

路径直积图的意大利控制数

高红¹, 黄佳欢¹, 栗坤¹, 杨元生²

(1. 大连海事大学理学院, 辽宁大连 116026; 2. 大连理工大学计算机科学与技术学院, 辽宁大连 116024)

摘要: 研究了路径直积图 $P_n \times P_m$ 的意大利控制数。结合计算机构造证明和数学推导证明, 确定了 $P_n \times P_1$ 、 $P_n \times P_2$ 和 $P_n \times P_3$ 的意大利控制数, 并给出了 $P_n \times P_m$ ($m \geq 4$) 意大利控制数的界。

关键词: 意大利控制数; 直积; 路径

中图分类号: O157.5

文献标志码: A

Italian Domination Number of Direct Product of Paths

GAO Hong¹, HUANG Jiahuan¹, LI Kun¹, YANG Yuansheng²

(1. College of Science, Dalian Maritime University, Dalian 116026, China; 2. School of Computer Science and Technology, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: In this paper, the Italian domination number of direct product of paths $P_n \times P_m$ is studied. With the combination of computer construction proof and mathematical derivation proof, the exact values of the Italian domination number of $P_n \times P_1$, $P_n \times P_2$ and $P_n \times P_3$ are determined. For $P_n \times P_m$ ($m \geq 4$), a bound on the Italian domination number is presented.

Key words: Italian domination number; direct product; path

在图 $G=(V, E)$ 中, V 表示顶点的集合, E 表示边的集合。顶点 $v \in V$ 的开邻域是与 v 有边相连的顶点构成的集合, 即 $N(v)=\{u|u \text{ 是顶点且 } (uv) \in E\}$ 。 $N(v)$ 中包含的顶点的个数称为顶点 v 的度, 记为 $\deg(v)$ 。图 G 的最小度和最大度分别记为 δ 和 Δ 。图 G 顶点的个数称为图 G 的阶。 P_n 表示阶为 n 的路径图。

图的罗马控制起源于古罗马帝国的军事防御问题^[1]。古罗马帝国的每个城市最多能安置 2 支军队驻守。对于没有军队驻守的城市, 其相邻的城市中

必须至少有一个城市安置 2 支军队驻守, 以便在该城市受到侵犯时相邻的城市能派出 1 支军队来支援。在这种历史背景下产生了图的罗马控制, 定义为: 在图 $G=(V, E)$ 中, f 为从顶点集合 V 到数集 $\{0, 1, 2\}$ 的函数, 如果每一个函数值为 0 的顶点 v 都至少与一个函数值为 2 的顶点相邻, 则 f 为图 G 的罗马控制函数。 f 的权重 $w(f)=\sum_{v \in V} f(v)$ 。图 G 的所有罗马控制函数权重的最小值称为图 G 的罗马控制数, 记为 $\gamma_R(G)$ 。关于罗马控制的相关研究结果可以参考文献[2-5]。

意大利控制^[6]是罗马控制的一种变形, 也称为罗马 $\{2\}$ -控制^[7]或弱 $\{2\}$ -控制^[8], 定义为: 设图 $G=(V, E)$, 函数 $f: V \rightarrow \{0, 1, 2\}$, 如果每一个函数值为 0 的顶点 v 都至少与一个函数值为 2 的顶点相邻或者至少与 2 个函数值为 1 的顶点相邻, 那么 f 称为图 G 的意大利控制函数。 f 的权重 $w(f)=\sum_{v \in V} f(v)$, 权重的最小值称为图 G 的意大利控制数, 记为 $\gamma_I(G)$ 。若 f 满足 $w(f)=\gamma_I(G)$, 则称 f 为图 G 的 γ_I -函数。

意大利控制是图的控制理论中较为活跃的研究课题, 吸引了很多学者。文献[6]中研究了意大利控制数与罗马控制数、彩虹控制数、经典控制数的关系, 并证明了任意图的意大利控制数都小于等于其 2-彩虹控制数。文献[7]中研究了树图 T 的意大利控制数, 确定了分别满足 $\gamma(T)+1=\gamma_I(T)$ 和 $2\gamma(T)=\gamma_I(T)$ 的树图的特点, 其中 $\gamma(T)$ 是树图的控制数。文献[8]中给出了圈 C_n 与 C_5 的笛卡尔乘积 $C_n \square C_5$ 的意大利控制数下界, 并确定了 $C_n \square C_3$ 和 $C_n \square C_4$ 意大利控制数的精确值。文献[9]中确定了广义彼得森图 $P(n, 3)$ 意大利控制数的精确值。文献[10]中研究了有向圈乘积图的意大利控制数。文献[11]中研究了有根乘积图的意大利控制数。学者

收稿日期: 2021-05-21

基金项目: 国家自然科学基金(60271079)

第一作者: 高红(1976—), 女, 教授, 工学博士, 主要研究方向为图的控制理论、机器学习算法等。

E-mail: gaohong@dlnu.edu.cn



论文
拓展
介绍

他们还研究了与意大利控制相关的全局意大利控制^[12]、独立意大利控制^[13]、完美意大利控制^[14-16]、符号意大利控制^[17]、全意大利控制^[18]、外独立意大利控制^[19]、限制意大利控制^[20]、安全意大利控制^[21]等。

直积图,也称为克罗内克乘积图,是一种重要的图类,在实际中应用广泛,如在计算机通信网络、多处理器管理等领域。文献[22-23]中分别研究了直积图上的经典控制和完美控制。对于给定的2个图 G 和 H , 它们的直积图 $G \times H = (V, E)$, 其中顶点的集合为 $V(G \times H) = \{(u, v) | u \in V(G), v \in V(H)\}$, 边的集合为 $E(G \times H) = \{(u_1, v_1)(u_2, v_2) | u_1 u_2 \in E(G), v_1 v_2 \in E(H)\}$ 。

本研究中确定了 $P_n \times P_1, P_n \times P_2$ 和 $P_n \times P_3$ 意大利控制数的精确值,并给出了 $P_n \times P_m (m \geq 4)$ 意大利控制数的界。

以下是与本研究相关的定理:

定理 1^[7] 若图 G 为路径图 P_n , 则 $\gamma_1(G) = \lceil \frac{n+1}{2} \rceil$ 。

定理 2^[7] 若图 G 为连通图, 则 $\gamma_1(G) \geq \frac{2|V(G)|}{\Delta(G)+2}$ 。

1 $P_n \times P_1$ 和 $P_n \times P_2$ 意大利控制数

$P_n \times P_1$ 是 n 个孤立点, 因此可知 $P_n \times P_1$ 的意大利控制数为 n , 即:

定理 3 对于任意的正整数 $n \geq 1$, $\gamma_1(P_n \times P_1) = n$ 。

由于 $P_n \times P_2$ 与 2 条不相交的路径图 P_n 是同构的, 因此 $\gamma_1(P_n \times P_2) = 2\gamma_1(P_n)$ 。由定理 1, 可得以下定理:

定理 4 令 $G = P_n \times P_2$, 则

$$\gamma_1(G) = 2 \lceil \frac{n+1}{2} \rceil = \begin{cases} n+1, & n \equiv 1 \pmod{2} \\ n+2, & n \equiv 0 \pmod{2} \end{cases}$$

2 $P_n \times P_3$ 意大利控制数

2.1 $P_n \times P_m$ 意大利控制数的上界

通过构造路径直积图的意大利控制函数可以得

$$f(v_{i,j}) = \begin{cases} 2, & i=1, i=n-2, j \leq m-3, j \equiv 1 \pmod{3} \\ 1, & i \neq 1, i \neq n-2, j \leq m-3, j \equiv 1 \pmod{3} \text{ 或 } i \equiv 0 \pmod{2}, j=m-1, j=m-2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

到 $\gamma_1(P_n \times P_m) (m \geq 3)$ 的上界。

定理 5 对于任意的正整数 $m \geq 3, n \geq m, k \geq 2$, 有:

$$\gamma_1(P_n \times P_m) \leq \begin{cases} k(n+2), & m=3k \text{ 或 } m=3k-1 \text{ 且 } n \text{ 为偶数} \\ k(n+2)-1, & m=3k-1 \text{ 且 } n \text{ 为奇数} \\ k(n+2)-4, & m=3k-2 \end{cases}$$

证明: 设 $G = P_n \times P_m$ 的顶点集合为 $V = \{v_{i,j} | 0 \leq i \leq n-1, 0 \leq j \leq m-1\}$, 其中 i 是顶点的行标号, j 是顶点的列标号。

(1) 当 $m = 3k$ 时, 按照下式构造意大利控制函数 f :

$$f(v_{i,j}) = \begin{cases} 2, & i=1, i=n-2, j \equiv 1 \pmod{3} \\ 1, & i \neq 1, i \neq n-2, j \equiv 1 \pmod{3} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

图 1 显示了 $P_7 \times P_6$ 上的意大利控制函数 f , 其中 $R_n (R_m)$ 表示随着 $n(m)$ 的增长, 重复相应的 1 行 (3 列)。图 1 中, 空心圆圈表示 $f(v_{i,j}) = 0$ 的顶点, 黑色实心点表示 $f(v_{i,j}) = 1$ 的顶点, 较大的粗边空心圆圈表示 $f(v_{i,j}) = 2$ 的顶点。

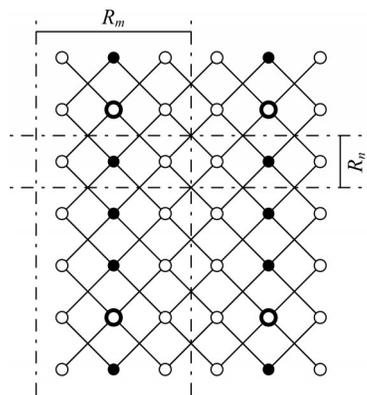


图 1 $P_7 \times P_6$ 上的意大利控制函数 f

Fig.1 Italian dominating function f on $P_7 \times P_6$

(2) 当 $m = 3k - 1$ 时, 分 2 种情况构造意大利控制函数 f 。

当 n 为偶数时,

$$f(v_{i,j}) = \begin{cases} 2, & i=1, i=n-2, j \equiv 1 \pmod{3} \\ 1, & i \neq 1, i \neq n-2, j \equiv 1 \pmod{3} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

当 n 为奇数时,

图 2 显示了 $P_6 \times P_5$ 和 $P_7 \times P_5$ 上的意大利控制函数 f , 其中 R_n (R_m) 表示随着 n (m) 的增长, 重复相应的 2 行 (3 列)。

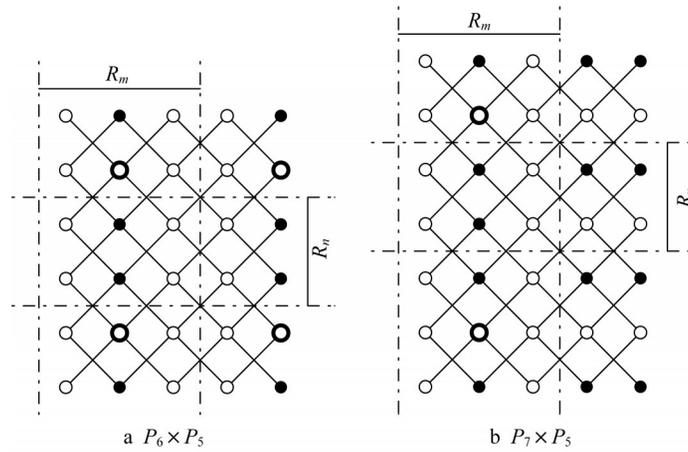


图 2 $P_6 \times P_5$ 和 $P_7 \times P_5$ 上的意大利控制函数 f
Fig.2 Italian dominating function f on $P_6 \times P_5$ and $P_7 \times P_5$

(3) 当 $m = 3k - 2$ 时, 分 3 种情况构造意大利控制函数 f 。

当 $n \equiv 0 \pmod{3}$ 时,

$$f(v_{i,j}) = \begin{cases} 2, & i = 1, i = n - 2, j \leq m - 5, j \equiv 1 \pmod{3} \text{ 或 } i \equiv 1 \pmod{3}, j = m - 2, j = m - 3 \\ 1, & i \neq 1, i \neq n - 2, j \leq m - 5, j \equiv 1 \pmod{3} \text{ 或 } i \equiv 1 \pmod{3}, j = m - 1, j = m - 4 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

当 $n \equiv 1 \pmod{3}$ 时,

$$f(v_{i,j}) = \begin{cases} 2, & i = 1, i = n - 2, j \leq m - 5, j \equiv 1 \pmod{3} \text{ 或 } i \leq n - 5, i \equiv 1 \pmod{3}, j = m - 2, j = m - 3 \text{ 或 } \\ & i = n - 2, i = n - 3, j = m - 2, j = m - 3 \\ 1, & i \neq 1, i \neq n - 2, j \leq m - 5, j \equiv 1 \pmod{3} \text{ 或 } i \leq n - 5, i \equiv 1 \pmod{3}, j = m - 1, j = m - 4 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

当 $n \equiv 2 \pmod{3}$ 时,

$$f(v_{i,j}) = \begin{cases} 2, & i = 1, i = n - 2, j \leq m - 5, j \equiv 1 \pmod{3} \text{ 或 } i \leq n - 9, i \equiv 1 \pmod{3}, j = m - 2, j = m - 3 \text{ 或 } \\ & i = n - 2, i = n - 3, j = m - 2, j = m - 3 \text{ 或 } i = n - 6, i = n - 7, j = m - 2, j = m - 3 \\ 1, & i \neq 1, i \neq n - 2, j \leq m - 5, j \equiv 1 \pmod{3} \text{ 或 } i \leq n - 9, i \equiv 1 \pmod{3}, j = m - 1, j = m - 4 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

图 3 显示了 $P_9 \times P_7$, $P_{10} \times P_7$ 和 $P_{14} \times P_7$ 上的意大利控制函数 f , 其中 R_n (R_m) 表示随着 n (m) 的增长, 重复相应的 3 行 (3 列)。

可以验证, 按照以上方式构造的 f 均为意大利控制函数。根据 f 的定义并结合图示, 可以计算得到 f 的权重, 如下所示:

$$w(f) = \begin{cases} \frac{m}{3}(n+2) = \frac{mn+2m}{3}, & m \equiv 0 \pmod{3} \\ \frac{m-4}{3}(n+2) + 6\frac{n}{3} = \frac{mn+2n+2m-8}{3}, & m \equiv 1 \pmod{3}, n \equiv 0 \pmod{3} \\ \frac{m-4}{3}(n+2) + 6\frac{n-4}{3} + 8 = \frac{mn+2n+2m-8}{3}, & m \equiv 1 \pmod{3}, n \equiv 1 \pmod{3} \\ \frac{m-4}{3}(n+2) + 6\frac{n-8}{3} + 16 = \frac{mn+2n+2m-8}{3}, & m \equiv 1 \pmod{3}, n \equiv 2 \pmod{3} \\ \frac{m+1}{3}(n+2) = \frac{mn+2m+n+2}{3}, & m \equiv 2 \pmod{3}, n \equiv 0 \pmod{2} \\ \frac{m-2}{3}(n+2) + 2\frac{n+1}{2} = \frac{mn+2m+n-1}{3}, & m \equiv 2 \pmod{3}, n \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$$

因此, 可得

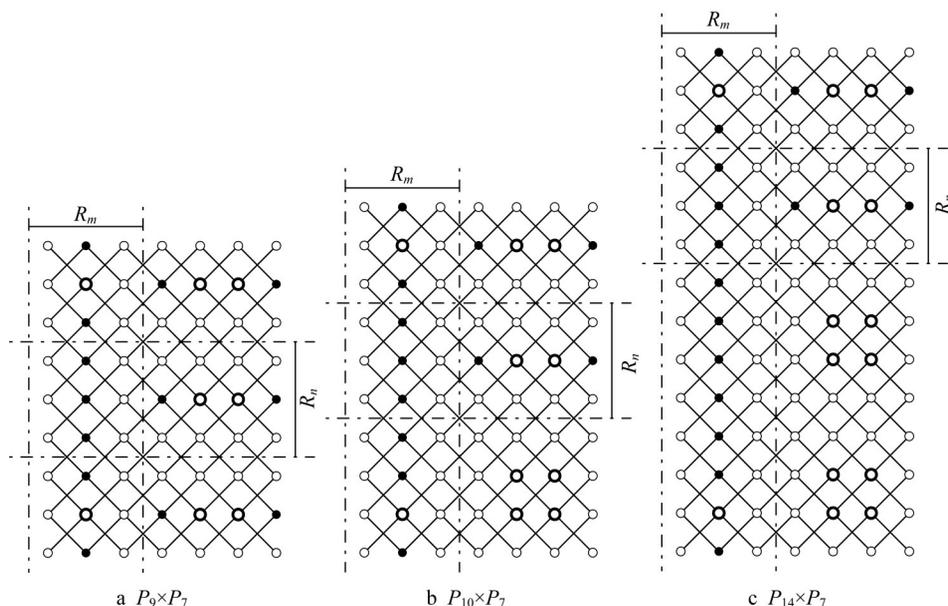


图3 $P_9 \times P_7$ 、 $P_{10} \times P_7$ 和 $P_{14} \times P_7$ 上的意大利控制函数 f
 Fig.3 Italian dominating function f on $P_9 \times P_7$, $P_{10} \times P_7$ and $P_{14} \times P_7$

$$\gamma_1(P_n \times P_m) \leq w(f) = \begin{cases} \frac{mn + 2m}{3}, m \equiv 0 \pmod{3} \\ \frac{mn + 2n + 2m - 8}{3}, m \equiv 1 \pmod{3} \\ \frac{mn + n + 2m + 2}{3} - \frac{1 - (-1)^n}{2}, m \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$$

即:

$$\gamma_1(P_n \times P_m) \leq \begin{cases} k(n+2), m=3k \text{ 或 } m=3k-1 \text{ 且 } n \text{ 为偶数} \\ k(n+2)-1, m=3k-1 \text{ 且 } n \text{ 为奇数} \\ k(n+2)-4, m=3k-2 \end{cases}$$

根据定理5,可以得到 $P_n \times P_3$ 意大利控制数的上界,即有以下的推论:

推论 1 对于任意的正整数 $n \geq 3$,

$$\gamma_1(P_n \times P_3) \leq n + 2.$$

2.2 $P_n \times P_3$ 意大利控制数的下界

本节中证明 $P_n \times P_3$ 意大利控制数的下界也是

$$f_{i-1} + f_{i+1} = \sum_{j=0}^2 f(v_{i-1,j}) + \sum_{j=0}^2 f(v_{i+1,j}) = (f(v_{i-1,0}) + f(v_{i-1,2}) + f(v_{i+1,0}) + f(v_{i+1,2})) + (f(v_{i-1,1}) + f(v_{i+1,1})) \geq 2 + 2 = 4$$

由 $f_{i-1} + f_{i+1} \geq 4$ 可知,若 $f_{i-1} = 0, 1, 2, 3$, 则 $f_{i+1} \geq 4, 3, 2, 1$; 若 $f_{i-1} \geq 4$, 则 $f_{i+1} \geq 0$. 因此, f_{i-1} 和 f_{i+1} 要么满足 $f_{i-1} = 2$ 且 $f_{i+1} \geq 2$, 要么满足 $f_{i-1} \geq 3$ 或 $f_{i+1} \geq 3$.

(2) 若 $f_0 = 0$, 则

$$f_1 = \sum_{j=0}^2 f(v_{1,j}) = (f(v_{1,0}) + f(v_{1,2})) +$$

$n + 2$. 令 $G = P_n \times P_3$, 顶点集 $V(G) = \{v_{i,j} | 0 \leq i \leq n-1, 0 \leq j \leq 2\}$, f 是 G 上的意大利控制函数, 记 $V^i = \{v_{i,j} | 0 \leq j \leq 2\} (0 \leq i \leq n-1)$, $f_i = f(V^i) = \sum_{v_{i,j} \in V^i} f(v_{i,j})$.

引理 1 在图 $P_n \times P_3$ 中, 若 f 为 $P_n \times P_3$ 的意大利控制函数, 则以下结论均成立:

- (1) 若 $f_i = 0 (1 \leq i \leq n-2)$, 则 $f_{i-1} + f_{i+1} \geq 4$.
- (2) 若 $f_0 = 0$, 则 $f_1 \geq 4$; 若 $f_0 = 1$, 则 $f_1 \geq 2$; 若 $f_0 = 2$, 则 $f_1 \geq 2$. 若 $f_{n-1} = 0$, 则 $f_{n-2} \geq 4$; 若 $f_{n-1} = 1$, 则 $f_{n-2} \geq 2$; 若 $f_{n-1} = 2$, 则 $f_{n-2} \geq 2$.
- (3) $f_0 + f_1 \geq 3$; 若 $f_0 = 1, f_1 \leq 3$, 则 $f_2 \geq 1$. $f_{n-1} + f_{n-2} \geq 3$; 若 $f_{n-1} = 1, f_{n-2} \leq 3$, 则 $f_{n-3} \geq 1$.
- (4) $f_0 + f_1 + f_2 \geq 4, f_{n-1} + f_{n-2} + f_{n-3} \geq 4$.
- (5) $f_{i-1} + f_i + f_{i+1} \geq 3 (2 \leq i \leq n-3)$.

证明: (1) 若 $f_i = 0 (1 \leq i \leq n-1)$, 有 $f(v_{i,0}) =$

$$f(v_{i,1}) = f(v_{i,2}) = 0, \text{ 则}$$

$$f(v_{1,1}) \geq 2 + 2 = 4$$

若 $f_0 = 1$, 则 $f(v_{0,0})$ 和 $f(v_{0,2})$ 中至少有一个等于 0, 所以 $f(v_{1,1}) = 2$, 即 $f_1 \geq 2$. 若 $f_0 = 2$, 则 $f(v_{0,0}), f(v_{0,1})$ 和 $f(v_{0,2})$ 中至少有一个等于 0, 所以有 $f(v_{1,1}) = 2$ 或者 $f(v_{1,0}) + f(v_{1,2}) \geq 2$, 即有 $f_1 \geq 2$.

同理可得, 若 $f_{n-1} = 0$, 则 $f_{n-2} \geq 4$; 若 $f_{n-1} = 1$,

则 $f_{n-2} \geq 2$; 若 $f_{n-1} = 2$, 则 $f_{n-2} \geq 2$ 。

(3) 当 $f_0 \geq 3$ 时, 显然有 $f_0 + f_1 \geq 3$ 。当 $f_0 < 3$ 时, 由本引理第 2 条结论, 即由 (2) 可知, $f_0 + f_1 \geq 3$, 并且由 (2) 的证明可知, 若 $f_0 = 1$, 则 $f(v_{1,1}) = 2$ 。若 $f_1 \leq 3$, 则 $f(v_{1,0})$ 和 $f(v_{1,2})$ 中至少有一个等于 0。由于 $f_0 = 1$, 根据意大利控制函数的定义, $f_2 \geq 1$ 。

同理可得, $f_{n-1} + f_{n-2} \geq 3$; 若 $f_{n-1} = 1, f_{n-2} \leq 3$, 则 $f_{n-3} \geq 1$ 。

(4) 根据本引理的 (2) 和 (3), 有 $f_0 + f_1 + f_2 \geq 4, f_{n-1} + f_{n-2} + f_{n-3} \geq 4$ 。

(5) 若 $f_i = 0$, 由本引理 (1) 可知, $f_{i-1} + f_{i+1} \geq 4$, 所以 $f_{i-1} + f_i + f_{i+1} \geq 3$ 。若 $f_i = 1$ 或 2, 则 $f(v_{i,0}), f(v_{i,1})$ 和 $f(v_{i,2})$ 中至少有一个为 0, 故 $f(v_{i-1,1}) + f(v_{i+1,1}) \geq 2$ 或 $f(v_{i-1,0}) + f(v_{i-1,2}) + f(v_{i+1,0}) + f(v_{i+1,2}) \geq 2$, 故 $f_{i-1} + f_i + f_{i+1} \geq 3$ 。

当 $n \equiv 0 \pmod{3}$ 时,

$$\omega(f) = \sum_{i=0}^{n-1} f_i = (f_0 + f_1 + f_2) + \sum_{i=4}^{n-5} (f_{i-1} + f_i + f_{i+1}) + (f_{n-3} + f_{n-2} + f_{n-1}) \geq 4 + \frac{3(n-6)}{3} + 4 = n + 2$$

当 $n \equiv 1 \pmod{3}$ 时,

$$\omega(f) = \sum_{i=0}^{n-1} f_i = (f_0 + f_1) + \sum_{i=3}^{n-4} (f_{i-1} + f_i + f_{i+1}) + (f_{n-2} + f_{n-1}) \geq 3 + \frac{3(n-4)}{3} + 3 = n + 2$$

当 $n \equiv 2 \pmod{3}$ 时,

$$\omega(f) = \sum_{i=0}^{n-1} f_i = (f_0 + f_1 + f_2) + \sum_{i=4}^{n-5} (f_{i-1} + f_i + f_{i+1}) + (f_{n-2} + f_{n-1}) \geq 4 + \frac{3(n-5)}{3} + 3 = n + 2$$

综上, $\gamma_1(P_n \times P_3) \geq n + 2$ 。

由推论 1 和定理 7, 可以得到以下定理:

定理 8 对于任意的正整数 $n \geq 4$, $\gamma_1(P_n \times P_3) = n + 2$ 。

定理 6 $\gamma_1(P_3 \times P_3) = 4$ 。

证明: 在图 $P_3 \times P_3$ 中构造意大利控制函数 $f: f(v_{1,0}) = f(v_{1,2}) = 1, f(v_{1,1}) = 2$, 其他顶点 $f(v_{i,j}) = 0$ 。 f 为意大利控制函数且 f 的权重 $\omega(f) = 4$, 所以 $\gamma_1(P_3 \times P_3) \leq 4$ 。 根据引理 1(4) 可知 $f_0 + f_1 + f_2 \geq 4$, 所以 $\gamma_1(P_3 \times P_3) = 4$ 。

定理 7 对于任意的正整数 $n \geq 4$, $\gamma_1(P_n \times P_3) \geq n + 2$ 。

证明: 在图 $G = P_n \times P_3$ 中, 顶点集合 $V(G) = \{v_{i,j} | 0 \leq i \leq n-1, 0 \leq j \leq 2\}$, $V^i = \{v_{i,j} | 0 \leq j \leq 2\}$ ($0 \leq i \leq n-1$), f 为 $P_n \times P_3$ 的 γ_1 -函数, $f_i = f(V^i) = \sum_{v_{i,j} \in V^i} f(v_{i,j})$ 。

由引理 1(3)、(4)、(5) 可知, $f_0 + f_1 \geq 3, f_{n-1} + f_{n-2} \geq 3, f_0 + f_1 + f_2 \geq 4, f_{n-1} + f_{n-2} + f_{n-3} \geq 4, f_{i-1} + f_i + f_{i+1} \geq 3 (2 \leq i \leq n-3)$ 。

$$\begin{cases} \frac{mn + 2m}{3}, m \equiv 0 \pmod{3} \\ \frac{mn + 2n + 2m - 8}{3}, m \equiv 1 \pmod{3} \\ \frac{mn + n + 2m + 2}{3} - \frac{1 - (-1)^n}{2}, m \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$$

3 $P_n \times P_m (m \geq 4)$ 意大利控制数的界

由于 $\Delta(P_n \times P_m) = 4$ 且 $|V(G)| = mn$, 因此根据定理 2 可以得到推论 2。

推论 2 若 $G = P_n \times P_m$, 则 $\gamma_1(G) \geq \frac{mn}{3}$ 。

由定理 5 和推论 2 可以得到定理 9。

定理 9 对于任意的正整数 $m \geq 4$ 且 $n \geq m$, 有:

$$\frac{mn}{3} \leq \gamma_1(P_n \times P_m) \leq$$

4 结语

研究了路径直积图 $P_n \times P_m$ 的意大利控制数, 确定了一些路径直积图的意大利控制数, $\gamma_1(P_n \times P_1) = n$; 当 $n \equiv 1 \pmod{2}$ 时, $\gamma_1(P_n \times P_2) = n + 1$; 当 $n \equiv 0 \pmod{2}$ 时, $\gamma_1(P_n \times P_2) = n + 2$; $\gamma_1(P_3 \times P_3) = 4$; $\gamma_1(P_n \times P_3) = n + 2 (n \geq 4)$ 。对于 $m, n \geq 4$, 利用可递推的方法构造了 $P_n \times P_m$ 的意大利控制函数, 从而给出了 $\gamma_1(P_n \times P_m)$ 的界。这种可递推的方法可以用于有任意多顶点的图类, 实现有限的方法解决无限的问题。

作者贡献声明:

高红:证明方法提出,算法总体设计,论文定稿。
 黄佳欢:论文写作,画图,程序编写。
 栗坤:论文初稿的写作,程序调试。
 杨元生:方法指导,程序设计指导。

参考文献:

- [1] COCKAYNE E J, DREYER P A, HEDETNIEMI S M. Roman domination in graphs [J]. *Discrete Mathematics*, 2004, 278: 11.
- [2] CAMPANELLI N, KUZIAK D. Total Roman domination in the lexicographic product of graphs [J]. *Discrete Applied Mathematics*, 2019, 263: 88.
- [3] BERMUDO S. On the differential and Roman domination number of a graph with minimum degree two [J]. *Discrete Applied Mathematics*, 2017, 232: 64.
- [4] AHANGAR H A, ASGHARSHARGHI L, SHEIKHOLESAMI S M, *et al.* Signed mixed Roman domination numbers in graphs [J]. *Journal of Combinatorial Optimization*, 2016, 32: 299.
- [5] ZHU Enqiang, SHAO Zehui. Extremal problems on weak Roman domination number [J]. *Information Processing Letters*, 2018, 138: 12.
- [6] HENNING M A, KLOSTERMEYER W F. Italian domination in trees [J]. *Discrete Applied Mathematics*, 2017, 217: 557.
- [7] CHELLALI M, HAYNES T W, HEDETNIEMI S T, *et al.* Roman $\{2\}$ -domination [J]. *Discrete Applied Mathematics*, 2016, 204: 22.
- [8] LI Zepeng, SHAO Zehui, XU Jin. Weak $\{2\}$ -domination number of Cartesian products of cycles [J]. *Journal of Combinatorial Optimization*, 2018, 35: 75.
- [9] GAO Hong, XI Changqing, LI Kun, *et al.* The Italian domination numbers of generalized Petersen graphs $P(n, 3)$ [J]. *Mathematics*, 2019, 7: 714.
- [10] KIM K. The Italian domination numbers of some products of directed cycles [J]. *Mathematics*, 2020, 8: 1472.
- [11] HERNANDEZ-ORTIZ R, MONTEJANO L P, RODRIGUEZ-VELAZQUEZ J A. Italian domination in rooted product graphs [J]. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 2021, 44: 497.
- [12] HAO Guoliang, HU Kangxiu, WEI Shouliu, *et al.* Global Italian domination in graphs [J]. *Quaestiones Mathematicae*, 2019, 42(8): 1101.
- [13] RAHMOUNI A, CHELLALI M. Independent Roman $\{2\}$ -domination in graphs [J]. *Discrete Applied Mathematics*, 2018, 236: 408.
- [14] HAYNES T W, HENNING M A. Perfect Italian domination in trees [J]. *Discrete Applied Mathematics*, 2019, 260: 164.
- [15] BANERJEE S, HENNING M A, PRADHAN D. Perfect Italian domination in cographs [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2021, 319: 125703.
- [16] LAURI J, MITILLOS C. Perfect Italian domination on planar and regular graphs [J]. *Discrete Applied Mathematics*, 2020, 285: 676.
- [17] KARAMZADEH A, MAIMANI H R, ZAEEMBASHI A. Further results on the signed Italian domination [J]. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 2021, 66: 823.
- [18] GARCÍA S C, MARTINEZ A C, HERNÁNDEZ MIRA F A, *et al.* Total Roman $\{2\}$ -domination in graphs [J]. *Quaestiones Mathematicae*, 2019, 44: 411.
- [19] FAN Wenjie, YE Ansheng, MIAO Fang, *et al.* Outer-independent Italian domination in graphs [J]. *IEEE Access*, 2019, 7: 22756.
- [20] SAMADI B, ALISHAHI M, MASOUMI I, *et al.* Restrained Italian domination in graphs [J]. *Rairo-Operations Research*, 2021, 55: 319.
- [21] DETTLAFF M, LEMANSKA M, RODRIGUEZ-VELAZQUEZ J A. Secure Italian domination in graphs [J]. *Journal of Combinatorial Optimization*, 2021, 41: 56.
- [22] SITTHIWIRATTHAM T. Domination on Kronecker product of P_n [J]. *Applied Mathematics Sciences*, 2012, 6: 4345.
- [23] JHA P K. Perfect r -domination in the Kronecker product of two cycles, with an application to diagonal/toroidal mesh [J]. *Information Processing Letters*, 2003, 87: 163.