出行需求^[4]。交通流量是交通网络中最重要变量之一, 建立城市交通网络模型是预测和分析交通流量的重要手段。通过城市交通网络建模, 可以实现交通规划和管理的诸多功能, 如制定共乘价格、估计通行时间、设计交通网络等。因此, 建立考虑了共乘出行的城市交通网络模型, 分析共乘出行对交通流量的影响, 量化出行费用对出行需求的影响程度, 这将有力地支撑共乘出行

收稿日期: 2021-12-24

基金项目: 中国博士后科学基金(2021M690614, 2021T140112, 2018M630505); 中央高校基本科研业务费专项资金(2242021R20044)

第一作者: 马捷(1990—), 男, 助理研究员, 工学博士, 主要研究方向为共享出行交通网络建模和算法。

E-mail: majie@seu.edu.cn

通信作者: 王华(1984—), 男, 高级研究员, 工学博士, 主要研究方向为城市交通网络优化。

E-mail: hwang191901@gmail.com



论文
拓展
介绍

城市交通系统的科学规划与设计。

考虑了共乘出行的城市交通网络(下文简称共乘交通网络)的出行用户分为3类:单独出行的驾驶员(即传统私人小汽车出行方式的出行者)、共乘驾驶员和共乘乘客。共乘驾驶员和共乘乘客通过网约车平台实现匹配,乘坐共乘驾驶员的车辆出发并到达目的地。未参与或未成功实现匹配的用户将作为单独出行的驾驶员(即传统私人小汽车出行方式)独立完成出行。共乘交通网络中的出行者是存在转移关系的,即数量不是固定不变的。例如,当单独出行的驾驶员发现共乘驾驶员(或共乘乘客)的综合出行成本更低时,将放弃单独出行而选择成为共乘驾驶员(或共乘乘客)。由此产生的流量变化受到相互作用的综合出行成本、供需关系以及出行者选择行为的影响,是用户自由选择的结果,因此无法通过交通调查的方式获得。同时,与传统出行方式不同,共乘出行用户的交通流量之间还存在制约关系,这是因为共乘乘客的流量不能小于共乘驾驶员的流量,也不能大于共乘车辆的最大容量。此外,交通流量的这种约束还可能为模型带来新的乘子,导致传统交通分配算法的失效。以上原因为共乘交通网络建模带来了巨大的挑战^[5]。Xu等^[5]建立了首个共乘出行的交通分配模型,即共乘出行用户均衡(RUE)模型。该模型描述了共乘驾驶员和共乘乘客之间的流量关系,但只能计算单一的共乘服务,无法细化不同种类共乘服务的用户流量。Ma等^[6]提出了共乘出行的浮动定价策略和共乘匹配约束,并改进了RUE模型,用以计算和预测多种共乘服务的出行流量。

然而,现有的RUE模型均假设用户完全掌握出行费用的全部信息,而现实中用户对出行费用的感知具有随机性^[7-9]。此外,用户的出行需求也不是固定不变的,受到出行费用的影响^[10-12],而现有RUE模型假设需求是固定不变的。因此,考虑用户对出行费用感知的随机性以及出行费用对出行需求的影响是当前共乘交通网络研究的难点。

基于Logit选择模型和弹性需求函数,构建考虑弹性需求的Logit随机共乘用户均衡(SRUEED)问题的变分不等式模型,保证模型解的唯一性。然后,采用全局最优的自适应并行投影算法求解了SRUEED问题,该算法通过并行计算的方式极大地降低了内存需求和计算时间,提高了计算可行性。最后,通过2个算例验证了算法的有效性,并通过敏感性分析得到了共乘出行需求和平均出行时间的影响因素。

1 共乘交通网络

1.1 流量守恒

首先,建立共乘交通网络 $G=(N,A)$,其中 N 表示网络节点的集合, A 表示路段的集合;然后,分别建立单独出行的驾驶员、共乘驾驶员和共乘乘客的集合 D_s 、 D_r 和 R ,并建立泛指各类用户的集合 I ,即 $I=D_s \cup D_r \cup R$ 。此外,每个类别的用户还可以包含不同的角色。例如,如果共乘驾驶员最多允许搭乘2名乘客,就可以令 $i=1 \in D_s$ 表示单独出行的驾驶员, $i=2,3 \in D_r$ 分别表示搭载了1名乘客和2名乘客的共乘驾驶员, $i=4,5 \in R$ 则分别表示共乘驾驶员 $i=2,3$ 所搭载的乘客。出行的起讫点分别用 O 和 D 表示,共乘交通网络中3类用户之间的关系如图1所示。

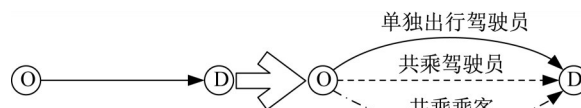


图1 共乘交通网络

Fig. 1 Ridesharing transportation network

令 $w \in W$ 表示出行起讫点对(即O-D对), $p \in P_w$ 表示连接O-D对 w 的路径, q_w 表示O-D对 w 之间的出行需求, $f_{w,p,i}$ 表示路径 p 上角色 i 的流量, x_a 和 $x_{a,i}$ 分别表示路段 $a \in A$ 上的车流量和路段 a 上角色 i 的流量。共乘交通网络具有如下交通流量守恒关系:

$$x_{a,i} = \sum_w \sum_p \delta_{w,a,p} f_{w,p,i}, \forall a, i \quad (1)$$

$$x_a = \sum_{i \in D, UD, R} x_{a,i}, \forall a \quad (2)$$

$$\sum_{p,i} f_{w,p,i} = q_w, \forall w \quad (3)$$

式中: $\delta_{w,a,p}$ 表示路段-路径关联变量。当路段 a 属于路径 p 时, $\delta_{w,a,p} = 1$,否则 $\delta_{w,a,p} = 0$ 。

1.2 共乘匹配约束

由于共乘驾驶员需要匹配共乘乘客才能完成共乘出行,因此共乘驾驶员与共乘乘客之间始终保持着显式的数量关系^[6]。Ma等^[6]由此提出了以下共乘匹配约束:

$$N_i f_{w,p,i} - f_{w,p,T_r(i)} = 0, \forall w, p, \forall i \in D_r \quad (4)$$

式中: $T_r(i)$ 表示共乘驾驶员 i 接乘的乘客, $T_r(2)=4$ 表示共乘驾驶员类型2所接乘的乘客类型4; N_i 表示共乘驾驶员 i 分享的座位数。

1.3 广义出行费用

共乘出行涉及多种出行费用,部分文献将出行费用总结为以下几类:出行时间费用、不便费用、共乘价格和报酬以及溢价和补贴。其中,溢价和补贴与共乘出行服务的供需相关,因此溢价和补贴以外费用的总和称为出行费用,出行费用加上溢价和补贴称为广义出行费用^[5-6,13]。由于研究的是随机共乘均衡问题,因此不涉及具体的广义出行费用函数的设计。广义出行费用采用文献[6]给出的一般形式,如下所示:

令 $\mathbf{x}=(x_a, a \in A)^T$ 表示路段 a 上车流量向量, $\mathbf{f}=(f_{w,p,i}, w \in W, p \in P_w, i \in I)^T$ 表示路径 p 上角色 i 流量向量,用 $t_{w,p}(\mathbf{x})$ 表示路径 p 的出行时间,则有

$$t_{w,p}(\mathbf{x}) = \sum_a \delta_{w,a,p} t_a(x_a), \forall w, p \quad (5)$$

式中: $t_a(x_a)$ 表示路段 a 的出行时间。共乘出行的出行费用

$$C_{w,p,i} = \begin{cases} \rho_i t_{w,p} + c_1, \forall w, p, \forall i \in D_s \\ \rho_i t_{w,p} + I_i(t_{w,p}) - (B_{w,i} - M_i(s_{w,i})) + c_1, \\ \quad \forall w, p, \forall i \in D_r \\ \rho_i t_{w,p} + I_i(t_{w,p}) + (B_{w,i} + M_i(d_{w,i})), \\ \quad \forall w, p, \forall i \in R \end{cases} \quad (6)$$

式中: ρ_i 表示角色 i 的时间价值; $I_i(t_{w,p})$ 表示角色 i 的不便费用,该费用与出行时间和共乘人数有关,出行时间越长或共乘人数越多则不便费用越大,因此不便费用是出行时间 $t_{w,p}$ 的单调递增函数,并且由于每种共乘出行服务都有各自不同的共乘人数,因此每种角色 i 都有各自适用的不便费用函数 $I_i(t_{w,p})$; $B_{w,i}$ 表示共乘出行的基准价格(或报酬),该价格(或报酬)与O-D对 w 和角色 i 有关,对于共乘驾驶员来说该项费用表示共乘报酬,对于乘客来说该项费用表示共乘价格; $M_i(s_{w,i})$ 表示浮动报酬,是共乘出行供给的单调递减函数,即O-D对之间的共乘驾驶员越多则平均浮动报酬越低; $M_i(d_{w,i})$ 表示浮动价格,是共乘出行需求的单调递增函数,即O-D对之间的乘客越多则平均浮动价格越高; c_1 表示与出行时间和里程无关的固定费用,如购车费用、保险费用、停车费用等。

根据经济学市场出清原理^[5],共乘出行的溢价和补贴与供需平衡有关,并且数值上刚好等于共乘匹配约束所对应的拉格朗日乘子。因此,共乘出行的广义出行费用

$$\tilde{C}_{w,p,i} = \begin{cases} C_{w,p,i}, \forall w, \forall p, \forall i \in D_s \\ C_{w,p,i} + N_i \lambda_{w,p,i}, \forall w, \forall p, \forall i \in D_r \\ C_{w,p,i} - \lambda_{w,p,T_d(i)}, \forall w, \forall p, \forall i \in R \end{cases} \quad (7)$$

式中: $\lambda_{w,p,i}$ 表示共乘匹配约束(4)所对应的拉格朗日乘子; $T_d(i)$ 表示接乘共乘乘客 i 的共乘驾驶员类型。 $\tilde{C}_w = (\tilde{C}_{w,p,i}, p \in P_w, i \in I)^T$, $w \in W$ 表示O-D对 w 的广义出行费用向量。

2 弹性需求的Logit随机共乘用户均衡条件

2.1 基于Logit的随机共乘用户均衡

由于网约车公司会为共乘驾驶员和共乘乘客提供共乘报价,因此共乘出行的价格和报酬较为精确,但共乘用户感知的出行时间是不确定的,广义出行费用的随机性主要来自于实际出行时间的不确定,因此感知的广义出行费用是一个随机变量,表达式如下所示:

$$c_{w,p,i} = \tilde{C}_{w,p,i} + \zeta_{w,p,i}, \forall w, p, i \quad (8)$$

式中: $\zeta_{w,p,i}$ 表示一个关于出行时间 $t_{w,p}$ 的均值为零、方差为常数的随机变量。假设随机变量 $\zeta_{w,p,i}$ 相互独立且符合Gumbel分布 $G(0, \sigma^2)$,其中 σ^2 为Gumbel分布的方差。应用Logit选择模型^[14-16],给出基于Logit的随机共乘用户均衡条件,如下所示:

$$\frac{f_{w,p,i}}{\sum_{p,i} f_{w,p,i}} = \frac{\exp(-\theta \tilde{C}_{w,p,i})}{\sum_{p,i} \exp(-\theta \tilde{C}_{w,p,i})}, \forall w, p, i \quad (9)$$

式中: θ 为用户感知离散参数, $\theta = \pi / \sqrt{6} \sigma$ 。 θ 越大表示分布的方差越小,用户对广义出行费用的感知越精准。

2.2 弹性需求

现实中的出行需求并不是固定不变的,城市交通网络以及交通行为选择领域中许多成熟的研究表明,出行需求与平均服务水平正相关,与用户感知的最小广义出行费用的期望负相关^[17-20]。由于出行需求最大不能超过出行人数、最小不为负数,因此出行需求会受上下界的约束。根据城市交通网络的相关研究成果^[17-20],采用 S_w 表示用户感知的最小广义出行费用的期望值并建立弹性需求函数,如下所示:

$$q_w = e_w(S_w) \in [0, \bar{q}_w], \forall w \quad (10)$$

式中: \bar{q}_w 为常数,表示出行需求的上界; $e_w(S_w)$ 是关于 S_w 的单调不增的连续可微函数。

由式(8)可知,用户感知的广义出行费用是一个随机变量,因此最小用户感知的广义出行费用也是一个随机变量。根据期望的定义对Logit选择模型的用户感知最小广义出行费用进行推导^[19],可知

$$S_w(\tilde{C}_w) = E\left(\min_{p \in P_w, i \in I} c_{w,p,i}\right) = -\frac{1}{\theta} \ln \sum_{p,i} \exp(-\theta \tilde{C}_{w,p,i}), \forall w \quad (11)$$

合并式(10)和式(11)可以得出弹性需求条件为

$$\sum_{p,i} f_{w,p,i} = e_w \left(-\frac{1}{\theta} \ln \sum_{p,i} \exp(-\theta \tilde{C}_{w,p,i}) \right), \forall w \quad (12)$$

综上所述,弹性需求的Logit随机共乘用户均衡条件应当由共乘匹配约束、基于Logit的随机共乘用户均衡条件以及弹性需求条件构成,即:

$$\begin{cases} \frac{f_{w,p,i}}{\sum_{p,i} f_{w,p,i}} = \frac{\exp(-\theta \tilde{C}_{w,p,i})}{\sum_{p,i} \exp(-\theta \tilde{C}_{w,p,i})}, \forall w, p, i \\ \sum_{p,i} f_{w,p,i} = e_w \left(-\frac{1}{\theta} \ln \sum_{p,i} \exp(-\theta \tilde{C}_{w,p,i}) \right), \forall w \\ f_{w,p,T(i)} = N_i f_{w,p,i}, \forall w, p, \forall i \in D_r \end{cases} \quad (13)$$

3 弹性需求的Logit随机共乘用户均衡模型

定义可行集合 Ω ,如下所示:

$$\Omega = \left\{ f \mid N_i f_{w,p,i} - f_{w,p,T(i)} = 0, \forall w, p, \forall i \in D_r; f_{w,p,i} \in [0, \bar{q}_w], \forall w, p, i \right\} \quad (14)$$

由于弹性需求 $q_w = e_w(S_w) \in [0, \bar{q}_w]$, $\forall w$ 使得约束 $f_{w,p,i} \in [0, \bar{q}_w]$, $\forall w, p, i$ 始终满足,因此保留该约束的主要作用是保证可行集 Ω 的紧致性,即 Ω 是紧集。定义向量函数 $\varphi(f) = (\varphi_{w,p,i}, \forall w, p, i)^T$, $\varphi_{w,p,i}$ 的表达式如下所示:

$$\varphi_{w,p,i} = C_{w,p,i} + \frac{1}{\theta} \ln f_{w,p,i} - e_w^{-1} \left(\sum_{p,i} f_{w,p,i} \right) - \frac{1}{\theta} \ln \sum_{p,i} f_{w,p,i} \quad (15)$$

弹性需求的Logit随机共乘用户均衡模型的变分不等式模型为找到一个向量 $f^* \in \Omega$ 使得不等式(16)恒成立:

$$\varphi(f^*)^T (f - f^*) \geq 0, \forall f \in \Omega \quad (16)$$

接下来,验证该模型的解的等价性、存在性以及唯一性,即该模型的解符合弹性需求的Logit随机共乘用户均衡条件、解存在并且是唯一的。

定理1(等价性) 模型(16)的解符合弹性需求的Logit随机共乘用户均衡条件。

证明:模型(16)显然等价于

$$\varphi(f^*)^T f \geq \varphi(f^*)^T f^*, \forall f \in \Omega \quad (17)$$

因此 f^* 是模型(16)的解当且仅当 f^* 是数学规划问题(18)的解时成立,如下所示:

$$\min_{f \in \Omega} \varphi(f^*)^T f \quad (18)$$

式中: f 是数学规划(18)的变量; f^* 是未知的固定量。

对数学规划(18)检查Karush-Kuhn-Tucker(KKT)条件^[21],由于弹性需求 $q_w = e_w(S_w) \in [0, \bar{q}_w]$, $\forall w$ 使得约束 $f_{w,p,i} \in [0, \bar{q}_w]$, $\forall w, p, i$ 始终满足,因此该约束不会产生乘子,有

$$\begin{cases} \frac{f_{w,p,i}^*}{\sum_{p,i} f_{w,p,i}^*} = \exp(-\theta \tilde{C}_{w,p,i}^* + \theta e_w^{-1}(\sum_{p,i} f_{w,p,i}^*)), \forall w, p, i \\ f_{w,p,T(i)}^* = N_i f_{w,p,i}^*, \forall w, p, \forall i \in D_r \end{cases} \quad (19)$$

整理式(19)可得

$$\begin{cases} \frac{f_{w,p,i}^*}{\sum_{p,i} f_{w,p,i}^*} = \frac{\exp(-\theta \tilde{C}_{w,p,i}^*)}{\sum_{p,i} \exp(-\theta \tilde{C}_{w,p,i}^*)}, \forall w, p, i \\ \sum_{p,i} f_{w,p,i}^* = e_w \left(-\frac{1}{\theta} \ln \sum_{p,i} \exp(-\theta \tilde{C}_{w,p,i}^*) \right), \forall w \\ f_{w,p,T(i)}^* = N_i f_{w,p,i}^*, \forall w, p, \forall i \in D_r \end{cases} \quad (20)$$

即弹性需求的Logit随机共乘用户均衡条件。命题得证。

此处注意,虽然数学规划(18)与模型(16)等价,但是由于 f^* 未知,导致数学规划(18)没有显式表达,因此无法直接作为模型。

定理2(存在性) 模型(16)的解存在。

证明:由集合 Ω 的定义可知, Ω 是一个紧集。由于函数 $\varphi(\cdot)$ 在紧集 Ω 上连续,因此根据Nagurney的定理1.4可知^[6],变分不等式模型(16)的解存在。命题得证。

定理3(唯一性) 模型(16)的解唯一。

证明:首先计算向量函数 $\varphi(f)$ 的Jacobian矩阵,如下所示:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_{w,p,1}}{\partial f_{w,p,1}} & \frac{\partial \varphi_{w,p,1}}{\partial f_{w,p,2}} & \frac{\partial \varphi_{w,p,1}}{\partial f_{w,p,3}} & \frac{\partial \varphi_{w,p,1}}{\partial f_{w,p,4}} & \frac{\partial \varphi_{w,p,1}}{\partial f_{w,p,5}} \\ \frac{\partial \varphi_{w,p,2}}{\partial f_{w,p,1}} & \frac{\partial \varphi_{w,p,2}}{\partial f_{w,p,2}} & \frac{\partial \varphi_{w,p,2}}{\partial f_{w,p,3}} & \frac{\partial \varphi_{w,p,2}}{\partial f_{w,p,4}} & \frac{\partial \varphi_{w,p,2}}{\partial f_{w,p,5}} \\ \frac{\partial \varphi_{w,p,3}}{\partial f_{w,p,1}} & \frac{\partial \varphi_{w,p,3}}{\partial f_{w,p,2}} & \frac{\partial \varphi_{w,p,3}}{\partial f_{w,p,3}} & \frac{\partial \varphi_{w,p,3}}{\partial f_{w,p,4}} & \frac{\partial \varphi_{w,p,3}}{\partial f_{w,p,5}} \\ \frac{\partial \varphi_{w,p,4}}{\partial f_{w,p,1}} & \frac{\partial \varphi_{w,p,4}}{\partial f_{w,p,2}} & \frac{\partial \varphi_{w,p,4}}{\partial f_{w,p,3}} & \frac{\partial \varphi_{w,p,4}}{\partial f_{w,p,4}} & \frac{\partial \varphi_{w,p,4}}{\partial f_{w,p,5}} \\ \frac{\partial \varphi_{w,p,5}}{\partial f_{w,p,1}} & \frac{\partial \varphi_{w,p,5}}{\partial f_{w,p,2}} & \frac{\partial \varphi_{w,p,5}}{\partial f_{w,p,3}} & \frac{\partial \varphi_{w,p,5}}{\partial f_{w,p,4}} & \frac{\partial \varphi_{w,p,5}}{\partial f_{w,p,5}} \end{bmatrix} = J_1 + J_2 + J_3 \quad (21)$$

$$J_1 = \begin{bmatrix} \rho_1 \sum_a \delta_{w,a,p} \dot{t}_a & \rho_1 \sum_a \delta_{w,a,p} \dot{t}_a & \rho_1 \sum_a \delta_{w,a,p} \dot{t}_a & 0 & 0 \\ (\rho_2 + d_2) \sum_a \delta_{w,a,p} \dot{t}_a & (\rho_2 + d_2) \sum_a \delta_{w,a,p} \dot{t}_a + \partial_2 M_2 & (\rho_2 + d_2) \sum_a \delta_{w,a,p} \dot{t}_a & 0 & 0 \\ (\rho_3 + d_3) \sum_a \delta_{w,a,p} \dot{t}_a & (\rho_3 + d_3) \sum_a \delta_{w,a,p} \dot{t}_a & (\rho_3 + d_3) \sum_a \delta_{w,a,p} \dot{t}_a + \partial_3 M_3 & 0 & 0 \\ (\rho_4 + d_4) \sum_a \delta_{w,a,p} \dot{t}_a & (\rho_4 + d_4) \sum_a \delta_{w,a,p} \dot{t}_a & (\rho_4 + d_4) \sum_a \delta_{w,a,p} \dot{t}_a & \partial_4 M_4 & 0 \\ (\rho_5 + d_5) \sum_a \delta_{w,a,p} \dot{t}_a & (\rho_5 + d_5) \sum_a \delta_{w,a,p} \dot{t}_a & (\rho_5 + d_5) \sum_a \delta_{w,a,p} \dot{t}_a & 0 & \partial_5 M_5 \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$J_2 = \begin{bmatrix} -\frac{de_w^{-1}}{d \sum_{p,i} f_{w,p,i}} & -\frac{de_w^{-1}}{d \sum_{p,i} f_{w,p,i}} & -\frac{de_w^{-1}}{d \sum_{p,i} f_{w,p,i}} & -\frac{de_w^{-1}}{d \sum_{p,i} f_{w,p,i}} & -\frac{de_w^{-1}}{d \sum_{p,i} f_{w,p,i}} \\ -\frac{de_w^{-1}}{d \sum_{p,i} f_{w,p,i}} & -\frac{de_w^{-1}}{d \sum_{p,i} f_{w,p,i}} & -\frac{de_w^{-1}}{d \sum_{p,i} f_{w,p,i}} & -\frac{de_w^{-1}}{d \sum_{p,i} f_{w,p,i}} & -\frac{de_w^{-1}}{d \sum_{p,i} f_{w,p,i}} \\ -\frac{de_w^{-1}}{d \sum_{p,i} f_{w,p,i}} & -\frac{de_w^{-1}}{d \sum_{p,i} f_{w,p,i}} & -\frac{de_w^{-1}}{d \sum_{p,i} f_{w,p,i}} & -\frac{de_w^{-1}}{d \sum_{p,i} f_{w,p,i}} & -\frac{de_w^{-1}}{d \sum_{p,i} f_{w,p,i}} \\ -\frac{de_w^{-1}}{d \sum_{p,i} f_{w,p,i}} & -\frac{de_w^{-1}}{d \sum_{p,i} f_{w,p,i}} & -\frac{de_w^{-1}}{d \sum_{p,i} f_{w,p,i}} & -\frac{de_w^{-1}}{d \sum_{p,i} f_{w,p,i}} & -\frac{de_w^{-1}}{d \sum_{p,i} f_{w,p,i}} \\ -\frac{de_w^{-1}}{d \sum_{p,i} f_{w,p,i}} & -\frac{de_w^{-1}}{d \sum_{p,i} f_{w,p,i}} & -\frac{de_w^{-1}}{d \sum_{p,i} f_{w,p,i}} & -\frac{de_w^{-1}}{d \sum_{p,i} f_{w,p,i}} & -\frac{de_w^{-1}}{d \sum_{p,i} f_{w,p,i}} \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$J_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\theta f_{w,p,1}} - \frac{1}{\theta \sum_{p,i} f_{w,p,i}} & -\frac{1}{\theta \sum_{p,i} f_{w,p,i}} & -\frac{1}{\theta \sum_{p,i} f_{w,p,i}} & -\frac{1}{\theta \sum_{p,i} f_{w,p,i}} & -\frac{1}{\theta \sum_{p,i} f_{w,p,i}} & -\frac{1}{\theta \sum_{p,i} f_{w,p,i}} \\ -\frac{1}{\theta \sum_{p,i} f_{w,p,i}} & \theta f_{w,p,2} - \frac{1}{\theta \sum_{p,i} f_{w,p,i}} & -\frac{1}{\theta \sum_{p,i} f_{w,p,i}} & -\frac{1}{\theta \sum_{p,i} f_{w,p,i}} & -\frac{1}{\theta \sum_{p,i} f_{w,p,i}} & -\frac{1}{\theta \sum_{p,i} f_{w,p,i}} \\ -\frac{1}{\theta \sum_{p,i} f_{w,p,i}} & -\frac{1}{\theta \sum_{p,i} f_{w,p,i}} & \theta f_{w,p,3} - \frac{1}{\theta \sum_{p,i} f_{w,p,i}} & -\frac{1}{\theta \sum_{p,i} f_{w,p,i}} & -\frac{1}{\theta \sum_{p,i} f_{w,p,i}} & -\frac{1}{\theta \sum_{p,i} f_{w,p,i}} \\ -\frac{1}{\theta \sum_{p,i} f_{w,p,i}} & -\frac{1}{\theta \sum_{p,i} f_{w,p,i}} & -\frac{1}{\theta \sum_{p,i} f_{w,p,i}} & \theta f_{w,p,4} - \frac{1}{\theta \sum_{p,i} f_{w,p,i}} & -\frac{1}{\theta \sum_{p,i} f_{w,p,i}} & -\frac{1}{\theta \sum_{p,i} f_{w,p,i}} \\ -\frac{1}{\theta \sum_{p,i} f_{w,p,i}} & -\frac{1}{\theta \sum_{p,i} f_{w,p,i}} & -\frac{1}{\theta \sum_{p,i} f_{w,p,i}} & -\frac{1}{\theta \sum_{p,i} f_{w,p,i}} & \theta f_{w,p,5} - \frac{1}{\theta \sum_{p,i} f_{w,p,i}} & -\frac{1}{\theta \sum_{p,i} f_{w,p,i}} \end{bmatrix} \quad (24)$$

式(22)中: ∂_i 表示 $\frac{d}{d \sum_p f_{w,p,i}}$, i_a 表示 $\frac{dt_a(x_a)}{dx_a}$, d_i

表示 $\frac{dI_i(t_{w,p})}{dt_{w,p}}$.

根据 Ma 等^[6]的研究, J_1 在温和条件下满足正定性; 函数 $e_w(\cdot)$ 是单调不增的函数, 有 $-\frac{de_w^{-1}}{d \sum_{p,i} f_{w,p,i}} \geq 0$, 由于矩阵 J_2 的每个元素都是 $-\frac{de_w^{-1}}{d \sum_{p,i} f_{w,p,i}}$, 因此易证 J_2 的各阶顺序主子式非负, 根据矩阵半正定的判定条件, J_2 是半正定的; 此外, 由于 J_3 的各阶顺序主子式 $|E_n| \geq 0$, 即:

$$|E_1| = \frac{\sum_{p,i} f_{w,p,i} - f_{w,p,1}}{\theta f_{w,p,1} \sum_{p,i} f_{w,p,i}} \geq 0 \quad (25)$$

$$|E_2| = \frac{\sum_{p,i} f_{w,p,i} - \sum_{i=1}^2 f_{w,p,i}}{\theta \prod_{i=1}^2 f_{w,p,i} \sum_{p,i} f_{w,p,i}} \geq 0 \quad (26)$$

$$|E_3| = \frac{\sum_{p,i} f_{w,p,i} - \sum_{i=1}^3 f_{w,p,i}}{\theta \prod_{i=1}^3 f_{w,p,i} \sum_{p,i} f_{w,p,i}} \geq 0 \quad (27)$$

$$|E_4| = \frac{\sum_{p,i} f_{w,p,i} - \sum_{i=1}^4 f_{w,p,i}}{\theta \prod_{i=1}^4 f_{w,p,i} \sum_{p,i} f_{w,p,i}} \geq 0 \quad (28)$$

$$|E_5| = \frac{\sum_{p,i} f_{w,p,i} - \sum_{i=1}^5 f_{w,p,i}}{\theta \prod_{i=1}^5 f_{w,p,i} \sum_{p,i} f_{w,p,i}} \geq 0 \quad (29)$$

因此, 根据矩阵半正定的判定条件, J_3 也是半正定的。由 $J = J_1 + J_2 + J_3$ 可知 J 正定, 即向量函数 $\varphi(f)$ 关于向量 f 单调。根据 Pang 和 Facchinei 的定理 2.3.3(a)^[6]可知, 模型(16)的解唯一。命题得证。

4 自适应并行投影算法

在证明了研究问题的解存在且唯一之后, 基于全局最优的自适应投影算法^[22], 提出自适应并行投影算法并对该问题进行求解。由于城市交通网络往往规模较大, 现有的算法难以求解, 因此基于并行计

算的思想将原问题按照 O-D 对分解成若干个子问题, 每个子问题求解一个 O-D 对的路径流量, 最后将各个 O-D 对的路径流量解合并即为原问题的解。相比于自适应投影算法, 所提出的算法极大地减少了对内存的占用, 适合求解大规模的交通分配问题。此处定义可行集里到向量最近的点为该向量在可行集上的投影, 即:

$$P_\Omega(\cdot) = \arg \min_{h \in \Omega} \|h - (\cdot)\| \quad (30)$$

式中: h 是投影算法的变量。算法的具体步骤如下所示:

步骤1 给定算法精度 $\epsilon > 0$, 算法参数 $\zeta \in (0, 1)$, $\tau \in (0, 2)$, $\beta_0 > 0$, $k = 1$, $l = 0$, 用 K 短路算法^[23]为每个 O-D 对 w 构造若干条最短路径的路径集 P_w 以及初始路径流量解 $f_{w,1} \in \Omega_w$, $\Omega_w = \{f_w | N_i f_{w,p,i} - f_{w,p,T(i)} = 0, \forall p, \forall i \in D_i; f_{w,p,i} \in [0, \bar{q}_w], \forall p, i, w\}$ 。

步骤2 计算投影。

$$g_{w,k} := P_{\Omega_w}(f_{w,k} - \varphi(f_{w,k})) \quad (31)$$

$$\epsilon_{w,k} := f_{w,k} - g_{w,k} \quad (32)$$

$$\sigma_{w,k} := f_{w,k} \quad (33)$$

式中: $f_{w,k}$ 表示第 k 次迭代的流量 f_w ; $g_{w,k}$ 表示第 k 次迭代的投影 g_w ; $\epsilon_{w,k}$ 和 $\sigma_{w,k}$ 是第 k 次迭代的精度变量。

满足 $\sqrt{\sum_w (\epsilon_{w,k})^2 / \sum_w (\sigma_{w,k})^2} < \epsilon$ 时算法终止, 否则进入步骤3。

步骤3 更新步长。

$$\beta_k := \zeta^l \beta_{k-1} \quad (34)$$

$$f_{w,k+1} := P_{\Omega_w}(f_{w,k} - \beta_k \varphi(f_{w,k})) \quad (35)$$

$$\alpha_{w,k} := \beta_k \|\varphi(f_{w,k}) - \varphi(f_{w,k+1})\|^2 \quad (36)$$

$$\omega_{w,k} := (f_{w,k} - f_{w,k+1})^T (\varphi(f_{w,k}) - \varphi(f_{w,k+1})) \quad (37)$$

式中: ζ^l 是算法参数 ζ 的 l 次幂; β_k 是第 k 次迭代的步长; $\alpha_{w,k}$ 和 $\omega_{w,k}$ 是第 k 次迭代的精度变量。

若 $\sum_w \alpha_{w,k} / \sum_w \omega_{w,k} \leq 2 - \tau$, 则令 $k = k + 1$ 转到步骤2; 否则, 令 $l = l + 1$ 并重复步骤3。

该算法的收敛性证明详见 He 等^[22]的证明。下文将通过文献中常用的2个城市交通网络 Braess 网络和 Sioux-Falls 网络算例对上述模型和算法进行验证。

5 算例研究

采用2个城市交通网络算例验证弹性需求的

Logit 随机共乘用户均衡模型和自适应并行投影算法。算例中使用的广义出行费用函数的具体形式如式(38)所示,弹性需求函数如式(39)所示,模型和算法中相关参数的具体数值如表1所示。

$$\tilde{C}_{w,p,i} = \begin{cases} \rho_1 t_{w,p} + c_i \\ \rho_2 t_{w,p} + I_2 t_{w,p} - (B_{w,2} - M_2 \sum_p f_{w,p,2}) + \\ \quad c_i + \lambda_{w,p,2} \\ \rho_3 t_{w,p} + I_3 t_{w,p} - (B_{w,3} - M_3 \sum_p f_{w,p,3}) + \\ \quad c_i + 2\lambda_{w,p,3} \\ \rho_4 t_{w,p} + I_4 t_{w,p} + (B_{w,4} + M_4 \sum_p f_{w,p,4}) - \lambda_{w,p,2} \\ \rho_5 t_{w,p} + I_5 t_{w,p} + (B_{w,5} + M_5 \sum_p f_{w,p,5}) - \lambda_{w,p,3} \end{cases} \quad (38)$$

$$q_w = \bar{q}_w \exp(-\mu S_w) \quad (39)$$

式中: μ 为弹性需求参数。

表1 参数设置

Tab. 1 Parameter settings

符号	值
$\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5$	1.0, 0.8, 0.8, 0.4, 0.4
I_2, I_3, I_4, I_5	0.3, 0.4, 0.3, 0.4
M_2, M_3, M_4, M_5	5, 5, 1, 1
c_i	1
$B_{w,i}$	20
μ	0.05
θ	0.05

5.1 Braess网络

Braess网络出行需求的上界 $\bar{q}=6$,拓扑结构以及各条路段的出行时间函数如图2所示, $x_1 \sim x_5$ 和 $t_1 \sim t_5$ 分别表示Braess网络中各路段的流量和出行时间。对弹性需求参数和用户感知离散参数进行敏感性分析。

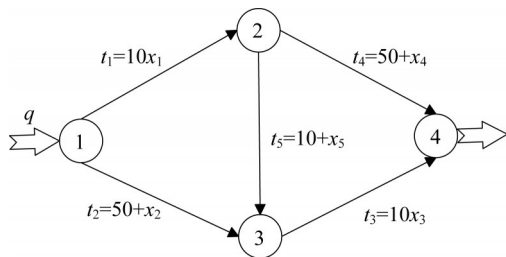


图2 Braess网络

Fig. 2 Braess network

弹性需求参数 μ 的敏感性分析如图3所示。结果表明,随着用户的出行需求对出行费用的敏感度

增加,出行需求和平均出行时间降低。这是因为用户对交通拥挤的厌恶驱使用户选择其他出行方式或放弃出行。研究表明,交通拥挤的大城市的用户对出行费用更为敏感^[24]。由于共乘出行在满足出行需求的同时减少了道路上的车流量,缓解了交通拥挤,因此在大城市中发展共乘出行更易得到共乘用户的支持。

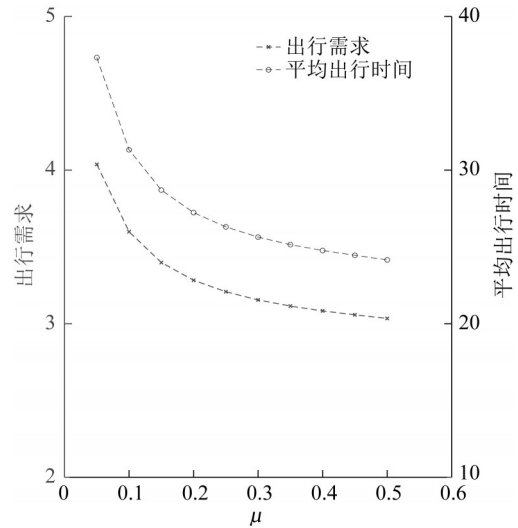


图3 弹性需求参数的敏感性分析

Fig. 3 Sensitivity analysis on elastic demand parameter

用户感知离散参数 θ 的敏感性分析如图4所示。结果表明,用户对出行费用的感知越精确,出行需求和平均出行时间就越小。因此,如果用户配备了导航或其他先进的出行信息系统,平均出行时间就会减少,交通拥堵就会得到明显缓解。由于网约车平台会为共乘出行提供出行信息和导航信息,因此共乘出行的普及将会有利于交通拥堵缓解。

5.2 Sioux-Falls网络

由于城市交通网络问题通常是一个大规模问题,计算交通流量的全局最优解往往需要消耗大量的计算资源和计算时间,因此采用一个大规模城市交通网络Sioux-Falls网络对算法的计算可行性进行验证。Sioux-Falls网络的拓扑结构如图5所示。该网络的路段出行时间函数以及出行需求的上界 \bar{q}_w 详见文献[6],其他参数设置与表1一致。用K短路算法^[23]为每个O-D对寻找10条最短路径作为路径集 P_w 。自适应并行投影算法用时1.24 h达到1%的精度,该网络路段流量的实验结果如表2所示。

表3显示了各类出行角色在Sioux-Falls网络中

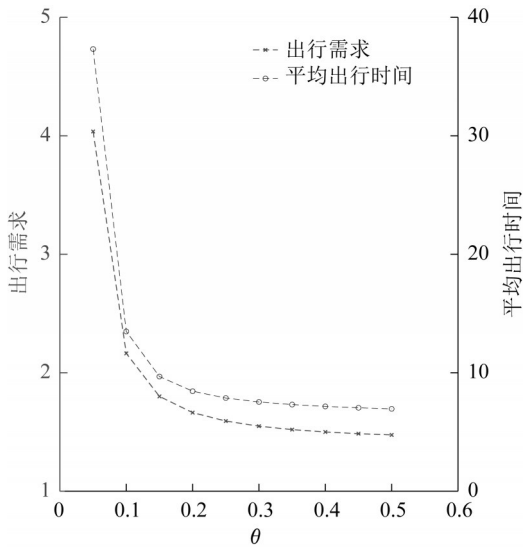


图 4 用户感知离散参数的敏感性分析

Fig. 4 Sensitivity analysis on user perception dispersion parameter

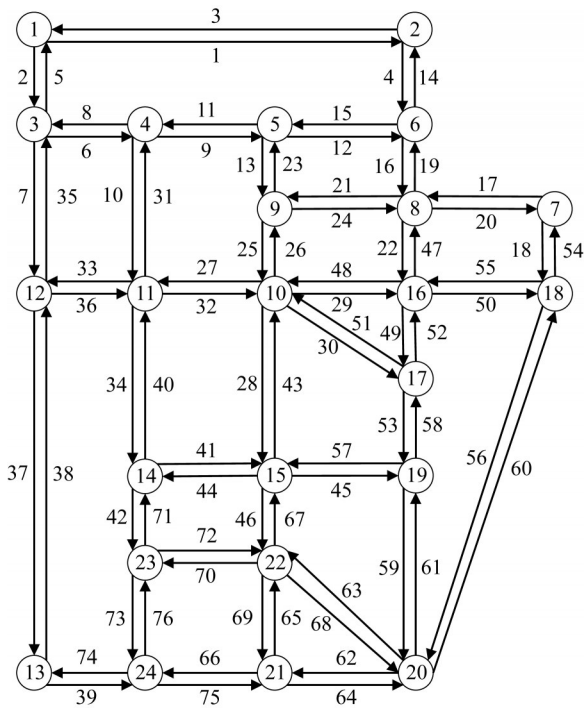


图 5 Sioux-Falls 网络

Fig. 5 Sioux-Falls network

的总流量,反映了在当前选取的参数下网络中大部分出行者仍然是单独出行的驾驶员。本算例中, Sioux-Falls 网络的共乘出行者与现实网络相比比例偏高,这是因为本算例仅为验证所提出的方法,所以采用的参数是随机的。在工程应用中可以获取具体城市交通网络关键参数的准确值从而得到精确的流量预测结果。

表 2 Sioux-Falls 网络的路段流量

Tab. 2 Link flow of Sioux-Falls network

路段	流量	路段	流量	路段	流量	路段	流量
1	6 654	21	8 434	41	10 955	61	12 030
2	10 023	22	10 662	42	10 255	62	9 716
3	6 630	23	17 023	43	22 322	63	11 091
4	7 241	24	8 375	44	10 919	64	9 698
5	10 079	25	23 311	45	20 992	65	13 062
6	16 759	26	23 339	46	20 906	66	10 636
7	14 016	27	18 718	47	10 705	67	20 944
8	16 827	28	22 195	48	12 778	68	11 058
9	19 439	29	12 778	49	14 565	69	13 087
10	10 061	30	9 548	50	24 179	70	10 940
11	19 488	31	10 076	51	9 558	71	10 293
12	10 536	32	18 638	52	14 549	72	10 922
13	16 920	33	10 152	53	13 386	73	11 708
14	7 259	34	10 940	54	18 208	74	10 313
15	10 559	35	14 158	55	24 322	75	10 636
16	12 365	36	10 135	56	21 238	76	11 722
17	15 087	37	13 117	57	21 036		
18	18 339	38	13 155	58	13 384		
19	12 305	39	10 299	59	12 081		
20	15 100	40	10 920	60	21 238		

表 3 Sioux-Falls 网络的出行角色流量

Tab. 3 Role flow of Sioux-Falls network

出行角色	流量
单独出行的驾驶员	224 613
共乘驾驶员 1	51 646
共乘驾驶员 2	33 508
共乘乘客 1	51 646
共乘乘客 2	67 015

6 结语

通过分析用户出行需求与出行费用的相互作用关系,建立了共乘交通网络,分析了共乘出行对城市交通网络的影响以及共乘出行的流量变化。通过共乘匹配约束描述了共乘交通流量之间的相互制约关系,基于 Logit 选择模型探究了用户对出行费用感知的随机性。通过弹性需求描述了出行费用对出行需求的影响,建立了弹性需求的 Logit 随机共乘用户均衡的变分不等式模型,并严格证明了该模型的解的等价性、存在性和唯一性。在此基础上,设计了自适应并行投影算法,降低了求解大规模交通分配问题的内存需求和计算时间,求解了所提出模型并得到了全局最优解。通过 2 个算例验证了所提出模型和算法的有效性,结合敏感性分析得出了影响出行需求和平均出行时间的因素,最后用大规模网络验证了算法的计算可行性。

作者贡献声明:

马 捷:方案设计,论文撰写,基金支持。

李锐:方案设计,论文修改,稿件校对。

王华:方案设计,论文修改,稿件校对。

参考文献:

- [1] 代宗,陈喜群,姜锐,等.曼哈顿网络中的网约车共乘系统的建模与优化[J].合肥工业大学学报(自然科学版),2020,43(8):1115.
DAI Zong, CHEN Xiqun, JIANG Rui, *et al.* Modeling and optimization of on-demand ride-sharing services in a Manhattan-like urban network [J]. Journal of Hefei University of Technology(Natural Science), 2020, 43(8): 1115.
- [2] FURUHATA M, DESSOUKY M, ORDÓÑEZ F, *et al.* Ridesharing: the state-of-the-art and future directions [J]. Transportation Research, Part B: Methodological, 2013, 57: 28.
- [3] CHAN N D, SHAHEEN S A. Ridesharing in North America: past, present, and future [J]. Transport Reviews, 2012, 32(1): 93.
- [4] 李骁驰,徐志刚,陈婷,等.考虑网络拥堵与系统公平的车载异构网络选择方法[J].交通运输工程学报,2019,19(3):178.
LI Xiaochi, XU Zhigang, CHEN Ting, *et al.* Heterogeneous vehicular network selection method considering network congestion and system fairness [J]. Journal of Traffic and Transportation Engineering, 2019, 19(3): 178.
- [5] XU H, PANG J S, ORDÓÑEZ F, *et al.* Complementarity models for traffic equilibrium with ridesharing [J]. Transportation Research, Part B: Methodological, 2015, 81: 161.
- [6] MA J, XU M, MENG Q, *et al.* Ridesharing user equilibrium problem under OD-based surge pricing strategy [J]. Transportation Research, Part B: Methodological, 2020, 134: 1.
- [7] MA J, WANG H, TANG T. Stochastic electric vehicle network with elastic demand and environmental costs [J]. Journal of Advanced Transportation, 2020, 2020: 4169826.
- [8] MENG Q, LAM W H K, YANG L. General stochastic user equilibrium traffic assignment problem with link capacity constraints[J]. Journal of Advanced Transportation, 2008, 42(4): 429.
- [9] 杨临涧,赵祥模,贺冰花,等.随机用户均衡交通分配问题的蚁群优化算法[J].交通运输工程学报,2018,18(3):189.
YANG Linjian, ZHAO Xiangmo, HE Binghua, *et al.* An ant colony optimization algorithm of stochastic user equilibrium traffic assignment problem [J]. Journal of Traffic and Transportation Engineering, 2018, 18(3): 189.
- [10] KITTHAMKESORN S, CHEN A, XU X. Elastic demand with weibit stochastic user equilibrium flows and application in a motorised and non-motorised network[J]. Transportmetrica A: Transport Science, 2015, 11(2): 158.
- [11] MAHER M. Stochastic user equilibrium assignment with elastic demand [J]. Traffic Engineering and Control, 2001, 42(5): 163.
- [12] MENG Q, LIU Z, WANG S. Asymmetric stochastic user equilibrium problem with elastic demand and link capacity constraints[J]. Transportmetrica A: Transport Science, 2014, 10(4): 304.
- [13] DI X, MA R, LIU H X, *et al.* A link-node reformulation of ridesharing user equilibrium with network design [J]. Transportation Research, Part B: Methodological, 2018, 112: 230.
- [14] CASCETTA E, NUZZOLO A, RUSSO F, *et al.* A modified Logit route choice model overcoming path overlapping problems: specification and some calibration results for interurban networks [C]//Transportation and Traffic Theory, Proceeding. Kidlington:Elsevier,1996: 697-711.
- [15] MAHER M. Algorithms for logit-based stochastic user equilibrium assignment [J]. Transportation Research, Part B: Methodological, 1998, 32B(8): 539.
- [16] YU Q, FANG D, DU W. Solving the logit-based stochastic user equilibrium problem with elastic demand based on the extended traffic network model [J]. European Journal of Operational Research, 2014, 239(1): 112.
- [17] BEN-AKIVA M, LERMAN S R. Discrete choice analysis: theory and application to travel demand [M]. Cambridge: The MIT Press, 2008.
- [18] DAGANZO C F. Unconstrained extremal formulation of some transportation equilibrium problems [J]. Transportation Science, 1982, 16(3): 332.
- [19] CANTARELLA G E, CARTENÌ A, DE LUCA S. Stochastic equilibrium assignment with variable demand: theoretical and implementation issues [J]. European Journal of Operational Research, 2015, 241(2): 330.
- [20] XU X, CHEN A. C-logit stochastic user equilibrium model with elastic demand [J]. Transportation Planning and Technology, 2013, 36(5): 463.
- [21] CHOU C, NG K, PANG J. Minimizing and stationary sequences of constrained optimization problems [J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 1998, 36(6): 1908.
- [22] HE B, HE X Z, LIU H X, *et al.* Self-adaptive projection method for co-coercive variational inequalities [J]. European Journal of Operational Research, 2009, 196(1): 43.
- [23] YEN J Y. Finding the K shortest loopless paths in a network [J]. Management Science, 1971, 17(11): 712.
- [24] OLUSINA J O, OLALEYE J B. Transaction-based intelligent transportation system (TBITS) using stochastic user utility model[J]. Transactions in GIS, 2013, 17(1): 109.