

基于 C^1 型 Bell 三角形单元的挠曲电效应分析

庄晓莹, 李 彬

(同济大学 土木工程学院, 上海 200092)

摘要: 采用 C^1 连续性 Bell 三角形单元, 进行了挠曲电效应的机理研究, 求解了厚壁筒的平面应变边值问题, 并利用挠曲电结构的非对称性产生压电效应。通过算例分析, 验证了 Bell 单元的准确性和收敛性, 研究了梯度弹性理论中内禀尺度对挠曲电结构变形的影响, 分析了挠曲电的尺寸效应。该工作为挠曲电效应分析和结构设计提供了基础和依据。

关键词: C^1 型有限元; 挠曲电; 梯度弹性理论; 尺寸效应
中图分类号: O343.1 **文献标志码:** A

Analysis of Flexoelectricity Based on C^1 Bell Triangular Element

ZHUANG Xiaoying, LI Bin

(College of Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: The C^1 continuous Bell triangular element is adopted in this paper to investigate the mechanism of flexoelectricity. The plane strain boundary value problem of a cylindrical tube is solved, and the asymmetry of flexoelectric structure is used for creating piezoelectricity without using piezoelectric materials. In the numerical examples, the accuracy and convergence of the Bell element are verified, the influence of the intrinsic length on the response of the flexoelectric structure in gradient elasticity theory is then studied, and the size effect of flexoelectricity is also analyzed. This paper can provide a basis for the analysis of flexoelectricity and the design of flexoelectric structures.

Key words: C^1 finite element; flexoelectricity; gradient elasticity theory; size effect

人工和天然材料。自然界的很多生物功能都是力电耦合的, 如听觉感知、与动作有关的神元突起等。这些现象激发了对此相关机理的研究, 并开发可以模仿它们的新材料。在所有力电耦合效应中, 研究最多的就是压电效应, 它是应变和极化之间的力电耦合效应。

$$p_i = e_{ijk} \epsilon_{jk} \quad (1)$$

式中: p_i 是电极化; e_{ijk} 为三阶压电系数; ϵ_{jk} 为应变。压电效应是由晶体内原子的相对位移引起的, 只存在于非中心对称晶体中。

不同于压电效应的应变与极化的耦合, 挠曲电效应是应变梯度与极化或者应变与极化梯度的耦合。

$$p_i = f_{ijkl} \eta_{jkl} \quad (2)$$

式中: f_{ijkl} 为四阶挠曲电系数; η_{jkl} 为高阶应变。挠曲电效应产生的原因是晶体材料局部对称性的变化。传统宏观尺度上应变梯度较小, 挠曲电效应可以忽略不计, 但在微纳尺度上结构可以产生很大的应变梯度, 使得挠曲电效应在纳米尺度上和压电效应相当。挠曲电效应存在于所有晶体类型中, 并在超过居里温度时仍然出现。相比压电效应, 挠曲电效应更为普遍, 而且它还能产生压电不具备的其他力电功能, 关于挠曲电效应理论及相关应用可见以下文献综述^[1-7]。

固体材料结构随着特征尺度的减小表现出明显的尺度效应, 但经典连续介质力学本构关系中不包含任何尺度参量, 无法描述微构件力学性能的尺寸效应, 因此需要引入长度标度, 如梯度弹性理论。Mindlin 在 1965 年提出了一个梯度弹性理论^[8], 该理论中, 应变能密度被认为是应变和一阶、二阶应变梯度的函数, 从而应力 σ 、应变 ϵ 的本构关系可以写成^[9]:

力电耦合效应广泛存在与各种材料之中, 包括

收稿日期: 2022-06-18

基金项目: 国家自然科学基金(11772234)

第一作者: 庄晓莹(1983—), 女, 教授, 博士生导师, 工学博士, 主要研究方向为计算力学、岩石力学等。

E-mail: xiaoyingzhuang@tongji.edu.cn

通信作者: 李彬(1989—), 男, 博士生, 主要研究方向为挠曲电材料多尺度计算及设计。

E-mail: marioli@tongji.edu.cn



论文
拓展
介绍

$$\sigma = \lambda(I - c_1 \nabla^2 - c_2 \nabla \otimes \nabla) \text{tr} \epsilon + 2G(1 - c_3 \nabla^2) \epsilon \quad (3)$$

式中: c_1, c_2, c_3 是三个具有长度平方量纲的独立梯度参数; λ 和 G 为 Lamé 常数; I 为单位张量; ∇ 为微分算子; ∇^2 为拉普拉斯算子; tr 为迹运算; \otimes 为张量积运算。当 $c_2 = 0, c_1 = c_3 = l^2$ 时, 式(3)就是在挠曲电效应分析中常见的拉普拉斯型梯度弹性本构方程:

$$\sigma = \lambda(\text{tr} \epsilon) I + 2G\epsilon - l^2 \nabla^2 [2G\epsilon + \lambda(\text{tr} \epsilon) I] \quad (4)$$

式中: l 即为材料单参数的内禀尺度。由于挠曲电效应中涉及应变梯度, 要求插值函数至少 C^1 连续, 传统的有限元方法采用拉格朗日插值往往仅具备 C^0 连续。常见的应用于挠曲电效应分析的方法有混合有限元方法^[10-11]、无网格方法^[12-13]、等几何方法^[14-15]。混合有限元方法中, 位移和位移导数是相互独立的变量, 它们的运动学关系需要额外的自由度施加约束, 从而使得格式较为复杂。对于无网格方法和等几何方法, 它们不是插值类型的单元, 因此不容易处理复杂的边界条件, 在商用软件中也不容易扩展。 C^1 型有限单元开始用于平板的受弯分析, 相关学者开发了一系列的 C^1 型有限单元^[16], 其中 Argyris 三角形单元也用于挠曲电效应的分析^[17], 但对于 C^1 型有限单元在挠曲电效应分析的研究还很少。

本文主要研究 Bell 三角形单元, 它是由 Argyris 单元简化而来, 其节点自由度包含位移及全部的一阶和二阶导数, Bell 单元已经被用于许多梯度弹性问题的求解^[18-20]。基于梯度弹性理论, 给出了 Bell 单元分析挠曲电效应的一般格式, 并通过数值算例验证了 Bell 单元的准确性和收敛性, 分析了内禀尺度对结构变形的影响。此外, 利用挠曲电结构的非对称性设计压电结构, 阐述了相关原理, 并说明了挠曲电的尺寸效应。

1 挠曲电效应

不考虑压电效应, 对于各向同性挠曲电材料, 电焓密度 H ^[10] 可以表示为

$$H = \frac{1}{2} \lambda \epsilon_{jj} \epsilon_{kk} + G \epsilon_{jk} \epsilon_{jk} + \frac{1}{2} l^2 (\lambda \epsilon_{jj,i} \epsilon_{kk,i} + 2G \epsilon_{jk,i} \epsilon_{jk,i}) - f_1 \epsilon_{jj,i} E_i - 2f_2 \epsilon_{ij,i} E_j - \frac{1}{2} \kappa E_i E_i \quad (5)$$

式中: ϵ_{ij} 为应变, 定义为 $\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$, 其中 u 为位移; E_i 为电场强度, 定义为 $E_i = -\phi_{,i}$, 其中 ϕ 为电

势; f_1 和 f_2 为挠曲电材料两个相互独立的系数; κ 为介电系数; l 为材料内禀长度, 它在梯度弹性理论(式(4))中引入。

本构方程可表示为

$$\sigma_{jk} = \frac{\partial H}{\partial \epsilon_{jk}} = \lambda \epsilon_{ii} \delta_{jk} + 2G \epsilon_{jk} \quad (6)$$

$$\tau_{ijk} = \frac{\partial H}{\partial \eta_{ijk}} = \frac{\partial H}{\partial \epsilon_{jk,i}} = l^2 (\lambda \epsilon_{mm,i} \delta_{jk} + 2G \epsilon_{jk,i}) - f_1 E_i \delta_{jk} - 2f_2 E_j \delta_{ik} \quad (7)$$

$$D_i = \frac{\partial H}{\partial (-E_i)} = \kappa E_i + f_1 \epsilon_{mm,i} + 2f_2 \epsilon_{ji,j} \quad (8)$$

式中: σ_{jk} 为应力; τ_{ijk} 为高阶应力; D_i 为电位移; η_{ijk} 为高阶应变, 定义为 $\eta_{ijk} = \epsilon_{jk,i}$

平衡方程可推得:

$$\sigma_{jk,j} - \tau_{ijk,ij} + b_k = 0 \quad (9)$$

$$D_{i,i} - \rho = 0 \quad (10)$$

式中: b_k 为体积力; ρ 为体自由电荷。

2 C^1 型三角形单元

Argyris 三角形单元(图1)和 Bell 三角形单元(图2)是两种重要的 C^1 型三角形单元。对于 Argyris 单元, 单元自由度包括节点位移 w 及其一阶、二阶导数, 以及三边中点法向导数。位移插值为五次函数, 边界上的法向导数插值为四次函数。然而, 边中节点法向导数自由度会显著增大单元刚度矩阵的带宽, 这三个自由度可通过角节点的位移导数消去, 即为 Bell 单元。对于 Bell 单元, 位移的插值依然是五次函数, 而边界上的法向导数插值变为三次函数。挠曲电效应是四阶偏微分方程问题, 故 Argyris 和 Bell 单元均满足完备性和协调性要求, 当划分单元足够小, 有限元解趋近于精确解。

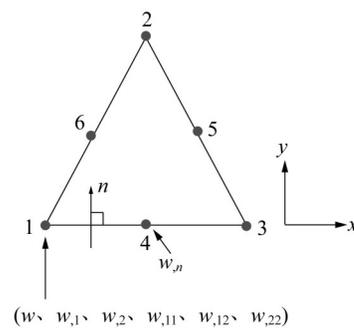


图1 Argyris 三角形单元
Fig. 1 Argyris triangle element

Bell 三角形单元是基于插值函数的协调单元, 便于建模和施加复杂的边界条件, 也很容易在商用

软件中扩展。对于挠曲电效应分析, Bell 单元每个节点有 18 个自由度, 分别是位移、电势以及它们的一阶、二阶导数。

挠曲电效应弱形式可表达为

$$\int_V (\boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{\tau} : \delta \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{D} \cdot \delta \boldsymbol{E}) dV = \int_V \boldsymbol{b} \cdot \delta \boldsymbol{u} dV + \int_{\Gamma_f} \boldsymbol{t} \cdot \delta \boldsymbol{u} d\Gamma - \int_V \boldsymbol{\rho} \delta \phi dV - \int_{\Gamma_D} \omega \delta \phi d\Gamma \quad (11)$$

式中: \boldsymbol{b} 、 \boldsymbol{t} 、 $\boldsymbol{\rho}$ 和 ω 分别为体积力、面积力、体自由电荷和表面电荷密度。

离散后, 单元内部的位移场和电势场可表示为

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{N}_u \boldsymbol{v}_e \quad (12a)$$

$$\phi = \boldsymbol{N}_\phi \boldsymbol{\varphi}_e \quad (12b)$$

$$\boldsymbol{N}_u = \begin{bmatrix} N_1 \cdots N_6 & 0 & N_7 \cdots N_{12} & 0 \\ 0 & N_1 \cdots N_6 & 0 & N_7 \cdots N_{12} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{N}_\phi = [N_1 \cdots N_6 \quad N_7 \cdots N_{12} \quad N_{13} \cdots N_{18}] \quad (14)$$

式中: $N_1 \sim N_{18}$ 取值为

$$N_1 = L_1^5 + 5L_1^4 L_2 + 5L_1^4 L_3 + 10L_1^3 L_2^2 + 10L_1^3 L_3^2 + 20L_1^3 L_2 L_3 + 30r_{21} L_1^2 L_2 L_3^2 + 30r_{31} L_1^2 L_2^2 L_3 \quad (15)$$

$$N_2 = c_3 L_1^4 L_2 - c_2 L_1^4 L_3 + 4c_3 L_1^3 L_2^2 - 4c_2 L_1^3 L_3^2 + 4(c_3 - c_2) L_1^3 L_2 L_3 - (3c_1 + 15r_{21} c_2) L_1^2 L_2 L_3^2 + (3c_1 + 15r_{31} c_3) L_1^2 L_2^2 L_3 \quad (16)$$

$$N_3 = -b_3 L_1^4 L_2 + b_2 L_1^4 L_3 - 4b_3 L_1^3 L_2^2 + 4b_2 L_1^3 L_3^2 + 4(b_2 - b_3) L_1^3 L_2 L_3 + (3b_1 + 15r_{21} b_2) L_1^2 L_2 L_3^2 - (3b_1 + 15r_{31} b_3) L_1^2 L_2^2 L_3 \quad (17)$$

$$N_4 = \frac{1}{2} c_3^2 L_1^3 L_2^2 + \frac{1}{2} c_2^2 L_1^3 L_3^2 - c_2 c_3 L_1^3 L_2 L_3 + (c_1 c_2 + \frac{5}{2} r_{21} c_2^2) L_1^2 L_2 L_3^2 + (c_1 c_3 + \frac{5}{2} r_{31} c_3^2) L_1^2 L_2^2 L_3 \quad (18)$$

$$N_5 = -b_3 c_3 L_1^3 L_2^2 - b_2 c_2 L_1^3 L_3^2 + (b_2 c_3 + b_3 c_2) L_1^3 L_2 L_3 - (b_1 c_2 + b_2 c_1 + 5r_{21} b_2 c_2) L_1^2 L_2 L_3^2 - (b_1 c_3 + b_3 c_1 + 5r_{31} b_3 c_3) L_1^2 L_2^2 L_3 \quad (19)$$

$$N_6 = \frac{1}{2} b_3^2 L_1^3 L_2^2 + \frac{1}{2} b_2^2 L_1^3 L_3^2 - b_2 b_3 L_1^3 L_2 L_3 + (b_1 b_2 + \frac{5}{2} r_{21} b_2^2) L_1^2 L_2 L_3^2 + (b_1 b_3 + \frac{5}{2} r_{31} b_3^2) L_1^2 L_2^2 L_3 \quad (20)$$

式中: L_1 、 L_2 、 L_3 为面积坐标; b_i 、 c_i 、 r_{ij} 定义为

$$b_i = y_j - y_k \quad (21)$$

$$c_i = x_k - x_j \quad (22)$$

$$r_{ij} = \frac{b_i b_j + c_i c_j}{b_i^2 + c_i^2} \quad (23)$$

式中: x_j 和 y_j 为坐标值; i 、 j 、 k 的取值采用指标轮换, 即 $1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 1$ 。 $N_7 \sim N_{18}$ 的取值也采用同样的指标轮换。

应变 $\boldsymbol{\epsilon}$ 、高阶应变 $\boldsymbol{\eta}$ 及电场 \boldsymbol{E} 的取值为 $\boldsymbol{\epsilon} = (\epsilon_{11} \quad \epsilon_{22} \quad 2\epsilon_{12})^T$, $\boldsymbol{\eta} = (\eta_{111} \quad \eta_{122} \quad 2\eta_{112} \quad \eta_{211} \quad \eta_{222} \quad 2\eta_{212})^T$, $\boldsymbol{E} =$

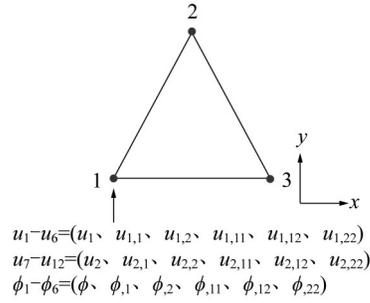


图 2 Bell 三角形单元

Fig. 2 Bell triangle element

式(12)中: \boldsymbol{v}_e 和 $\boldsymbol{\varphi}_e$ 分别为单元节点位移和电势; \boldsymbol{N}_u 和 \boldsymbol{N}_ϕ 分别为单元位移和电势形函数, 定义为

$$\begin{bmatrix} N_{13} \cdots N_{18} & 0 \\ 0 & N_{13} \cdots N_{18} \end{bmatrix} \quad (13)$$

($\boldsymbol{E}_1 \boldsymbol{E}_2$)^T, 可计算为

$$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{B}_u \boldsymbol{v}_e \quad (24a)$$

$$\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{H}_u \boldsymbol{v}_e \quad (24b)$$

$$-\boldsymbol{E} = \boldsymbol{B}_\phi \boldsymbol{\varphi}_e \quad (24c)$$

式中: \boldsymbol{B}_u 、 \boldsymbol{H}_u 和 \boldsymbol{B}_ϕ 分别为位移形函数的梯度矩阵、海森矩阵和电势形函数的梯度矩阵。

将式(12)和(24)代入弱形式方程(11), 可得如下单元节点平衡方程:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{uu} & \boldsymbol{K}_{u\phi} \\ \boldsymbol{K}_{\phi u} & \boldsymbol{K}_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{v} \\ \boldsymbol{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{F}_v \\ \boldsymbol{F}_\phi \end{bmatrix} \quad (25)$$

式中: \boldsymbol{v} 和 $\boldsymbol{\varphi}$ 分别为结构整体位移和电势; 结构整体耦合刚度矩阵和节点载荷矩阵表达为

$$\boldsymbol{K}_{uu} = \sum_e \int_v (\boldsymbol{B}_u^T \boldsymbol{C} \boldsymbol{B}_u + l^2 \boldsymbol{H}_u^T \boldsymbol{Q} \boldsymbol{H}_u) dv \quad (26)$$

$$\boldsymbol{K}_{u\phi} = \sum_e \int_v (\boldsymbol{H}_u^T \boldsymbol{f}^T \boldsymbol{B}_\phi) dv \quad (27)$$

$$\boldsymbol{K}_{\phi u} = \sum_e \int_v (\boldsymbol{B}_\phi^T \boldsymbol{f} \boldsymbol{H}_u) dv \quad (28)$$

$$\boldsymbol{K}_{\phi\phi} = \sum_e \int_v (-\boldsymbol{B}_\phi^T \boldsymbol{\kappa} \boldsymbol{B}_\phi) dv \quad (29)$$

$$\boldsymbol{F}_v = \sum_e \int_v (\boldsymbol{N}_u^T \boldsymbol{b}) dv + \sum_e \int_{\Gamma_f} (\boldsymbol{N}_u^T \boldsymbol{t}) d\Gamma \quad (30)$$

$$\boldsymbol{F}_\phi = -\sum_e \int_v (\boldsymbol{N}_\phi^T \boldsymbol{\rho}) dv - \sum_e \int_{\Gamma_D} (\boldsymbol{N}_\phi^T \boldsymbol{\omega}) d\Gamma \quad (31)$$

式中: 材料参数 \boldsymbol{C} 、 \boldsymbol{Q} 、 \boldsymbol{f} 、 $\boldsymbol{\kappa}$ 所对应的矩阵为

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} \lambda + 2G & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$\boldsymbol{Q} = l^2 \begin{bmatrix} \boldsymbol{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{C} \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$f = \begin{bmatrix} f_1 + 2f_2 & f_1 & 0 & 0 & 0 & f_2 \\ 0 & 0 & f_2 & f_1 & f_1 + 2f_2 & 0 \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$\kappa = \begin{bmatrix} \kappa & 0 \\ 0 & \kappa \end{bmatrix} \quad (35)$$

3 算例

Bell 三角形单元通过 Abaqus 用户单元子程序 UEL 实现,采用 TECPLOT 进行结果的后处理。本文首先通过厚壁筒内外表面受压下变形的数值解与理论值的对比,验证 Bell 单元的准确性,讨论内禀尺度对结果的影响。然后,利用挠曲电结构的非对称性设计产生压电效应,并研究挠曲电的尺寸效应。

3.1 厚壁筒平面应变问题

图3为一厚壁筒,它的内径 r_0 为 $10 \mu\text{m}$,外径 r_1 为 $20 \mu\text{m}$,其受到内外表面电势差 1.0 V 作用。此外,内外径施加指定的位移载荷,内径位移 u_{r_0} 为 $0.045 \mu\text{m}$,外径位移 u_{r_1} 为 $0.05 \mu\text{m}$,挠曲电材料参数取值参照文献[10],见表1。

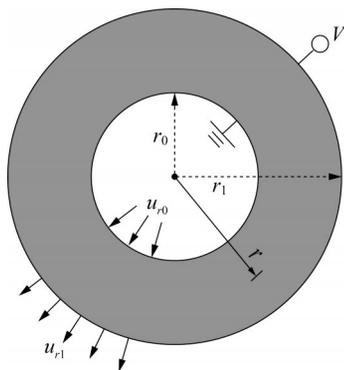


图3 厚壁筒模型

Fig. 3 Model of cylinder

表1 挠曲电材料参数

Tab. 1 Material properties of flexoelectricity

| λ / GPa | G / GPa | $l / \mu\text{m}$ | $f_1 / (\mu\text{C} \cdot \text{m}^{-1})$ | $f_2 / (\mu\text{C} \cdot \text{m}^{-1})$ | $\kappa / (\text{nC} \cdot \text{V}^{-1} \cdot \text{m}^{-1})$ |
|------------------------|------------------|-------------------|---|---|--|
| 53.4615 | 80.1923 | 2 | 1.0 | 1.0 | 1.0 |

不考虑体自由电荷,将本构方程(6)–(8)代入平衡方程(9)、(10),可得:

$$\phi_{,ii} - \frac{f}{\kappa} \nabla^2 u_{i,i} = 0 \quad (36)$$

$$(\lambda + G)(1 - l_0^2 \nabla^2) u_{i,ik} + G(1 - l^2 \nabla^2) u_{k,ii} = 0 \quad (37)$$

将方程(37)用极坐标系表示为

$$(1 - l_0^2 \nabla^2 + \frac{l_0^2}{r^2})(\nabla^2 u(r) - \frac{u(r)}{r^2}) = 0 \quad (38)$$

其中:

$$f = f_1 + 2f_2 \quad (39)$$

$$l_0^2 = l^2 - \frac{f^2}{(\lambda + G)\kappa} \quad (40)$$

由于厚壁筒结构的对称性,位移和电势只与半径有关,方程(38)的解可表示为^[10-11]

$$u(r) = C_1 r + C_2 \frac{1}{r} + C_3 I_1\left(\frac{r}{l_0}\right) + C_4 K_1\left(\frac{r}{l_0}\right) \quad (41)$$

从而,电势的解可表示为

$$\phi(r) = C_5 \ln(r) + C_6 + \frac{f}{\kappa} \left(\frac{du(r)}{dr} + \frac{u(r)}{r} \right) \quad (42)$$

其中: I_1 和 K_1 为一阶修正的第一类和第二类贝塞尔(Bessel)函数,方程(41)和(42)有 $C_1 \sim C_6$ 共6个未知数,可以通过如下6个边界条件求得:

$$u_r|_{r=r_0} = u_{r_0}, \quad u_r|_{r=r_1} = u_{r_1} \quad (43)$$

$$\phi_r|_{r=r_0} = 0, \quad \phi_r|_{r=r_1} = 1 \text{ V} \quad (44)$$

$$\tau_{rr}|_{r=r_0} = \tau_{rr}|_{r=r_1} = 0 \quad (45)$$

厚壁筒的切向位移和电势均为零,沿筒壁厚度方向径向位移的理论解以及不同网格密度的数值解见图4。对于比较稀疏的网格(环向48个单元,径向5个单元),数值解也与理论解吻合得很好。呈环状的位移云图也反映了位移仅与半径有关。图5为不同网格密度下,径向位移数值解与理论解误差绝对值的对数坐标图(两端点由于施加位移约束,误差过小,因此略去)。总体来讲,随着网格密度的增加,数值解与理论解的误差减少。当网格比较稀疏,误差在对数坐标下的曲线呈现比较明显的振荡。径向网格数量为20和40的误差曲线大致重合。图6为筒壁厚度方向电势的理论解和数值解对比,稀疏网格会造成数值解与理论值略有偏差,当径向网格数量为20时,数值解与理论值位移曲线几乎重合。图7为不同网格密度下,径向电势数值解与理论解误差绝对值的对数坐标图(端点值略去)。随着网格的加密,误差同样减少,当径向网格数量加密到20时,误差曲线已较为光滑,数值解收敛。从图5和图7中可以看出,此时径向位移和电势数值解与理论解的误差绝对值分别小于 $10^{-5} \mu\text{m}$ 和 10^{-2} V 。位移和电势的数值解与理论值对比说明了Bell三角形单元的准确性与解的收敛性。

材料的内禀尺度 l 对径向位移的影响见图8,网格密度设为 188×20 ,即环向188个单元,径向20个单元。从图中可以看出,数值解同样与理论解完全重合。此外,内禀尺度 l 越小,径向位移曲线弯曲程

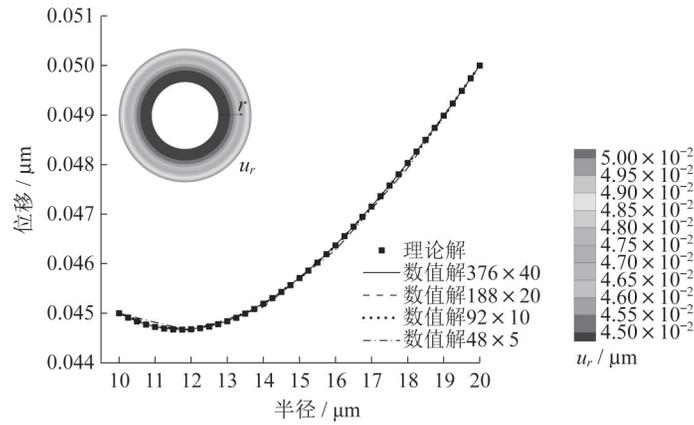


图 4 位移 u_r 的理论解和不同网格密度的数值解

Fig. 4 Theory solution and numerical solutions of different mesh grids of u_r .

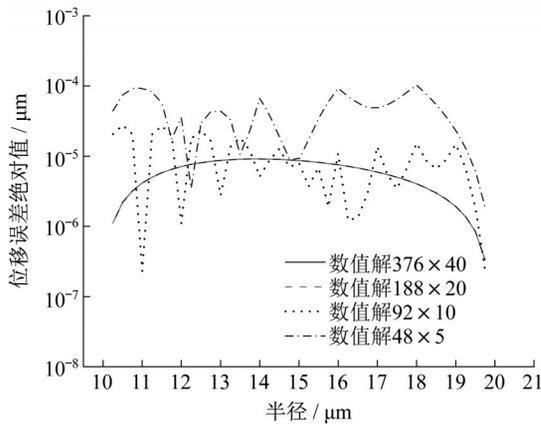


图 5 位移 u_r 的理论解和不同网格密度的数值解误差绝对值
Fig. 5 Absolute value of u_r error between theory solution and numerical solutions of different mesh grids

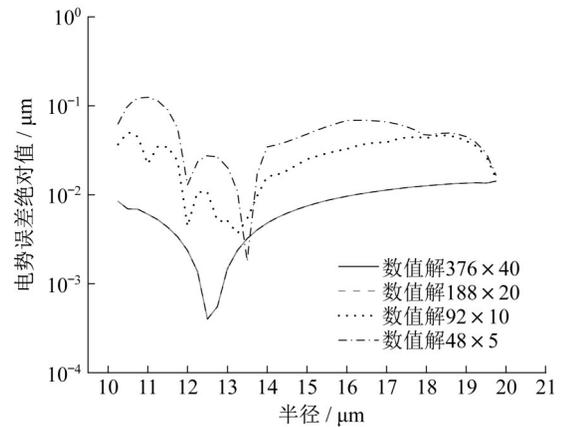


图 7 电势 ϕ_r 的理论解和不同网格密度的数值解误差绝对值
Fig. 7 Absolute value of ϕ_r error between theory solution and numerical solutions of different mesh grids

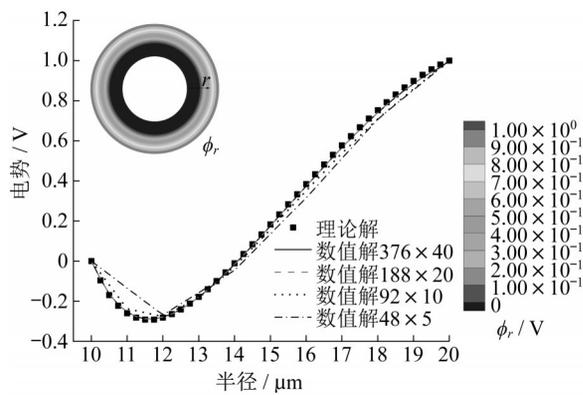


图 6 电势 ϕ 的理论解和不同网格密度的数值解

Fig. 6 Theory solution and numerical solutions of different mesh grids of ϕ .

平方项,因此较大的内禀尺度会减小结构的应变梯度。在挠曲电材料计算中,内禀尺度大都直接设定,其取值方法需要进一步研究。

度越大,即径向应变($\partial u_r / \partial r$)的梯度越大,这也可以从图 9 中更直观地看出。材料系数 Q 反映了高阶应力与高阶应变的关系,其表达式中含有内禀尺度的

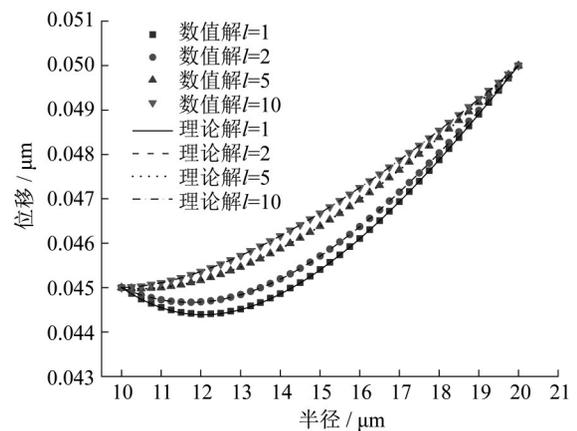
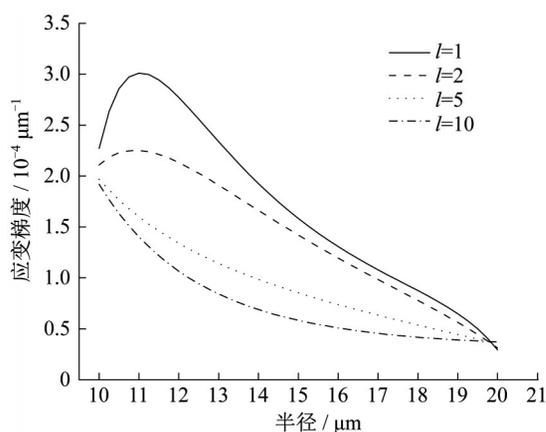


图 8 不同内禀尺度下的位移 u_r 的解

Fig. 8 Solutions of u_r for different intrinsic lengths

图9 不同内禀尺度下的应变梯度 u_r'' Fig. 9 Strain gradient u_r'' for different intrinsic lengths

3.2 利用挠曲电材料结构的非对称性产生压电效应

相比压电材料,挠曲电效应存在于所有电介质中,而且不受居里温度的限制。挠曲电效应的一个重要应用就是利用挠曲电材料(非压电材料)设计结构产生压电效应^[21-22]。在正方形中心开孔,当受到均匀拉力时,结构内部由于应力分布不均匀就会产生应变梯度。但如果开孔是上下左右均对称,如圆形等,结构的平均电极化仍为零。因此,产生非零电极化需要利用开孔的不对称性,如图10所示的三角形结构。结构边长 S 为 $1 \mu\text{m}$,开孔三角形的内接圆半径 r 为 $0.4 \mu\text{m}$,左边位移和电势均为零,右边施加 $1.02 \times 10^{-4} \text{ N} \cdot \mu\text{m}^{-1}$ 的线荷载 F ,此问题设为平面应变问题。

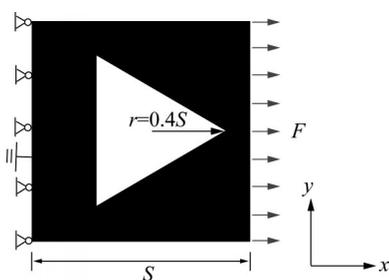
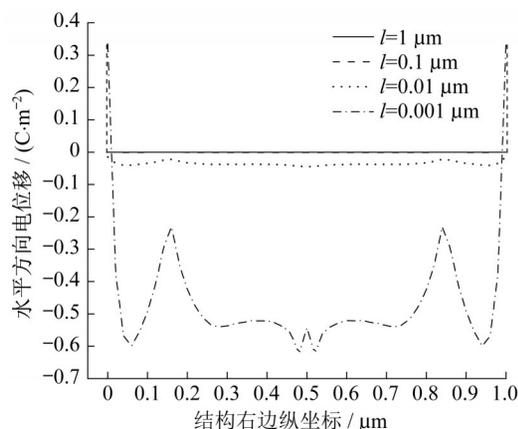
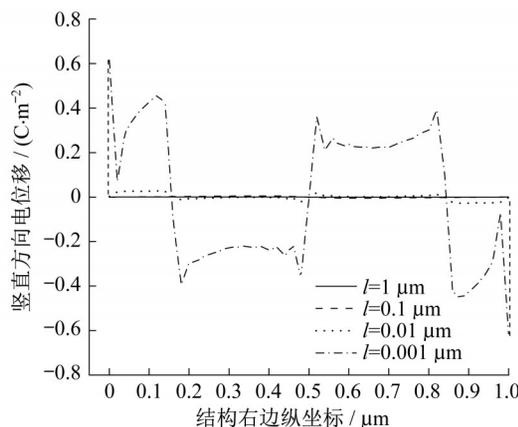


图10 三角形开孔的正方形结构

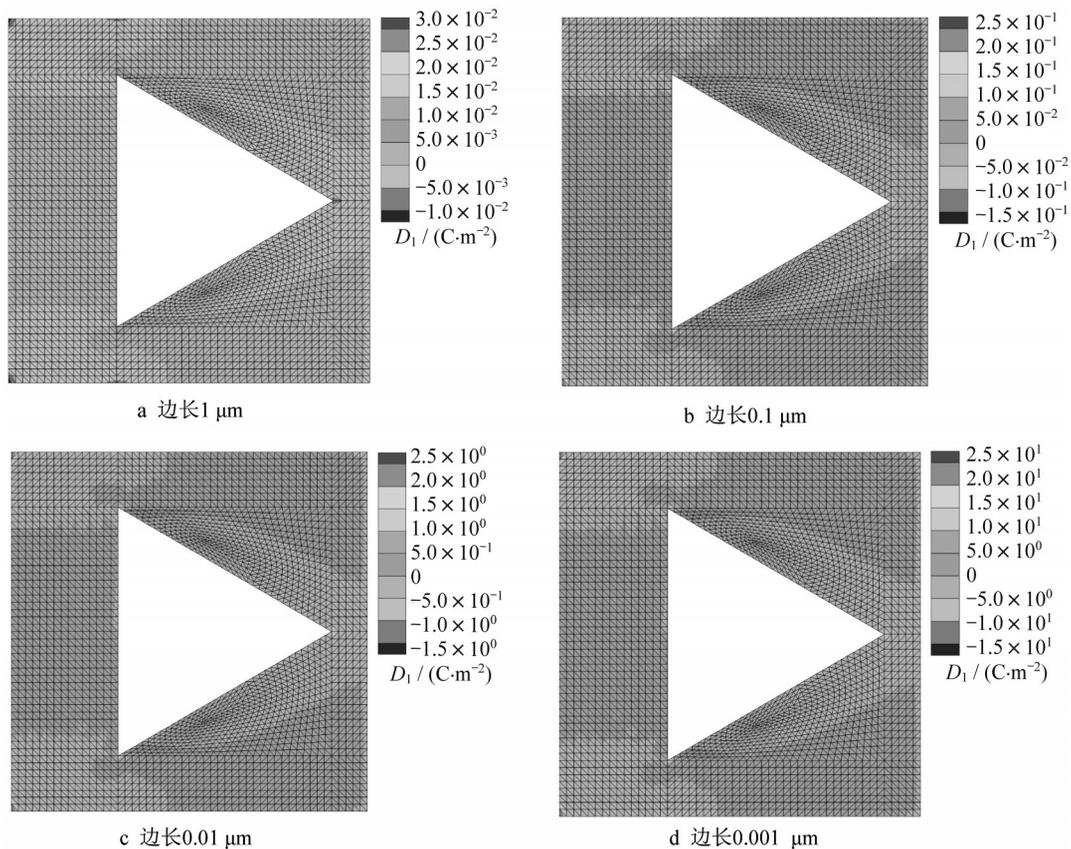
Fig. 10 Square structure with a triangular hole

不同内禀尺度下,结构右边电位移 D_1 (水平方向)如图11所示。由于结构的对称性,电位移曲线沿 $y = 0.5 \mu\text{m}$ 轴对称。当内禀尺度较大时,电位移很小,而当内禀尺度较小时,电位移则比较显著,这是由于较大的内禀尺度减弱了结构的应变梯度。右侧电位移 D_2 (竖直方向)如图12所示,此时电位移曲线沿中轴反对称,电位移 D_2 沿边线的积分为零。由

于结构是上下对称、左右非对称的,电位移才会出现上述的对称和反对称性,这也说明了开孔需是非对称的才可以产生压电效应。与图11类似,当内禀尺度较小时,结构中会产生更大的应变梯度,电位移 D_2 会更为显著。

图11 不同内禀尺度下的电位移 D_1 Fig. 11 Electric displacement D_1 for different intrinsic lengths图12 不同内禀尺度下的电位移 D_2 Fig. 12 Electric displacement D_2 for different intrinsic lengths

挠曲电材料一个重要特点是尺寸效应,即挠曲电效应在小的尺度下尤为显著。对于许多材料,挠曲电系数很小,但在纳米尺度下,挠曲电效应非常强,而不能忽略。当逐渐缩小结构边长 S ,由微米尺度到纳米尺度(内禀尺度和荷载以相同比例缩小),结构的电位移 D_1 如图13所示。随着结构尺寸的减小,结构电位移随之增大。结构尺寸每减小10倍,电位移相应增大10倍左右。这一特点有利于微纳尺度下挠曲电材料结构设计。

图 13 不同结构大小的电位移 D_1 Fig. 13 Electric displacement D_1 for different structure sizes

4 结语

本文基于 Bell 三角形单元进行了挠曲电效应的分析。Bell 三角形单元是 C^1 型协调单元, 便于处理复杂边界条件, 也很容易在商用软件中扩展。给出了在挠曲电分析中 Bell 单元的一般格式, 并在数值算例中验证了它的准确性和收敛性。梯度弹性理论中引入的内禀尺度, 可以用来预测微小尺度材料和结构中的尺度效应。较大的内禀尺度会减小结构的应变梯度, 减弱正向挠曲电效应产生的电位移。此外, 本文还利用结构的非对称性产生压电效应, 通过电位移的分布阐述了相应的原理。挠曲电效应会随着结构尺度的减小显著增大, 这有利于其在微纳尺度中的应用。

Bell 三角形单元的一个劣势是其节点自由度较多, 另外它扩展到三维单元还存在一定难度。本文采用了单参数的内禀尺度, 其取值大都直接给出, 此外还有学者采用多个内禀尺度参数进行挠曲电效应的分析^[23]。Bell 单元的计算效率、扩展问题, 以及内禀尺度的选取, 都需要进一步研究。

作者贡献声明:

庄晓莹: 学术指导, 研究方法, 撰写论文, 论文修改。

李彬: 理论推导, 数值计算, 撰写论文。

参考文献:

- [1] YUDIN P V, TAGANTSEV A K. Fundamentals of flexoelectricity in solids [J]. *Nanotechnology*, 2013, 24 (43): 432001.
- [2] NGUYEN T D, MAO S, YEH Y W, *et al.* Nanoscale flexoelectricity [J]. *Advanced Materials*, 2013, 25(7): 946.
- [3] WANG B, GU Y, ZHANG S, *et al.* Flexoelectricity in solids: Progress, challenges, and perspectives [J]. *Progress in Materials Science*, 2019, 106: 100570.
- [4] ZUBKO P, CATALAN G, TAGANTSEV A K. Flexoelectric effect in solids [J]. *Annual Review of Materials Research*, 2013, 43: 387.
- [5] CROSS L E. Flexoelectric effects: Charge separation in insulating solids subjected to elastic strain gradients [J]. *Journal of Materials Science*, 2006, 41(1): 53.
- [6] SHU L, LIANG R, RAO Z, *et al.* Flexoelectric materials and their related applications: A focused review [J]. *Journal of Advanced Ceramics*, 2019, 8(2): 153.
- [7] ZHUANG X, NGUYEN B H, NANTHAKUMAR S S,

- et al.* Computational modeling of flexoelectricity—A review [J]. *Energies*, 2020, 13(6): 1326.
- [8] MINDLIN R D. Stress functions for a Cosserat continuum [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1965, 1(3): 265.
- [9] 赵亚溥. 近代连续介质力学 [M]. 北京: 科学出版社, 2016.
ZHAO Yafu. *Modern continuum mechanics* [M]. Beijing: Science Press, 2016.
- [10] DENG F, DENG Q, YU W, *et al.* Mixed finite elements for flexoelectric solids [J]. *Journal of Applied Mechanics*, 2017, 84(8): 081004.
- [11] MAO S, PUROHIT P K, ARAVAS N. Mixed finite-element formulations in piezoelectricity and flexoelectricity [J]. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2016, 472(2190): 20150879.
- [12] ZHUANG X, NANTHAKUMAR S S, RABCZUK T. A meshfree formulation for large deformation analysis of flexoelectric structures accounting for the surface effects [J]. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2020, 120: 153.
- [13] HE B, JAVVAJI B, ZHUANG X. Characterizing flexoelectricity in composite material using the element-free Galerkin method [J]. *Energies*, 2019, 12(2): 271.
- [14] THAI T Q, RABCZUK T, ZHUANG X. A large deformation isogeometric approach for flexoelectricity and soft materials [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2018, 341: 718.
- [15] NGUYEN B H, ZHUANG X, RABCZUK T. Numerical model for the characterization of Maxwell-Wagner relaxation in piezoelectric and flexoelectric composite material [J]. *Computers & Structures*, 2018, 208: 75.
- [16] HRABOK M M, HRUDEY T M. A review and catalogue of plate bending finite elements [J]. *Computers & Structures*, 1984, 19(3): 479.
- [17] YVONNET J, LIU L P. A numerical framework for modeling flexoelectricity and Maxwell stress in soft dielectrics at finite strains [J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2017, 313: 450.
- [18] ZERVOS A, PAPANASTASIOU P, VARDOULAKIS I. A finite element displacement formulation for gradient elastoplasticity [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2001, 50(6): 1369.
- [19] ZERVOS A, PAPANICOLOPULOS S A, VARDOULAKIS I. Two finite-element discretizations for gradient elasticity [J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 2009, 135(3): 203.
- [20] MANZARI M T, YONTEN K. C^1 finite element analysis in gradient enhanced continua [J]. *Mathematical and Computer Modelling*, 2013, 57(9/10): 2519.
- [21] SHARMA N D, MARANGANTI R, SHARMA P. On the possibility of piezoelectric nanocomposites without using piezoelectric materials [J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2007, 55(11): 2328.
- [22] KRICHEN S, SHARMA P. Flexoelectricity: A perspective on an unusual electromechanical coupling [J]. *Journal of Applied Mechanics*, 2016, 83(3): 030801.
- [23] 杨旭, 周亚荣, 陈玲玲, 等. 基于广义应变梯度理论的纳米梁挠曲电效应研究 [J]. *固体力学学报*, 2019, 40(1): 21.
YANG Xu, ZHOU Yarong, CHEN Lingling, *et al.* The flexoelectric response of nanobeam based on the general strain gradient elasticity theory [J]. *Chinese Journal of Solid Mechanics*, 2019, 40(1): 21.