

# 基于力电耦合超材料的圆柱壳结构低频减振方法研究

易凯军<sup>1</sup>, 尹丹杰<sup>1</sup>, 张安付<sup>2</sup>, 朱 睿<sup>1</sup>

(1. 北京理工大学宇航学院, 北京 100081; 2. 武汉第二船舶设计研究所, 湖北 武汉 430064)

**摘要:** 基于力电耦合超材料发展了一种针对圆柱壳结构的低频减振方法。利用模态综合法, 提出了力电耦合系统的减缩方法, 并对减缩模型进行了修正。研究了有限长度力电耦合超材料圆柱壳中的禁带阻波特性, 并分析了电感电阻参数对禁带特性的调节规律。面向低频减振应用, 提出了两种电路参数的优化设计方法。最后, 以双层环肋圆柱壳为研究对象, 针对其前三阶共振进行了优化设计, 数值仿真结果表明前三阶共振峰均实现了 25 dB 以上的振动抑制效果, 充分验证了所提出的低频减振方法能有效地抑制圆柱壳结构的低频振动。

**关键词:** 压电材料; 超材料; 圆柱壳; 低频减振; 参数优化

**中图分类号:** O328

**文献标志码:** A

frequency vibration reduction applications. Finally, the first three resonances are tuned using the double-layer ring strengthened cylindrical shell as the study object. The numerical simulation results reveal that the first three resonance peaks have a vibration suppression effect of over 25dB, proving that the low-frequency vibration reduction approach proposed in this paper can effectively suppress the low-frequency vibration of cylindrical shell structures.

**Key words:** piezoelectric material; metamaterial; cylindrical shell; low-frequency vibration control; parameter optimization

## Low-Frequency Vibration Control of Cylindrical Shell Structures Based on Piezoelectric Metamaterials

YI Kaijun<sup>1</sup>, YIN Danjie<sup>1</sup>, ZHANG Anfu<sup>2</sup>, ZHU Rui<sup>1</sup>

(1. School of Aerospace Engineering, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China; 2. Wuhan Second Ship Design and Research Institute, Wuhan 430064, Hubei, China)

**Abstract:** Based on electromechanical coupling metamaterials, a low-frequency vibration reduction approach for cylindrical shell constructions is proposed in this paper. A reduction method for the electromechanical coupling system is put forward, and the reduction model is corrected, using the modal synthesis approach. The wave resistance characteristics of the bandgap in the finite-length electromechanical coupling metamaterial cylindrical shell are studied, and the regulation law of the inductance and resistance parameters to the bandgap characteristics is analyzed. Two optimum circuit parameter design strategies are provided for low-

薄壁圆柱壳被广泛用于航空航天、船舶、交通运输等装备的主承力结构。在内部机械设备和外部流体的共同激励下, 圆柱壳结构产生的振动不仅会干扰内部精密仪器与敏感设备的工作, 严重时甚至会引发疲劳损伤<sup>[1]</sup>, 出现灾难性后果。因此, 圆柱壳结构在满足静承载能力的同时, 也需具备良好的振动和声学性能。

圆柱壳的振动控制是工程应用中的一个重要问题, 并受到了广泛研究。薄壳结构减振技术主要包括粘弹性阻尼材料减振、磁流变阻尼减振、动力吸振器、质量阻振、主动隔振系统、主动约束阻尼、智能结构等。例如, 1999 年, Boily 等<sup>[2]</sup>通过研究飞机机身的振动声学特性, 探究了圆柱壳结构上粘贴粘弹性阻尼材料或多孔材料时对减振降噪的影响, 并对比了两种结构的振动声行为。Ji 等<sup>[3]</sup>提出了一种利用磁流变阻尼技术控制管类圆柱壳结构低频振动的方案, 测试了磁流变阻尼器的动态特性, 最后探究了不同振动控制算法的控制效果。Zhang<sup>[4]</sup>研究了周期

收稿日期: 2022-06-18

基金项目: 海洋防务创新基金(JJ-2020-719-05)

第一作者: 易凯军(1988—), 男, 副教授, 工学博士, 主要研究方向为智能超材料和超结构力学。

E-mail: kaijun.yi@bit.edu.cn



论文  
拓展  
介绍

性和非周期性安装动力吸振器的圆柱壳振动控制问题,优化动力吸振器的参数和坐标,对比了两种情况下的减振效果。除了上述利用阻尼器进行减振和吸振,还有隔振等振动控制方法。王献忠等<sup>[5]</sup>探究了阻振质量基座对双层圆柱壳结构的隔振特性,证明采用含阻振质量的基座结构能有效阻隔结构中振动波的传递。Huang等<sup>[6]</sup>通过频率响应函数和阻抗综合的数值模型,分析了带主动隔振器的水下加筋圆柱壳结构的振动控制。为了进一步提高阻尼层的性能和效果,Baz等<sup>[7]</sup>提出了普通粘弹性材料和两层压电约束层组成的主动约束阻尼概念。Ray等<sup>[8]</sup>将主动约束阻尼布置在大型结构上,对阻尼处理的位置进行了参数优化。Plattenburg等<sup>[9]</sup>采用压电片和分布式纸板衬垫粘贴在薄圆柱壳上,通过剪切错动耗散动能,并通过建立圆柱壳的瑞利-里兹模型来预测其在主动和被动阻尼处理下的响应。此外,设计智能超结构进行减振也逐渐成为人们关注的焦点。Jin等<sup>[10]</sup>设计了用于振动抑制的圆柱蜂窝夹层超结构,通过引入局域谐振单元产生局域谐振进行圆柱壳的减振,研究了具有局域谐振腔的正交各向异性圆柱壳的色散关系,并定义了用于工程设计的带隙预测公式,该研究拓宽了局域共振超结构在工程领域中的应用。但是,目前这些方法实现圆柱壳在低频段内的减振比较困难,并且附加质量高,不能满足轻量化的设计要求,而且在实际环境中流激振动也无法通过隔振来消除,因此针对圆柱壳结构的低频减振方法仍然需要进一步探究。

随着新型智能材料的发展,使用压电材料进行振动抑制为解决这些问题带来了可能。压电材料所具有的机电耦合特性可以实现机械能与电能的相互转换,并通过外接分流电路实现对电信号的控制。同时,压电片所具有的质量小、体积小、易于制作安装等特性也有助于结构的轻量化与简单化,其反应速度快、控制精确度高、使用频率范围广等特点也有利于主动控制的实现。基于压电材料的分流减振技术被广泛探索用于电子器件、航空航天、交通运输等领域<sup>[11]</sup>。近年来,将外接有分流电路的压电片周期性排布在梁、板等结构表面,能够实现对波的阻隔和消耗,达到振动抑制的目的。基于压电分流阵列的研究首先由Throp等<sup>[12]</sup>提出,他在弹性杆中实现了纵波的产生与调控,并通过添加压电分流阵列同时观测到了Bragg禁带和局域谐振禁带。Spadoni等<sup>[13]</sup>将这种方法拓展到了二维结构中,并建立了压电板的有限元模型。在此之后,压电分流阵列技术受到

了更广泛的关注。Casadei等<sup>[14]</sup>对添加有压电分流阵列的结构进行了实验研究并得到了宽频振动控制。相比传统的压电分流减振技术,力电耦合超材料用于大尺寸多模态结构的振动控制时不必对压电片几何或位置进行优化,设计更简单。

2011年,Airolidi和Ruzzene<sup>[15]</sup>首次提出力电耦合超材料的概念,在对压电分流阵列梁的研究中发现,超材料梁的等效刚度受电路参数显著影响,并在电路谐振频率附近具有谐振特性。Sugino等<sup>[16]</sup>提出了一种分析有限力电耦合超材料板禁带特性的理论模型,并对压电片电极形状以及分布对禁带特性的影响进行了研究。Zhang等<sup>[17]</sup>将分流压电阵列粘贴在均质薄板上下表面构成了超材料板,并发现该超材料板声传播损耗的能力显著提高。Chen等<sup>[18]</sup>将压电片反对称地粘贴于弹性梁的上下表面,发现纵波与弹性波产生耦合并提升了分流阵列的振动隔离效果。Li等<sup>[19]</sup>提出了一种负反馈控制方法,在增加系统稳定性的同时实现了压电超材料梁的动态调控。Yi等<sup>[20]</sup>通过设定反馈控制传函实现了对压电阵列超材料梁的等效弯曲刚度的控制,从而实现了结构禁带可调。然而,目前基于力电耦合超材料的研究多用于梁或板的减振,应用在壳结构上进行低频减振还缺少相关研究。

本文基于局域谐振力电耦合超材料,发展了圆柱壳结构的低频减振方法。首先,建立了复杂力电耦合圆柱壳模型减缩方法,并对该减缩方法进行了修正;进而,基于减缩模型研究了力电耦合超材料圆柱壳的禁带特性,探究了电学参数对禁带特性的影响规律;随后,在此基础上发展了电学参数的优化设计方法实现圆柱壳结构的低频振动抑制;最后,仿真验证了力电耦合超材料圆柱壳的低频减振效果。

## 1 力电耦合系统模型减缩及修正方法

为了研究力电耦合超材料圆柱壳的振动特性,本节发展力电耦合系统振动特性的高效数值预报方法。首先得到压电系统的有限元全模型,然后利用模态综合法对全模型进行减缩,最后对减缩模型进行修正。利用有限元离散后,全耦合压电系统的控制方程可表示为<sup>[21]</sup>

$$\begin{aligned} M_{dd}\ddot{d} + K_{dd}d + \Theta_{dv}V &= F \\ -\Theta_{dv}^T d + CV &= -Q \end{aligned} \quad (1)$$

式中: $M_{dd}$ 和 $K_{dd}$ 分别表示短路状态下的质量矩阵和刚度矩阵; $\Theta_{dv}$ 表示机电耦合系数矩阵; $C$ 和 $Q$ 分别

表示电容和电荷; $F$ 表示机械力; $d$ 和 $V$ 分别代表结构上任意点的位移和电极之间的电压。

减缩模型通过将控制方程中物理空间的位移 $d$ 转换为模态空间的模态坐标 $q$ 获得,转换关系表示为

$$d = \Phi q \quad (2)$$

式中: $\Phi = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m]$ ,  $\phi_i$ 是压电系统在短路条件下具有特定齐次狄利克雷边界的第 $i$ 阶特征模态,它可以通过求解压电片短路时的特征值问题得到。

$$(-\omega_i^2 M_{dd} + H_{dd})\phi_i = 0 \quad (3)$$

这里 $\omega_i$ 表示第 $i$ 阶固有频率。质量矩阵和刚度矩阵经过归一化处理后分别得到单位矩阵和对角线元素为 $\omega_i$ 的模态刚度矩阵

$$\Phi^T M_{dd} \Phi = E \quad (4)$$

$$\Phi^T K_{dd} \Phi = \Lambda = \text{diag}(\omega_i^2) \quad (5)$$

式中: $E$ 是单位矩阵。将式(4)和(5)代入方程(1)中可以得到用模态坐标 $q$ 表示的控制方程:

$$\ddot{q} + \Lambda q + \Phi^T \Theta_{dv} V = \Phi^T F - \Theta_{dv}^T \Phi q + CV = -Q \quad (6)$$

减缩模型中只保留了少量模态,从而大大减少了所需求解的方程的个数。但是,高阶模态的截断会导致静态减缩误差,使得减缩模型不能准确描述压电系统的性能。完整模型和减缩模型的误差可以表示为

$$T_{\text{err}}^e = T_f^e - T_r^e = \Theta_{dv}^T (K_{dd}^{-1} - \Phi \Lambda^{-1} \Phi^T) \Theta_{dv} \quad (7)$$

式中: $T_f^e$ ,  $T_r^e$ 分别代表在完整模型和减缩模型的 $V$ 和 $Q$ 之间的静电传递矩阵。为了提高减缩模型的准确性,并代替原始模型进行求解,需要对其进行修

正。减缩模型的修正方法可以通过修正压电单元的固有电容 $C$ 来实现。根据式(1)和(6),得到修正后的电容矩阵:

$$C^* = \text{diag}(\Theta_{dv}^T (K_{dd}^{-1} - \Phi \Lambda^{-1} \Phi^T) \Theta_{dv}) + C \quad (8)$$

将公式(6)中的 $C$ 替换为 $C^*$ ,可以得到修正后的减缩模型控制方程:

$$\ddot{q} + \Lambda q + \Phi^T \Theta_{dv} V = \Phi^T F - \Theta_{dv}^T \Phi q + C^* V = -Q \quad (9)$$

修正后的减缩模型在保持较高准确性的同时(其准确性验证见4.2节),极大地提高了计算效率,为后续分析力电耦合超材料圆柱壳低频减振效果提供了工具。

## 2 电学参数对圆柱壳结构低频振动特性的影响规律

### 2.1 有限元仿真模型

本节所研究的力电耦合超材料圆柱壳如图1所示,圆柱壳外表面周期性排列压电片,压电片在周向和轴向的数量分别为12和20,共计240片。在有限元结构中,压电片和壳体的厚度分别为2、1 mm,压电片的极化方向沿壳体的径向方向,表1是结构的几何尺寸和材料属性。压电片与壳体的接触面接地,外表面连接分流电路。在图中A点施加单位载荷激励,在圆柱壳远场B点测量其位移响应,通过计算激励点与测量点间的频率响应函数和输出圆柱壳变形云图来分析该结构的禁带效果。

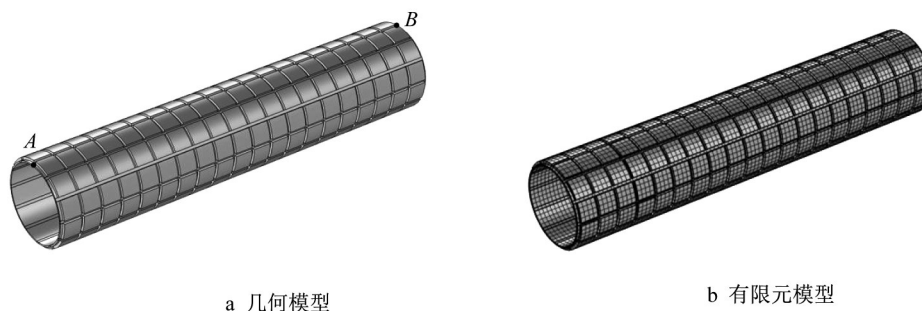


图1 力电耦合超材料圆柱壳结构模型示意图

Fig. 1 Schematic diagram of electro-mechanical metamaterial cylindrical shell structure model

表1 材料属性及几何尺寸

Tab. 1 Material properties and geometry

	材料	长度/mm	宽度/mm	半径/mm	厚度/mm	杨氏模量/ GPa	密度/(kg·m <sup>-3</sup> )
壳体	钢	322		30	1	205	7 850
压电片	PZT-5H	14	14		2	58.8	7 700



## 2.2 力电耦合超材料圆柱壳结构中的禁带效果

通过调节外接电路,力电耦合超材料圆柱壳可以产生禁带并阻隔弹性波的传播,本小节对该结构中的禁带效果进行了研究。以力电耦合超材料圆柱壳的第三阶共振频率为例,通过调节电路谐振频率在该共振频率处产生了禁带,如图 2 所示。在图 2a 中,纵坐标为测量点的法向位移。实线和虚线分别为压电片短路和外接谐振电路时激励与响应间的频率响应曲线,阴影部分表示禁带区域。可以发现,频率响应函数在禁带范围内存在明显的低谷,这是由于弹性波在禁带频率范围内无法在圆柱壳中传播,使得激励点处产生的振动无法传播到远场的测量

点,测量点处的位移显著减小导致的。

禁带产生的振动传递隔离效果同样可以从力电耦合超材料圆柱壳的三维变形图中观测到,图 2b、图 2c、图 2d 分别展示了超材料圆柱壳在禁带前、中、后的三维变形图。可以发现,在禁带前后,激励处所产生的弹性波在壳体中自由传播并产生显著变形;而在禁带内部,禁带阻隔了激励产生的弹性波的传播,使得变形仅仅局域在激励点位置。由此可知,由外接电路产生的禁带可以阻隔力电耦合超材料圆柱壳中弹性波的传播,从而有效降低远场区域的振动,达到振动传递隔离的效果。

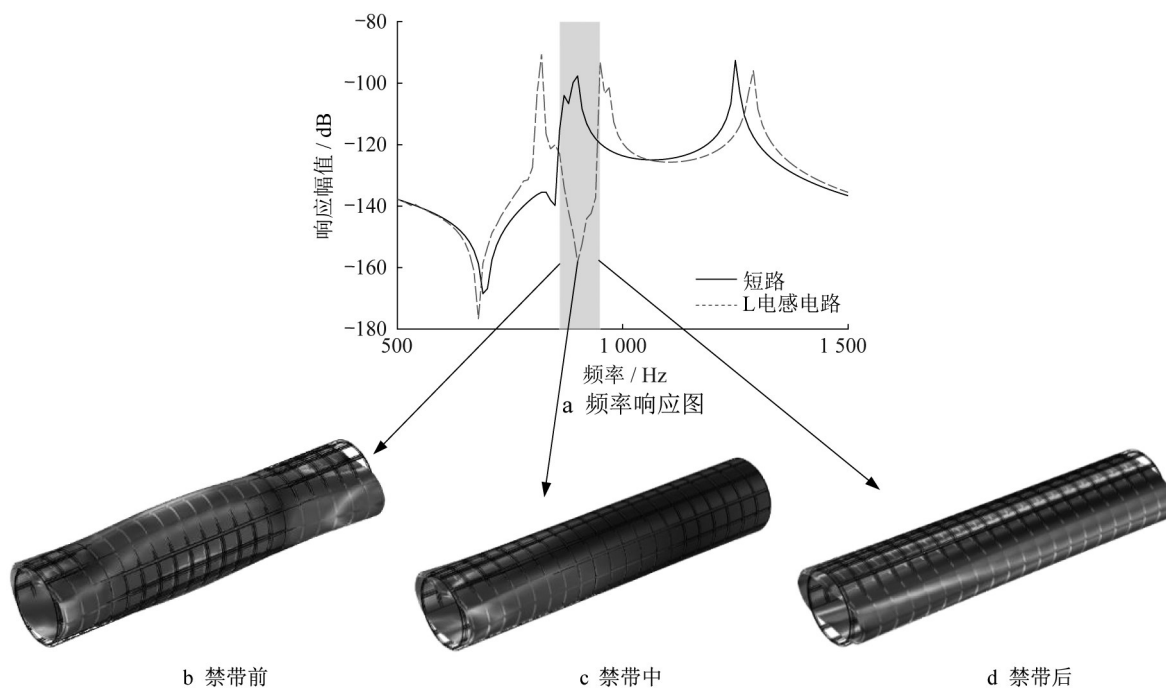


图 2 力电耦合超材料圆柱壳结构中的禁带

Fig. 2 Bandgaps in electro-mechanical metamaterial cylindrical shell structures

## 2.3 电学参数对禁带位置的影响规律

当压电片外接电感电路时,电感与压电片的本征电容发生电磁振荡,通过对其电谐振频率进行调节,可以改变超材料的禁带位置,达到在特定频率下减振的目的。电谐振频率是通过改变电路中的电感值实现的,图 3 表示设定不同的电感值时对禁带位置的影响,其中  $L=13\text{ H}$ 、 $L_1=9\text{ H}$ 、 $L_2=18.5\text{ H}$ ,分别作出了在  $500\sim 1\,500\text{ Hz}$  频率段内相应的频率响应曲线图。从图中可看出,改变电感参数会使禁带位置发生变化,由于禁带区域内弹性波不能传播,因此通过调节电感值可以实现目标频率内的振动控制。

在电路中只添加电感时,在降低共振频率处峰值的同时,禁带区域两侧产生了次生共振峰,这种现

象的存在会引入过多的峰值响应,而这在工程实际中是不被采用的。为了取得更好的减振效果,考虑加入电阻形成电感电阻谐振电路,通过产生阻尼电谐振来耗散机械振动能量,抑制主结构的振动。图 4 表示外接电阻电感谐振电路时电阻参数对禁带位置的影响,其中  $R_1$  到  $R_3$  的电阻值依次为  $R_1=40\text{ k}\Omega$ 、 $R_2=20\text{ k}\Omega$ 、 $R_3=8\text{ k}\Omega$ 。从频响曲线图中可以看出,改变电阻值不会使禁带位置发生变化,但会降低由于电感带来的次生共振峰。因此选取合适的电感电阻值时,可以得到在较宽的频率范围内都有平滑无尖峰的减振效果。通过合理地设计电学参数求解方法,可以更方便快捷地实现特定频率下的减振。

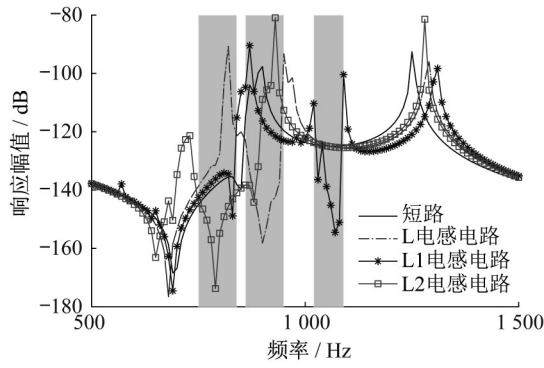


图3 电感参数对禁带位置的影响

Fig. 3 Influence of inductance parameters on location of bandgap

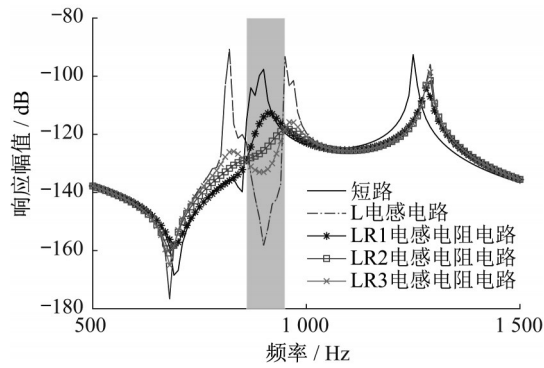


图4 电阻参数对禁带位置的影响

Fig. 4 Influence of resistor parameters on location of bandgap

### 3 面向低频减振的电学参数优化设计方法

在第2节的研究中发现,电学参数对超材料的禁带特性具有十分重要的影响。因此,为了取得优异的减振效果,需要对电学参数进行优化设计。电学参数优化设计方法主要有两种,一种方法是基于最佳电学参数解析表达式的理论分析方法,另一种是基于搜索算法的参数优化选取方法。本小节将分别对两种方法进行介绍,并在4.3和4.4小节中进行对比。

#### 3.1 最佳电学参数的解析表达式

考虑一个表面粘贴有压电片的任意弹性结构,压电片两端外接有阻尼器或谐振分流器,通过有限元离散化可以获得该机电耦合系统的多自由度模型。通过式(1)将位移 $d$ 展开为 $N$ 个本征模态,得到降阶模型:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_i + 2\xi_i \omega_i \dot{q}_i + \omega_i^2 q_i - \chi_i V &= F_i \\ CV + Q - \sum_{i=1}^N \chi_i q_i &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

因此,该问题的机电耦合模型由 $N$ 个模态方程和一个电学平衡方程描述。这里 $(\omega_i, \phi_i)$ 分别表示第 $i$ 个模态的短路固有频率和模态振型。式中 $\chi_i$ 表示机电耦合系数,表征了第 $i$ 个模态振型与压电片之间的耦合程度。 $C$ 为压电片固有电容, $Q$ 表示电荷, $\xi_i$ 为模态的阻尼。

若只考虑一个模态,则方程(10)的 $N$ 自由度模型被截断为第 $j$ 个机械模态( $q_i = 0, \forall i \neq j$ )。当外接电阻电感谐振电路时,根据电压 $V$ 和电荷 $Q$ 的关系 $V = \dot{Q}Z_{su} = \dot{Q}R + \ddot{Q}L$  ( $Z_{su}$ 为阻抗, $R$ 为电阻, $L$ 为电感),可以将式(10)作进一步改进,具体推导过程见文献[22]。

$$\begin{aligned} \ddot{q}_j + 2\xi_j \omega_j \dot{q}_j + \hat{\omega}_j^2 q_j - \omega_j k_j \bar{Q} &= F_j \\ \frac{1}{\omega_e^2} \ddot{\bar{Q}} + \frac{2\xi_e}{\omega_e} \dot{\bar{Q}} + \bar{Q} - \omega_j k_j q_j &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

式(11)进行了量纲一化处理,方程中变量的定义为

$$\bar{V} = \sqrt{C} V \quad (12)$$

$$\bar{Q} = \frac{Q}{\sqrt{C}} \quad (13)$$

$$\omega_e = 1/\sqrt{LC} \quad (14)$$

$$\hat{\omega}_j = \omega_j \sqrt{1 + k_j^2} \quad (15)$$

其中: $\bar{V}$ 表示量纲一化电压; $\bar{Q}$ 表示量纲一化电荷; $\omega_e$ 表示电谐振频率; $\omega_j$ 表示第 $j$ 阶短路固有频率; $\hat{\omega}_j$ 表示第 $j$ 阶开路固有频率; $k_j$ 表示机电耦合因子,其中

$$|k_j| \simeq k_{\text{eff},j} = \sqrt{\frac{(\omega_j^{\text{oc}})^2 - (\omega_j^{\text{sc}})^2}{(\omega_j^{\text{sc}})^2}}, \quad \omega_j^{\text{sc}} \text{ 和 } \omega_j^{\text{oc}} \text{ 分别表示}$$

短路固有频率和开路固有频率, $k_{\text{eff},j}$ 表示等效机电耦合因子。根据极点配置法可以求得实现最佳减振效果的电阻、电感值为

$$R = \frac{2k_j}{C\omega_j(1+k_j^2)^{3/2}} \quad (16a)$$

$$L = \frac{1}{C\omega_j^2(1+k_j^2)^2} \quad (16b)$$

根据传递函数法可以求得实现最佳减振效果的电阻、电感值为

$$R = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{k_j}{C\omega_j \sqrt{1+k_j^2}} \quad (17a)$$

$$L = \frac{1}{C\omega_j^2(1+k_j^2)} \quad (17b)$$

式(16)、式(17)中最佳电阻、电感的解析表达式总结在表2中。

表 2 谐振分流的最佳电学参数解析表达式

Tab. 2 Optimal electrical parameters for resistor and resonant shunt

	自由响应(极点配置法)	强迫响应(传递函数法)
最优电阻值	$R = \frac{2k_j}{C\omega_j(1+k_j^2)^{3/2}}$	$R = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{k_j}{C\omega_j\sqrt{1+k_j^2}}$
最优电感值	$L = \frac{1}{C\omega_j^2(1+k_j^2)^2}$	$L = \frac{1}{C\omega_j^2(1+k_j^2)}$

### 3.2 获取最佳电学参数的优化方法

3.1 节中式(16)、式(17)为近似最佳电学参数的解析表达式,因为求解时假设模型为单自由度模型,且每个模态都是独立的。但是,从公式(10)中第二个方程可以看出,当只粘贴一片压电片时,压电电容和电压自由度都为标量,若取前三阶模态分析,有:

$$-(\eta_1 q_1 + \eta_2 q_2 + \eta_3 q_3) + CV = -Q \quad (18)$$

从方程(16)中可以看出各阶模态通过电学自由度耦合在一起,这导致使用电感电阻值的近似解析表达式得到的优化结果是近似的。实际应用中遇到的典型柔性结构的响应特征都是多个模态贡献的叠加。通常,在结构振动研究中,根据“模态重叠系数”对这一方面进行量化,该系数表示结构在每个频率下响应的模态数量。例如,圆柱壳弯曲响应的模态重叠往往随着频率的增加而增加,每个频率处的弯曲响应可能是多模态贡献叠加的结果,因此此时使用近似最佳电学参数进行减振可能得不到最好的优化效果。

在不计算模态重叠系数的情况下可以考虑使用优化算法来搜索最优电阻、电感值,使得结构的弯曲响应幅值最小,达到最优减振优化目的。图 5 展示了优化算法设计的流程图,根据近似解析表达式确定电学参数的搜索范围大大提高了计算效率。只要选取的初始搜索范围足够大,搜索步长逐渐缩小,就能够找到具有最佳减振效果的电学参数。

## 4 力电耦合超材料圆柱壳低频减振效果的数值验证

### 4.1 振速级计算方法

壳体振动的程度可以用法向振速级描述。考虑一个两边自由的圆柱壳体,以圆柱壳轴线为 X 轴建立如图 6 所示的柱面坐标系,分别用  $u, v, w$  表示圆柱壳中面上一点在轴向 X、周向  $\varphi$  和径向  $r$  的位移。

壳体表面的平均法向振速级可以定义为

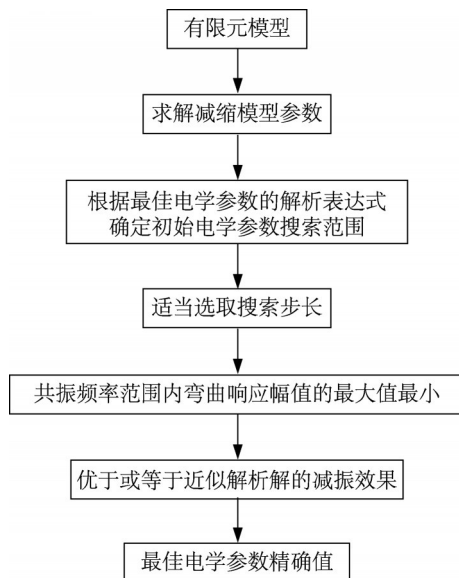


图 5 优化算法流程图

Fig. 5 Flow chart of optimization algorithm to calculate optimal circuit parameters

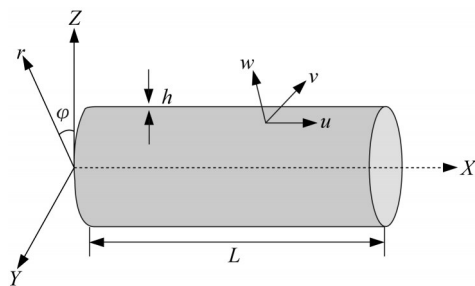


图 6 壳体坐标系示意图

Fig. 6 Schematic diagram of shell coordinate system

$$L_{\bar{V}_w} = 10 \lg \frac{\bar{V}_w^2}{V_{\text{ref}}^2} \quad (19)$$

其中参考振速为  $V_{\text{ref}} = 5 \times 10^{-8} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , 表面平均法向振速表示为

$$\bar{V}_w^2 = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \frac{\int_S \bar{V}_w \bar{V}_w^* ds}{S} \right\} \quad (20)$$

由于圆柱壳外表面的法向位移是环向垂直于表面的,类似于极化方向,因此这里根据极化坐标求解法向速度  $\bar{V}_w$ 。圆柱壳中材料坐标系  $(X, Y, Z)$  和柱坐标系  $(x, \varphi, r)$  之间的关系可以表示为

$$\begin{aligned} X &= x \\ Y &= r \sin \varphi \\ Z &= r \cos \varphi \end{aligned} \quad (21)$$

单位向量表示为

$$e = aX + bY + cZ \quad (22)$$



$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 1 \quad (23)$$

柱坐标系和材料坐标系通过以下方程关联向量:

$$\begin{aligned} e_\varphi &= 0X + \cos \varphi Y - \sin \varphi Z \\ e_x &= 1X + 0Y + 0Z \\ e_r &= 0X + \sin \varphi Y + \cos \varphi Z \end{aligned} \quad (24)$$

其中  $\varphi = \arctan \frac{Y}{Z}$ , 通过坐标转换即可得到局部坐标系, 因此径向位移  $w$  可以根据  $(X, Y, Z)$  方向的位移分量得到, 即:

$$w = Y \sin \left( a \tan \frac{Y}{Z} \right) + Z \cos \left( a \tan \frac{Y}{Z} \right) \quad (25)$$

对位移求导可得到法向位移

$$\begin{aligned} \bar{V}_w &= \left[ \frac{1}{1 + \left( \frac{Y}{Z} \right)^2} \right] \left( \frac{\dot{Y}Z - Y\dot{Z}}{Z^2} \right) \left[ Y \cos \left( a \tan \frac{Y}{Z} \right) - \right. \\ &\quad \left. Z \sin \left( a \tan \frac{Y}{Z} \right) \right] + \dot{Y} \sin \left( a \tan \frac{Y}{Z} \right) + \\ &\quad \dot{Z} \cos \left( a \tan \frac{Y}{Z} \right) \end{aligned} \quad (26)$$

将公式(26)代入方程(19)和(20)中即可得到壳体的均方法向振速级。

#### 4.2 有限元分析模型

为了验证电学参数设计方法的可行性并验证整体结构的减振效果, 本节建立了力电耦合超材料双层环肋圆柱壳模型(图7)。双层壳体 and T 形环肋选用钢材料, 双层圆柱壳中间具有 30 个 T 形环肋, 圆柱壳外表面周期性粘贴 24 片材料为 PZT-5H 的压电片, 且在设计中保证压电片质量与壳体质量的比值小于 1%, 结构的几何尺寸和材料参数如表 3 所示, 其中  $r_{in}$ 、 $r_{out}$  分别表示圆柱壳的内径和外径,  $h_{in}$ 、 $h_{out}$  分别表示内壳和外壳的厚度,  $h_p$  表示压电片的厚度,  $T_{t1}$ 、 $T_{t2}$  分别表示 T 形环肋的上宽度和下宽度,  $T_{h1}$ 、 $T_{h2}$  分别表示 T 形环肋的上高度和下高度。在超材料圆柱壳中, 压电片粘贴在壳体的外表面, 压电片与壳体的接触面接地, 外表面外接电阻电感电路进行减振设计。仿真模型中, 圆柱壳两端自由, 右端上

表面一点施加简谐激励(激励位置如点 O 所示), 用来模拟施加在结构中的扰振源, 并在该点测量位移响应。

#### 4.3 电学参数优化设计

由 2.3 节的研究结果可知, 电学参数对振动控制具有重要影响, 本节对电学参数进行优化设计, 这里采用文章第 1 节中提出的减缩修正模型计算响应。首先需验证减缩模型相较于完整模型的准确性。图 8a 表示减缩模型和完整模型得到的开路固有频率相对误差, 可以看到在每一阶模态下相对误差均远小于 1%, 一定程度证明了减缩模型的高精度。图 8b 和图 8c 进一步对比了减缩模型和完整模型计算得到的 O 点的位移响应以及它们之间的相对误差。可以看到, 在共振峰附近, 减缩模型和完整模型得到的结果有非常好的一致性; 另外还能看到, 在反共振频率附近, 减缩模型相较完整模型和有较大误差, 主要原因是进行模态减缩时使用的短路频率下的模态振型, 它们与外接电路时的模态振型存在一定的差异, 导致反共振点发生变化。但是需要指出的是, 在进行电学参数优化设计时, 影响最终优化结果的因素主要是共振频率附近的响应峰值(减缩模型在这些频率处有很高的精度)。因此, 减缩模型在本文的研究中已经满足了精度的要求; 同时, 通过完整模型计算 10~400 Hz 频率范围内的位移响应需要 2 h 左右的时间, 而根据减缩模型计算仅花费几秒钟, 大大提高了计算效率。

接下来基于搜索算法对电学参数进行了优化设计, 如图 9 所示。通过对电阻、电感参数进行扫描, 得到了圆柱壳弯曲响应峰值随电路参数变化的二维云图, 云图中颜色越深代表响应峰值越小, 即对应的电路参数产生的减振效果更好。图 9 表示了前三阶共振频率范围内响应峰值随电路参数的变化情况。二维云图表明, 位移响应对电感的变化相当敏感, 电感值的微小变化将极大地影响控制效果。此外, 为了准确找到最优的电感和电阻值, 应尽量扩大参数搜索范围同时减小参数扫描步长。

表 3 材料属性和几何尺寸

Tab. 3 Material properties and geometry

	材料	长度/mm	宽度/mm	半径/mm	厚度/mm	杨氏模量/ GPa	密度/(kg·m <sup>-3</sup> )
壳体	钢	2 000		$r_{in}=350$ , $r_{out}=370.4$	$h_{in}=1.6$ , $h_{out}=3.2$	205	7 850
T 形肋	钢	$T_{t1}=4.8$ $T_{t2}=1.6$	$T_{h1}=1.6$ $T_{h2}=17.2$		17.2	205	7 850
压电片	PZT-5H	100	100		$h_p=1$	58.8	7 700

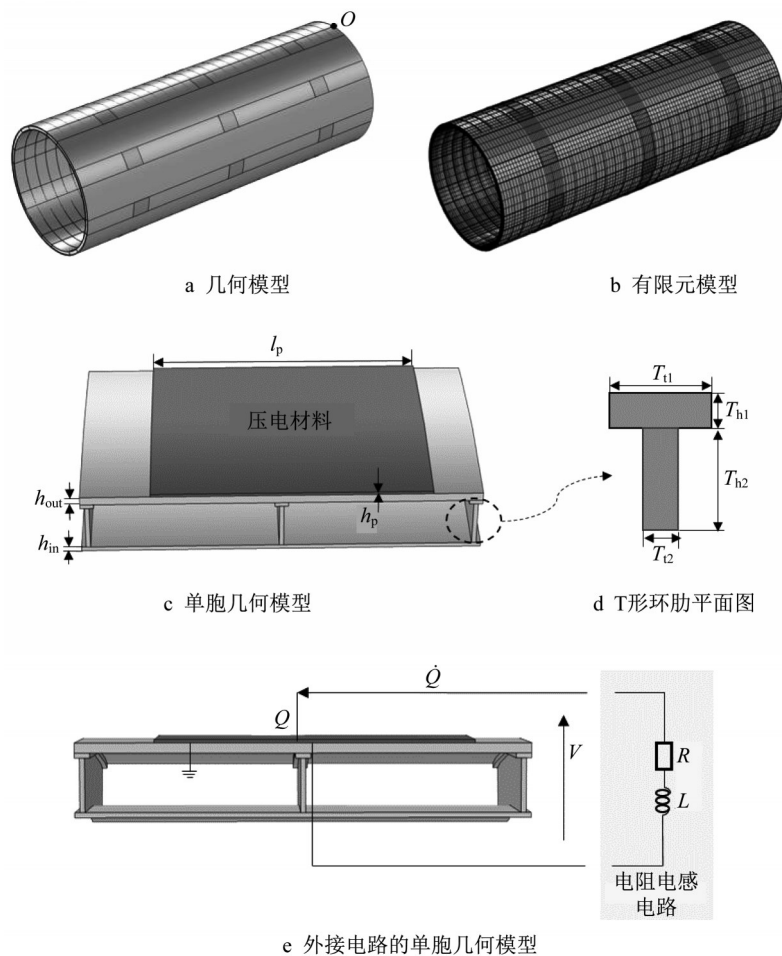


图 7 力电耦合超材料双层环肋圆柱壳设计模型

Fig. 7 Design model of electro-mechanical metamaterial double-layer cylindrical shell with circular reinforcing ribs

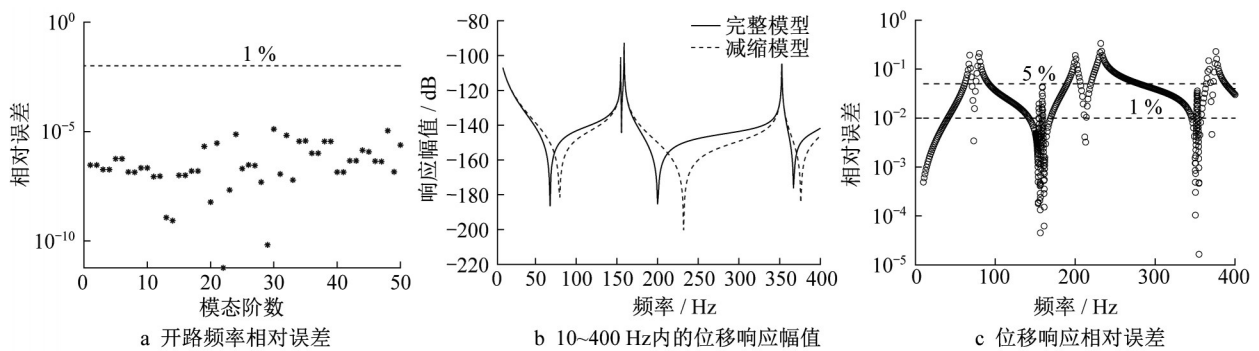


图 8 减缩模型和完整模型的准确性对比

Fig. 8 Accuracy comparison of simplified and full models

表 4 列出了利用近似理论解析表达式和优化算法分别得到的前三阶共振对应的最佳电学参数值,可以看出两种方法得到的电感值和电阻值相差不大,轻微差异对减振结果并没有显著影响,在工程实际中使用近似理论解析表达式求解最佳电学参数即可满足优化设计要求。

#### 4.4 低频减振特性

力电耦合超材料圆柱壳的减振效果可以通过对比分流电路控制前后系统的振速级得到,如图 10 所示。以压电片短路和开路情况(控制前)为参考,在分流电路中设置了不同电学参数实现了对不同模式的振动控制,电学参数的取值如表 4 所示。图 10 为



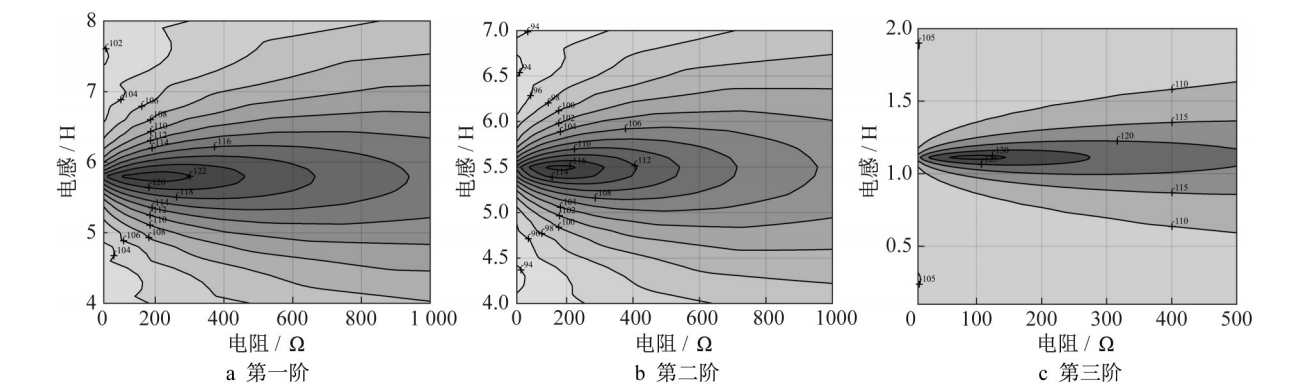


图 9 前三阶共振响应峰值随电感值和电阻值变化的规律

Fig. 9 Variation of response peaks near the first, second, and third resonant frequencies as inductance and resistance values change

表 4 谐振电路中两种电学参数优化方法结果对比

Tab. 4 Comparison of obtained electric parameters using theoretical method and optimization algorithm, respectively

	第一阶	第二阶	第三阶
近似解析值	电阻/ $\Omega$ $R=201.980\ 3$ 电感/H $L=5.794\ 8$	$R=171.595\ 0$ $L=5.487\ 9$	$R=96.474\ 1$ $L=1.114\ 1$
精确优化值	电阻/ $\Omega$ $R=202.764$ 电感/H $L=5.809\ 05$	$R=183.668$ $L=5.492\ 46$	$R=101.106$ $L=1.112\ 06$

力电耦合超材料圆柱壳的第一阶至第三阶模态的减

振结果。通过圆柱壳的振速级曲线可以看出,采用近似理论解析方法或优化算法得到的电学参数时,圆柱壳前三阶固有频率处共振峰值分别下降 26、25、28 dB,说明本文提出的针对壳体结构的减振方法在低频能够实现非常好的减振效果。从图中还能看出,近似解析公式和优化算法得到的电学参数实现的减振效果非常接近,说明两种方法均能得到最优的减振效果,另一方面也交叉验证了两种减振优化设计方法的有效性。

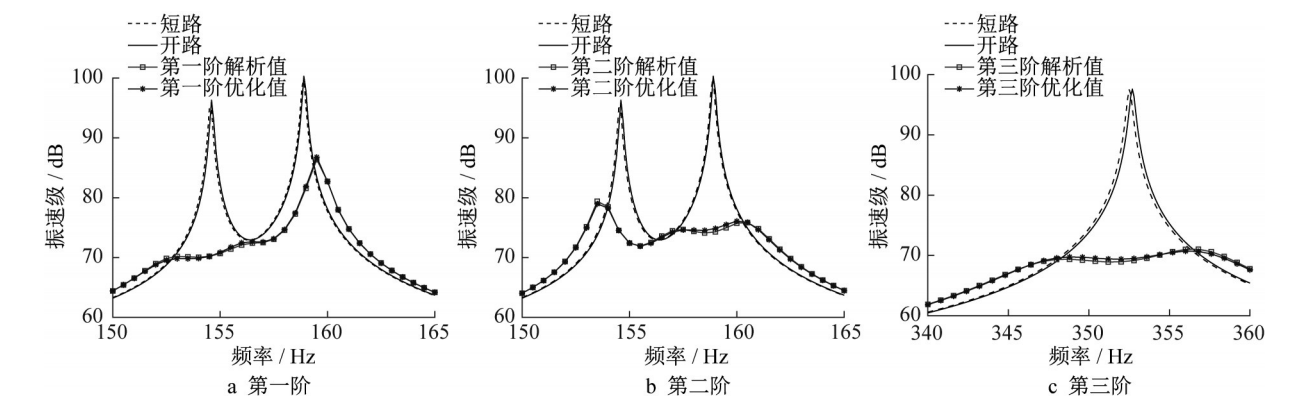


图 10 力电耦合超材料圆柱壳的前三阶振速级曲线图

Fig. 10 Vibration velocity curves of electro-mechanical metamaterial cylindrical shell, near the first, second and third resonance frequencies

## 5 结语

本文基于力电耦合超材料发展了一种圆柱壳结构的低频减振方法。提出了基于模态综合法的力电耦合系统减缩模型,并对减缩模型的准确性进行了修正;通过分析有限力电耦合超材料圆柱壳的振动传递特性,揭示了其中的禁带阻波效应,分析了电感和电阻参数对禁带效果的影响规律,表明通过优化

设计电感和电阻值能够实现低频振动抑制;提出了面向低频减振的电感和电阻参数优化设计方法;以复杂双层环肋圆柱壳为对象,分别针对其前三阶共振进行减振设计,均得到了超过 25 dB 的振动抑制效果,验证了基于力电耦合超材料的低频减振方法的有效性。本文提出的低频减振方法具有主动可调、引入附加质量少等优点,在航空航天以及水下装备壳体的减振降噪方面有广泛应用前景。

## 作者贡献声明:

易凯军:研究内容制定、研究指导、经费支持、论文写作和修改。

尹丹杰:模型建立、数值仿真、论文写作。

张安付:研究指导、论文修改。

朱睿:研究指导、论文修改。

## 参考文献:

- [1] GOLDMAN R L. Mode shapes and frequencies of clamped-clamped cylindrical shells [J]. *AIAA Journal*, 1974, 12(12): 1755.
- [2] BOILY S, CHARRON F. The vibroacoustic response of a cylindrical shell structure with viscoelastic and poroelastic materials [J]. *Applied Acoustics*, 1999, 58(2): 131.
- [3] JI H, HUANG Y Q, NIE S L, *et al.* Research on semi-active vibration control of pipeline based on magneto-rheological damper [J]. *Applied Sciences*, 2020, 10(7): 2541.
- [4] ZHANG J J. The optimization analysis on the vibration control of cylindrical shell with dynamic vibration absorber attached [J]. *Vibroengineering Procedia*, 2018, 20(2): 5.
- [5] 王献忠,孙龙泉,姚熊亮. 含阻振质量基座的圆柱壳隔振特性[J]. *华中科技大学学报(自然科学版)*, 2012, 40(5): 50.  
WANG Xianzhong, SUN Longquan, YAO Xiongliang. Isolation characteristics of cylindrical shell with blocking mass bass [J]. *Huazhong University of Science and Technology*, 2012, 40(5): 50.
- [6] HUANG X C, ZHANG Z Y, ZHANG Z H, *et al.* Multi-channel active vibration isolation for the control of underwater sound radiation from a stiffened cylindrical structure: a numerical study [J]. *Journal of Vibration and Acoustics*, 2012, 134(1): 011012.
- [7] BAZ A M, RO J J. The concept and performance of active constrained layer damping treatments [J]. *Sound and Vibration*, 1994, 28(3): 18.
- [8] RAY M C, BAZ A. Optimization of energy dissipation of active constrained layer damping treatments of plates [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1997, 208(3): 391.
- [9] PLATTENBURG J, DREYER J T, SINGH R. Vibration control of a cylindrical shell with concurrent active piezoelectric patches and passive cardboard liner [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2016, 91(7): 422.
- [10] JIN Y, JIA X Y, WU Q Q, *et al.* Design of cylindrical honeycomb sandwich meta-structures for vibration suppression [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2022, 163(4): 108075.
- [11] GRIFF J A B, RADE D A. Vibration and noise control using shunted piezoelectric transducers: A review [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2018, 112: 359.
- [12] THORP O, RUZZENE M, BAZ A. Attenuation and localization of wave propagation in rods with periodic shunted piezoelectric patches [J]. *Smart Materials and Structures*, 2001, 10: 979.
- [13] SPADONI A, RUZZENE M, CUNEFARE K. Vibration and wave propagation control of plates with periodic arrays of shunted piezoelectric patches [J]. *Journal of Intelligent Materials Systems and Structures*, 2009, 20: 979.
- [14] CASADEI F, RUZZENE M, DOZIO L, *et al.* Broadband vibration control through periodic arrays of resonant shunts: experimental investigation on plates [J]. *Smart Materials and Structures*, 2010, 19(1): 015002.
- [15] AIROLDI L, RUZZENE M. Design of tunable acoustic metamaterials through periodic arrays of resonant shunted piezos [J]. *New Journal of Physics*, 2011, 13(11): 113010.
- [16] SUGINO C, RUZZENE M, ERTURK A. An analytical framework for locally resonant piezoelectric metamaterial plates [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2020, 182: 281.
- [17] ZHANG H, WEN J H, XIAO Y. Sound transmission loss of metamaterial thin plates with periodic subwavelength arrays of shunted piezoelectric patches [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2015, 343: 104.
- [18] CHEN S B, WANG G. Wave propagation in beams with anti-symmetric piezoelectric shunting arrays [J]. *Chinese Physics B*, 2016, 25(3): 034301.
- [19] LI F M, ZHANG C Z, LIU C C. Active tuning of vibration and wave propagation in elastic beams with periodically placed piezoelectric actuator/sensor pairs [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2017, 393(Complete): 14.
- [20] YI K J, OUISSE M, SADOULET-REBOUL E, *et al.* Active metamaterials with broadband controllable stiffness for tunable band gaps and non-reciprocal wave propagation [J]. *Smart Materials Structures*, 2019, 28: 065025.
- [21] YI K J, MONTEIL M, COLLET M, *et al.* Smart metamaterial-based systems for transient elastic wave energy harvesting [J]. *Smart Materials and Structures*, 2017, 26(3): 035040.
- [22] THOMAS O, DUCARNE J, DEU J F. Performance of piezoelectric shunts for vibration reduction [J]. *Smart Materials and Structures*, 2011, 21(1): 015008.