第 50 卷第 12 期
2022 年 12 月

同济大学学报(自然科学版)
JOURNAL OF TONGJI UNIVERSITY(NATURAL SCIENCE)

Vol. 50 No. 12
Dec. 2022

文章编号: 0253-374X(2022)12-1825-08 **DOI:** 10. 11908/j. issn. 0253-374x. 21241

稀疏图的*k*-frugal列表染色

房启明,张 莉

(同济大学 数学科学学院,上海 200092)

摘要: 图G的k-frugal列表色数一般记作$\mathrm{ch}_k(G)$,关于稀疏的k-frugal列表色数上界,有以下3个结论:$\forall k\geqslant 3$,如果图G满足$\mathrm{mad}(G)<3-a$(其中$0<a\leqslant\frac{1}{3}$)且$\Delta(G)\geqslant k+\frac{3}{a}-3$,则$\mathrm{ch}_k(G)=\left\lceil\frac{\Delta}{k-1}\right\rceil+1$;$\forall k\geqslant 4$,如果图G满足$\mathrm{mad}(G)<3$,则$\mathrm{ch}_k(G)\leqslant\left\lceil\frac{\Delta}{k-1}\right\rceil+2$;$\forall k\geqslant 4$,如果图G满足$\mathrm{mad}(G)<\frac{10}{3}$,则$\mathrm{ch}_k(G)\leqslant\left\lceil\frac{\Delta}{k-1}\right\rceil+3$。

关键词: 图论;染色;最大平均度;平面图;围长

中图分类号: o157.5 **文献标志码:** A

k-frugal List Coloring of Sparse Graphs

FANG Qiming, ZHANG Li

(School of Mathematical Sciences, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: The k-frugal choice number of graph G is denoted by $\mathrm{ch}_k(G)$. In this paper, we prove the following theorem. Let G be a graph with maximum average degree $\mathrm{mad}(G)<3-a\,(0<a\leqslant\frac{1}{3})$ and maximum degree $\Delta(G)\geqslant k+\frac{3}{a}-3$, then $\mathrm{ch}_k(G)=\left\lceil\frac{\Delta}{k-1}\right\rceil+1$ for any integer $k\geqslant 3$; Let G be a graph with maximum average degree $\mathrm{mad}(G)<3$, then $\mathrm{ch}_k(G)\leqslant\left\lceil\frac{\Delta}{k-1}\right\rceil+2$ for any integer $k\geqslant 4$; Let G be a graph with maximum average degree $\mathrm{mad}(G)<\frac{10}{3}$, then $\mathrm{ch}_k(G)\leqslant\left\lceil\frac{\Delta}{k-1}\right\rceil+3$ for any integer $k\geqslant 4$.

Key words: graph theory; coloring; maximum average degree; planar graph; girth

本文仅讨论无向的有限的简单图,未提及的定义和定理参见文献[1]。对于一个点v,用$d_G(v)$、$N_G(v)$(不造成歧义的情况下可以简写为$d(v)$、$N(v)$)来定义点v的度数和点v的邻点集合。对于图G,分别用$V(G)$、$E(G)$、$\Delta(G)$、$\delta(G)$和$g(G)$来定义它的点集、边集、最大度、最小度和围长(图G中最小圈的长度)。将平面图嵌入平面后,用$F(G)$表示其面集,一个k^+-点(或k^--点)v表示点v的度数至少为k(或至多为k)。类似的,用$d_G(f)$表示面f的度数,一个k^+-面(或k^--面)f表示点f的度数至少为k(或至多为k)。

图G的一个正常k-染色指的是从点集$V(G)$到颜色集$\{1,2,...,k\}$的映射c,使得图G中任意相邻的两点均不同色。用$c(v)$定义点v的颜色,用$C_i(v)$定义在$N(v)$中出现过i次的颜色所构成的集合。

图G的最大平均度一般记作$\mathrm{mad}(G)$,定义为

$$\mathrm{mad}(G)=\max\left\{\frac{2|E(H)|}{|V(H)|}\right\}H\subseteq G\}。$$

图的frugal-染色首先由Hind等人在文献[2]中提出。在图G的一个点染色c中,如果每种颜色在点v的邻点中至多出现$k-1$次,就称点v是k-frugal的。如果图G中每个点都是k-frugal的,就称图G是k-frugal可染的,这个染色称作图G的k-frugal染色。图G的k-frugal色数,记作$\chi_k(G)$,指的是使图G满足k-frugal可染所需的最少的颜色数量。由定义易知,$\chi_k(G)\geqslant\left\lceil\frac{\Delta}{k-1}\right\rceil+1$。

图的frugal-染色可以推广到列表染色上。设L为一个函数,它将图G中的每个点v都映射到一个由一些正整数构成的集合$L(v)$上,$L(v)$称作点v的列表。如果一个染色c: $V\rightarrow N$满足$c(v)\in L(v)$对于所有$v\in V$都成立,就称这个染色为图G关于L的列表染色,或L-染色,并且称图G是L-可染的。如果图G中每个

收稿日期:2021-06-06
基金项目:国家自然科学基金(11871377)
第一作者:房启明(1992—),男,博士生,主要研究方向为图论。E-mail:fangqiming@tongji. edu. cn
通信作者:张莉(1978—),女,副教授,硕士生导师,理学博士,主要研究方向为图论。E-mail:lizhang@tongji. edu. cn

点的列表长度均满足$|L(v)|=l$,就称这个列表为图G的l-列表。如果对于任意l-列表L,图G都是k-frugal L-可染的,则满足这个条件的最小正整数l就称作图G的k-frugal列表色数,记作$ch_k(G)$。

图G的linear k-染色是图的一种特殊的正常k-染色。linear染色的定义是由Yuster[3]首先提出的,要求图G中由任意两种颜色导出的子图,均为若干条内部不相交的路。图G的linear-色数,记作$lc(G)$,指的是使图G满足linear k-染色所需要的最小整数k。

显然,一个linear染色必定为3-frugal染色,但是反过来并不一定成立,因为linear染色中不允许双色圈的存在。更多关于linear染色的结果参见文献[4-9]。

图G的2-distance k-染色是图的另一种特殊的正常k-染色。2-distance染色的定义是由Wegner[10]首先提出的,要求图G中距离小于等于2的两个点均不同色。图G的2-distance-色数,指的是使图G满足2-distance k-染色所需要的最小整数k。

显然,2-distance染色的定义2-frugal染色的定义相同。更多关于2-distance染色的结果参见文献[11-24]。

关于一般的k-frugal染色,Amini等人在文献[25]中证明了对于任意$k\geqslant 1$,平面图G都满足

$$\chi_k\leqslant\begin{cases}\left\lceil\dfrac{\Delta-1}{k-1}\right\rceil+2, & g\geqslant 7\text{且}\Delta\geqslant 1\,190+2k\\ \left\lceil\dfrac{\Delta+4}{k-1}\right\rceil+6, & g\geqslant 6\\ \left\lceil\dfrac{\Delta+10}{k-1}\right\rceil+6, & g\geqslant 5\end{cases}$$

Fang和Zhang在在文献[26]中证明了:对于任意$k\geqslant 4$,如果平面图G不含4-圈和5-圈,则$ch_k(G)\leqslant\left\lceil\dfrac{\Delta}{k-1}\right\rceil+5$。对于任意$k\geqslant 4$,如果平面图G不含4-圈和5-圈且最大度满足$\Delta\geqslant 3k+8$,则$ch_k(G)\leqslant\left\lceil\dfrac{\Delta}{k-1}\right\rceil+2$。

1 主要结论

下面讨论稀疏图的k-frugal列表染色,并得出如下结论。

定理1.1. $\forall k\geqslant 3$,如果图G满足$\mathrm{mad}(G)<3-a$(其中$0<a\leqslant\dfrac{1}{3}$)且$\Delta(G)\geqslant k+\dfrac{3}{a}-3$,则$ch_k(G)=\left\lceil\dfrac{\Delta}{k-1}\right\rceil+1$。

定理1.2. $\forall k\geqslant 4$,如果图G满足$\mathrm{mad}(G)<3$,则$ch_k(G)\leqslant\left\lceil\dfrac{\Delta}{k-1}\right\rceil+2$。

定理1.3. $\forall k\geqslant 4$,如果图G满足$\mathrm{mad}(G)<\dfrac{10}{3}$,则$ch_k(G)\leqslant\left\lceil\dfrac{\Delta}{k-1}\right\rceil+3$。

对于平面图G,其最大平均度和围长之间满足$\mathrm{mad}(G)<\dfrac{2g(G)}{g(G)-2}$,因此由上述3个定理,可以得到以下推论。

推论1.1. $\forall k\geqslant 3$,如果图G的围长满足$g(G)\geqslant\left\lceil\dfrac{6-2a}{1-a}\right\rceil$(其中$0<a\leqslant\dfrac{1}{3}$),最大度满足$\Delta(G)\geqslant k+\dfrac{3}{a}-3$,则$ch_k(G)=\left\lceil\dfrac{\Delta}{k-1}\right\rceil+1$。

推论1.2. $\forall k\geqslant 4$,如果图G的围长满足$g(G)\geqslant 6$,则$ch_k(G)\leqslant\left\lceil\dfrac{\Delta}{k-1}\right\rceil+2$。

推论1.3. $\forall k\geqslant 4$,如果图G的围长满足$g(G)\geqslant 5$,则$ch_k(G)\leqslant\left\lceil\dfrac{\Delta}{k-1}\right\rceil+3$。

2 定理1.1的证明

反证法,假设定理不成立,图G_0是一个反例,即平面图G_0满足$\mathrm{mad}(G)<3-a$,$\Delta(G_0)\geqslant k+\dfrac{3}{a}-3$,且$ch_k(G_0)>\left\lceil\dfrac{\Delta(G_0)}{k-1}\right\rceil+1$。设$L$为一个$\left(\left\lceil\dfrac{\Delta(G_0)}{k-1}\right\rceil+1\right)$-列表,图$G_0$在此列表下不可染。在本节的证明中,约定$\Delta(G_0)$即为$\Delta$。取集合$\mathcal{G}=\{G\ \}G\subseteq G_O,\Delta(G)\leqslant\Delta(G_0)=\Delta,\mathrm{mad}(G)\leqslant\mathrm{mad}(G_0),ch_k(G)>\left\lceil\dfrac{\Delta(G_0)}{k-1}\right\rceil+1\}$,由$G_O\in\mathcal{G}$知该集合不是空集。那么,在此集合中取边数最小的图$G$,则图$ch_k(G)>\left\lceil\dfrac{\Delta(G_0)}{k-1}\right\rceil+1$,从而知道,对于$\left(\left\lceil\dfrac{\Delta(G_0)}{k-1}\right\rceil+1\right)$-列表$L$,图$G$在此列表下是不可染的,但是其任意真子图都是$L$-可染的。

下面首先证明图G的一些结构,然后通过Discharging的方法来证明这个结论。

引理2.1. $\delta(G)\geqslant 2$。

证明: 反证法,假设图 G 含有一个 1-点 v。由图 G 的定义知,$G-v$ 有一个 k-frugal L-染色 c。设 $N_G(v)=u$,此时若想把染色扩充到图 G 上,点 v 禁用的颜色为 $c(u)$ 以及在 $N_G(u)$ 中出现过 $k-1$ 次的颜色(即 $C_{k-1}(u)$)。因此禁用的颜色至多为

$$1+\left\lfloor\frac{\mathrm{d}(u)-1}{k-1}\right\rfloor=\left\lceil\frac{\mathrm{d}(u)}{k-1}\right\rceil<\left\lceil\frac{\Delta}{k-1}\right\rceil+1$$

因此,可以将染色扩充到图 G 上,矛盾。

引理 2.2. 对于图 G 中任意一个 $(k-1)^{-}$-点 v,设 $N_G(v)=\{v_1,v_2,\cdots,v_x\}$,则有 $\sum_{i=1}^{x}\left\lceil\frac{\mathrm{d}(v_i)}{k-1}\right\rceil\geqslant\left\lceil\frac{\Delta}{k-1}\right\rceil+1$。

证明: 反证法,假设引理不成立,则 $\sum_{i=1}^{x}\left\lceil\frac{\mathrm{d}(v_i)}{k-1}\right\rceil<\left\lceil\frac{\Delta}{k-1}\right\rceil+1$。

由图 G 的定义知,$G-v$ 有一个 k-frugal L-染色 c。此时若想把染色扩充到图 G 上,点 v 禁用的颜色为诸 $c(v_i)$ 以及在 $N_G(v_i)$ 中出现过 $k-1$ 次的颜色(即 $C_{k-1}(v_i)$)。因此禁用的颜色至多为

$$x+\sum_{i=1}^{x}\left\lfloor\frac{\mathrm{d}(v_i)-1}{k-1}\right\rfloor=\sum_{i=1}^{x}\left\lceil\frac{\mathrm{d}(v_i)}{k-1}\right\rceil<\left\lceil\frac{\Delta}{k-1}\right\rceil+1$$

这样就可以将染色扩充到图 G 上,矛盾。

为了方便证明,下面给出一些定义。

如果一个 2-点 v 和另外一个 2-点相邻,就称其为轻 2-点,否则就称为非轻 2-点。设 v 为一个 2-点,$N_G(v)=\{v_1,v_2\}$ 且 $\mathrm{d}(v_1)\leqslant k-1$,则由引理 2.2,$\mathrm{d}(v_2)\geqslant\Delta-(k-2)\geqslant k+\frac{3}{a}-3-(k-2)=\frac{3-a}{a}$。定义$(\frac{3-a}{a})^{+}$-点为 Δ^{ε}-点。

下面通过 Discharging 的方法得到一个矛盾。给每个点 v 赋初始权 $\omega(v)=d(v)$,因此有

$$\sum_{x\in V}\omega(x)=2|E|\leqslant\mathrm{mad}(G)\times|V|$$

对于每个 $x\in V$,都通过特定的权转移规则(权只能从一个元素转移到另一个元素,故总和不变),得到一个新权 $\omega^{*}(x)$,因为在权转移的过程中总和不变,所以仍有

$$\sum_{x\in V}\omega^{*}(x)=2|E|$$

如果在权转移后,得到 $\omega^{*}(x)>\mathrm{mad}(G)$ 对于所有 $x\in V$ 均成立,则有

$$\sum_{x\in V}\omega^{*}(x)>\mathrm{mad}(G)\times|V|$$

这样就得到一个矛盾,从而定理得证。

下面给出权转移规则,Discharging 规则:

每个 3^{+}-点 v 转移 $\frac{\mathrm{d}(v)-(3-a)}{\mathrm{d}(v)}$ 到相邻的 2-点。下面来验证 $\omega^{*}(x)\geqslant 3-a$ 对于所有 $x\in V$ 均成立。对于 3^{+}-点 v,容易验证 $\omega^{*}(v)\geqslant 3-a$。

下面来讨论 2-点,对于轻 2-点 v,容易验证 $\omega^{*}(v)\geqslant 2+\frac{\left\lfloor\frac{3-a}{a}-(3-a)\right\rfloor}{\frac{3-a}{a}}=2+(1-a)=3-a$。

对于非轻 2-点 v,设 $N_G(v)=\{x,y\}$ 且 $3\leqslant\mathrm{d}(x)\leqslant\mathrm{d}(y)$,则由引理 2.2 知,$\left\lceil\frac{\mathrm{d}(x)}{k-1}\right\rceil+\left\lceil\frac{\mathrm{d}(y)}{k-1}\right\rceil\geqslant\left\lceil\frac{\Delta}{k-1}\right\rceil+1$。

设 $\left\lceil\frac{\mathrm{d}(x)}{k-1}\right\rceil=p+1$,即 $p(k-1)+1\leqslant\mathrm{d}(x)\leqslant(p+1)(k-1)$;设 $\left\lceil\frac{\mathrm{d}(y)}{k-1}\right\rceil=q+1$,即 $q(k-1)+1\leqslant\mathrm{d}(y)\leqslant(q+1)(k-1)$,则 $\left\lceil\frac{\Delta}{k-1}\right\rceil+1\leqslant p+q+2$,故 $\Delta\leqslant(p+q+1)(k-1)$。可以得到 $\mathrm{d}(x)+\mathrm{d}(y)-2\geqslant(p+q)(k-1)\geqslant\Delta-(k-1)$,即 $\mathrm{d}(x)+\mathrm{d}(y)\geqslant\Delta-k+3=\frac{3}{a}$。

现在有 $\omega^{*}(v)\geqslant 2+\frac{\mathrm{d}(x)-(3-a)}{\mathrm{d}(x)}+\frac{\mathrm{d}(y)-(3-a)}{\mathrm{d}(y)}=4-(3-a)(\frac{1}{\mathrm{d}(x)}+\frac{1}{\mathrm{d}(y)})$,由 $3\leqslant\mathrm{d}(x)\leqslant d(y)$ 知,$\mathrm{d}(x)=3$ 时 $\omega^{*}(v)$ 取得最小值,又由 $\mathrm{d}(y)\geqslant\frac{3}{a}-\mathrm{d}(x)$,从而,$\omega^{*}(v)\geqslant 4-(3-a)(\frac{1}{3}+\frac{1}{\frac{3}{a}-3})$。下面希望证明 $\omega^{*}(v)\geqslant 3-a$。令

$$f(a)=4-(3-a)\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{\frac{3}{a}-3}\right)-(3-a)=\frac{a}{3}\times\frac{1-3a}{1-a}$$

而当 $0<a\leqslant\frac{1}{3}$ 时 $f(a)\geqslant 0$,此即对于任意非轻 2-点 v,有 $\omega^{*}(v)\geqslant 3-a$。

综上,得到了一个矛盾,定理得证。

3 定理1.2的证明

反证法,假设定理不成立,图G取边数最小的极小反例,则图$ch_k(G)>\left\lceil\frac{\Delta(G_0)}{k-1}\right\rceil+2$。设$L$为一个$(\left\lceil\frac{\Delta(G_0)}{k-1}\right\rceil+2)$-列表,则图$G$在此列表下不是$k$-frugal可染的,但是其任意真子图都是$L$-可染的。

下面首先证明图G的一些结构,然后通过discharging的方法来证明这个结论。

引理3.1. $\delta(G)\geqslant 2$。

证明: 证明方法与引理2.1相同。

引理3.2. G中不含与3^--点相邻的2-点。

证明: 假设定理不成立,G中存在一个2-点v,且其与一个3^--点u相邻。由于图G为极小反例,$G-v$有一个k-frugal L-染色c。设$N_G(v)=\{u,w\}$,则v禁用的颜色为$c(u)$,$c(w)$以及在$N_G(w)$中出现过$k-1$次的颜色(i. e. $C_{k-1}(w)$),所以点v禁用的颜色至多为

$$1+1+\left\lfloor\frac{\mathrm{d}(w)-1}{k-1}\right\rfloor=\left\lceil\frac{\mathrm{d}(w)}{k-1}\right\rceil+1\leqslant\left\lceil\frac{\Delta}{k-1}\right\rceil+1,$$

因此,可以将染色c扩充到图G上,矛盾。

引理3.3. G中不含与3个2-点相邻的4-点。

证明: 假设定理不成立,G中含有一个4-点v,且其与3个2-点x,y,z相邻。设x_1,y_1,z_1分别为x,y,z的另一个邻点,v_1为v的第4个邻点。由于G为极小反例,$G-\{v,x,y,z\}$有一个k-frugal L-染色c。设点$w\in\{v,x,y,z\}$,则w禁用的颜色为$c(w_1)$以及在$N_G(w_1)$出现过$k-1$次的颜色(i. e. $C_{k-1}(w_1)$),因此点w禁用的颜色为

$$1+\left\lfloor\frac{\mathrm{d}(w_1)-1}{k-1}\right\rfloor=\left\lceil\frac{\mathrm{d}(w_1)}{k-1}\right\rceil\leqslant\left\lceil\frac{\Delta}{k-1}\right\rceil,$$

设$L^*(w)=L(w)\backslash(\{c(w_1)\}\cup C_{k-1}(w_1))$,则$|L^*(w)|\geqslant 2$,其中,$w\in\{v,x,y,z\}$。

首先用$c(x)\in L^*(x)\backslash\{c(v_1)\}$中的颜色染$x$,用$c(v)\in L^*(v)\backslash\{c(x)\}$中的颜色染$v$,用$c(y)\in L^*(y)\backslash\{c(v)\}$中的颜色染$y$,用$c(z)\in L^*(z)\backslash\{c(v)\}$中的颜色染$z$。容易验证这是图$G$的一个$k$-frugal L-染色,矛盾。

引理3.4. G中不含与5个2-点相邻的5-点。

证明: 假设定理不成立,G中含有一个5-点v,且$N_G(v)=\{x_1,x_2,\cdots,x_5\}$,$d_G(x_i)=2$,$y_i$为$x_i$的另一个邻点(其中$i=1,2,\cdots,5$)。由于$G$为极小反例,$G\backslash\{v,x_1,x_2,\cdots,x_5\}$有一个$k$-frugal L-染色c。$\forall 1\leqslant i\leqslant 5$,点$x_i$禁用的颜色为$c(y_i)$和在$N_G(y_i)$中出现过$k-1$次的颜色(i. e. $C_{k-1}(y_i)$)。设$L^*(x_i)=L(x_i)\backslash(\{c(y_i)\}\cup C_{k-1}(y_i))$,易得$|L^*(x_i)|\geqslant\left\lceil\frac{\Delta}{k-1}\right\rceil+2-(1+\left\lfloor\frac{d(y_i)-1}{k-1}\right\rfloor)\geqslant 2$。对于点$v$,易得$|L(v)|\geqslant\left\lceil\frac{\Delta}{k-1}\right\rceil+2\geqslant 3$。

下面将染色c扩充到图G上。

首先用$L^*(x_1)$中的颜色染x_1,这个颜色记作a;然后用$L^*(x_2)\backslash\{a\}$中的颜色染x_2,这个颜色记作$c(x_2)$;用$L^*(v)\backslash\{a,c(x_2)\}$中的颜色染$v$,这个颜色记作$b$;最后用$L^*(x_i)\backslash\{b\}$中的颜色染$x_i$,其中$i=3,4,5$。容易验证当$c(x_3)=c(x_4)=c(x_5)=a$和$c(x_3)=c(x_4)=c(x_5)=c(x_2)$均不成立的时候,这个染色为图$G$的$k$-frugal L-染色。不失一般性,假定$L^*(x_i)=\{a,b\}$且$c(x_i)=a$对于$i=3,4,5$均成立。

如果$L^*(x_1)\neq\{a,b\}$,那么可以用$L^*(x_1)\backslash\{a\}$中的颜色给x_1重新染色,容易验证这是图G的k-frugal L-染色。

下面假设$L^*(x_1)=\{a,b\}$。重新给x_1和x_5染上颜色b,用$c(v)\in L(v)\backslash\{a,b\}$中的颜色重新染$v$,用$L^*(x_2)\backslash\{c(v)\}$中的颜色重新染$x_2$,容易验证这是图$G$的一个$k$-frugal L-染色,矛盾。

接下来通过discharging的方法来获得一个矛盾,首先给每个点v赋初始权$\omega(v)=d(v)$,设权转移后得到的新权围$\omega^*(v)$。

下面给出权转移规则,每个4^+-点v转移$\frac{1}{2}$到相邻的2-点。

下面来验证$\omega^*(x)\geqslant 3$对于所有$x\in V$均成立。

设v为一个k-点。

如果$k\geqslant 6$,则$\omega(v)\geqslant d(v)-\frac{1}{2}d(v)=\frac{1}{2}d(v)\geqslant 3$。

如果$k=5$,由引理3.4,5点之至多只能与4个2-点相邻,则$\omega(v)\geqslant 5-4\times\frac{1}{2}=3$。

如果$k=4$,由引理3.3,4点之至多只能与2个2-点相邻,则$\omega(v)\geqslant 4-2\times\frac{1}{2}=3$。

如果$k=3$,由引理3.2,3点之不与2-点相邻,则

$\omega(v)\geqslant 3$。

如果$k=2$，由引理3.2，2-点只能与4^+-点相邻，则$\omega(v)\geqslant 2+2\times\frac{1}{2}=3$。

综上，得到了一个矛盾，定理得证。

4　定理1.3的证明

反证法，假设定理不成立，图G取边数最小的极小反例，则图$\mathrm{ch}_k(G)>\left\lceil\frac{\Delta(G_0)}{k-1}\right\rceil+3$。设$L$为一个$(\left\lceil\frac{\Delta(G_0)}{k-1}\right\rceil+3)$-列表，则图$G$在此列表下不是$k$-frugal可染的，但是其任意真子图都是$L$-可染的。

下面首先证明图G的一些结构，然后通过discharging的方法来证明这个结论。

引理4.1.　$\delta(G)\geqslant 2$。

证明：　证明方法与引理2.1相同。

引理4.2.　对于图G中任意一个$(k-1)^-$-点v，设$N_G(v)=\{v_1,v_2,\cdots,v_x\}$，则有$\sum_{i=1}^{x}\left\lceil\frac{d(v_i)}{k-1}\right\rceil\geqslant\left\lceil\frac{\Delta}{k-1}\right\rceil+3$。

证明：　证明方法与引理2.2相同。

引理4.3.　若v为2-点且$N_G(v)=\{\mathrm{u},\mathrm{w}\}$，$\mathrm{d(u)}\leqslant\mathrm{d(w)}$，则$d(u)\geqslant 2(k-1)+1\geqslant 7$。

证明：　假设$d(u)\leqslant 2(k-1)$，带入引理4.2，得$\mathrm{d(w)}>\Delta$，矛盾。

引理4.4.　若v为3-点，$N_G(v)=\{\mathrm{x},y,z\}$，且$\mathrm{d(x)}\leqslant\mathrm{d(y)}\leqslant\mathrm{d(z)}$，则$d(z)\geqslant d(y)\geqslant k\geqslant 4$。

证明：　假设$d(y)\leqslant k-1$，带入引理4.2，得$\mathrm{d(z)}>\Delta$，矛盾。

引理4.5.　不存在与6个2-点相邻的7-点。

证明：　设v为一个7-点，$N_G(v)=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,u\}$，其中$d(x_i)=2$，$N_G(x_i)=\{v,y_i\}(i=1,2,\cdots,6)$。

由图G的极小性，图$G-\{v,x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$有一个$k$-frugal L-染色c。此时点v被禁用的颜色为$c(u)$以及在$N_G(u)$中出现$k-1$次的颜色。因此点v被禁用的颜色至多为

$$1+\left\lfloor\frac{\mathrm{d}(u)-1}{k-1}\right\rfloor=\left\lceil\frac{\mathrm{d}(u)}{k-1}\right\rceil\leqslant\left\lceil\frac{\Delta}{k-1}\right\rceil$$

设点v的可用颜色集为$L^*(v)$，则$|L^*(v)|\geqslant 3$。

同理可得

点$x_i\in\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6\}$的可用颜色集为$|L^*(x_i)|\geqslant 3$。

下面将这个染色c扩充到图G上。

给x_1染颜色$c_1\in L^*(x_1)\setminus\{c(u)\}$，给$x_2$染颜色$c_2\in L^*(x_2)\setminus\{c(u),c_1\}$，给$v$染颜色$c_3\in L^*(v)\setminus\{c_1,c_2\}$。

给x_3染颜色$a_1\in L^*(x_3)\setminus\{c_3\}$，给$x_4$染颜色$b_1\in L^*(x_4)\setminus\{c_3,a_1\}$。

给x_5染颜色$a_2\in L^*(x_5)\setminus\{c_3\}$，给$x_6$染颜色$b_2\in L^*(x_6)\setminus\{c_3,a_2\}$。

因此，$a_1\neq b_1$，$a_2\neq b_2$，$c_1\neq c(u)$，$c_2\neq c(u)$。

集合$c_1,c_2,a_1,b_1,a_2,b_2,c(u)$中同种颜色至多出现3次，因此得到的染色为图$G$的一个$k$-frugal L-染色，矛盾。

引理4.6.　设k为正整数，$8\leqslant k\leqslant 9$，则不存在与k个2-点相邻的k-点。

证明：　这里不妨假设$k=9$，因为只要$k=9$成立，$k=8$的情况类似可证。

设点v为一个9-点，且与9个2-点相邻。$N_G(v)=\{x_1,x_2,\cdots,x_9\}$，$y_i$为点$x_i$异于点$v$的另一个邻点。由$G$的极小性，图$G-\{v,x_1,x_2,\cdots,x_9\}$有一个$k$-frugal L-染色c。

此时点x_i被禁用的颜色为$c(y_i)$以及在$N_G(y_i)$中出现$k-1$次的颜色，点v可以染其本身列表中的任意一种颜色。

设点v的可用颜色集为$L^*(v)$，点x_i的可用颜色集为$L^*(x_i)$（其中$i=1,2,\cdots,9$），则$|L^*(v)|=|L(v)|\geqslant 1+3=4$，$|L^*(x_i)|\geqslant 3$。

下面采用如下方式将这个染色c扩充到原图G上。

给x_1染$c(x_1)\in L^*(x_1)$，

给x_2染$c(x_2)\in L^*(x_2)\setminus\{c(x_1)\}$，

给x_3染$c(x_3)\in L^*(x_3)\setminus\{c(x_1),c(x_2)\}$，

给x_4染$c(x_4)\in L^*(x_4)$，

给x_5染$c(x_5)\in L^*(x_5)\setminus\{c(x_4)\}$，

给x_6染$c(x_6)\in L^*(x_6)\setminus\{c(x_4),c(x_5)\}$，

给x_7染$c(x_7)\in L^*(x_7)$，

给x_8染$c(x_8)\in L^*(x_8)\setminus\{c(x_7)\}$，

给x_9染$c(x_9)\in L^*(x_9)\setminus\{c(x_7),c(x_8)\}$，

此时，点x_1,x_2,x_3的颜色互不相同，点x_4,x_5,x_6的颜色互不相同，点x_7,x_8,x_9的颜色互不相同。

设$S=\bigcup_{i=1}^{9}\{c(x_i)\}$，则$3\leqslant|S|\leqslant 9$。

如果$L(v)\backslash S\neq\varnothing$,给点$v$染$c(v)\in L(v)\backslash S$,就可以把这个染色$c$扩充到图$G$上,矛盾。

下面设$L(v)\subseteq S$,对k进行分类讨论。

情况 1. 当 $k=4$ 时,$\left|L^*(v)\right|=\left|L(v)\right|=\left\lceil\frac{\Delta}{k-1}\right\rceil+3\geqslant 9\div 3+3=6$。

此时$L(v)$中必然存在3种颜色,这3种颜色在S中出现的次数均小于等于1。因为如果只有两种颜色在S中出现不超过一次的话,可以推出$S\geqslant 4\times 2+2\times 1=10$,矛盾。

而且,此时必然有$C_{k-1}(v)=C_3(v)\leqslant 1$,因为如果$|C_{k-1}(v)|\geqslant 2$,可以推出$S\geqslant 2\times 3+4\times 1=10$,矛盾。

此时不妨设$c(x_i)\in L(v)\cap C_1(v)$,首先擦掉$x_i$的颜色,然后给点$v$染$c(x_i)$,最后用集合$L^*(x_i)\backslash[\{c(x_i)\}\cup C_3(v)]$中的染色给点$x_i$染色,即可将染色扩充到图$G$上。

情况 2. 当 $k\geqslant 5$ 时,$\left|L^*(v)\right|=\left|L(v)\right|=\left\lceil\frac{\Delta}{k-1}\right\rceil+3\geqslant 4$。

根据前边的染色方法,得知$\forall c\in L(v)$,颜色c在集合S中出现的次数不超过3,即$C_4(v)=\varnothing$。

此时集合$L(v)$中至多有两种颜色在S中出现的次数等于3(不妨设这两种颜色为$\{1,2\}$),因为如果有3种颜色在S中出现的次数等于3,则可以推出$|S|\geqslant 3\times 3+1\times 1=10$,矛盾。

因此,$L(v)$中总有一种颜色,其在S中出现的次数小于等于2,不妨设这个颜色为$\{3\}$。

集合S中至多有两个点颜色为3,不妨设为$\{v_i, v_j\}$,首先擦掉这两个点的颜色,给点v染颜色3,然后给点v_i染集合$L^*(v_i)\backslash\{1,3\}$中的颜色,给点$v_j$染集合$L^*(v_j)\backslash\{2,3\}$中的颜色,容易验证此时染色满足5-frugal的条件,因此可以将这个染色扩充到图G上。矛盾。

为了方便下列引理的证明,给出几个定义。若一个3-点与3个4^+-点相邻,就称其为重3-点,反之称为轻3-点。若一个8-点与7个2-点和一个重3-点相邻,就称其为轻8-点。

引理4.7. 不存在与7个2-点和一个轻3-点相邻的8-点。

证明: 假设存在一个8-点v,其与7个2-点x_i $(i=1,2,\cdots,7)$和一个轻3-点x_8相邻,设$x_i(i=1,2,\cdots,7)$的另一个邻点为y_i,$N_G(x_8)=\{v, y_8^*, y_8^{**}\}$,其中$y_8^{**}$为$3^-$-点。由$G$的极小性,图$G-\{v, x_1, x_2, \cdots, x_8\}$有一个$k$-frugal L-染色c。

此时,点$x_i(i=1,2,\cdots,7)$被禁用的颜色为$c(y_i)$以及在$N_G(y_i)$中出现$k-1$次的颜色,点x_8被禁用的颜色为$c(y_8^*)$, $c(y_8^{**})$以及在$N_G(y_8^*)$中出现$k-1$次的颜色,点v可以染其本身列表中的任意一种颜色。

设点v的可用颜色集为$L^*(v)$,点x_i的可用颜色集为$L^*(x_i)$,则$\left|L^*(v)\right|=\left|L(v)\right|=\left\lceil\frac{\Delta}{k-1}\right\rceil+3$,$|L^*(x_i)|\geqslant 3$ $(i=1,2,\cdots,7)$,$|L^*(x_8)|\geqslant 2$。

下面将染色c扩充到原图G上。

给x_8染$c(x_8)\in L^*(x_8)$,

给x_1染$c(x_1)\in L^*(x_1)\backslash\{c(x_8)\}$,

给x_2染$c(x_2)\in L^*(x_2)\backslash\{c(x_8), c(x_1)\}$,

给x_3染$c(x_3)\in L^*(x_3)$,

给x_4染$c(x_4)\in L^*(x_4)\backslash\{c(x_3)\}$,

给x_5染$c(x_5)\in L^*(x_5)\backslash\{c(x_3), c(x_4)\}$,

给x_6染$c(x_6)\in L^*(x_6)$,

给x_7染$c(x_7)\in L^*(x_7)\backslash\{c(x_6)\}$,

此时,点x_8, x_1, x_2的颜色互不相同,点x_3, x_4, x_5的颜色互不相同,点x_6, x_7的颜色互不相同。

设$S=\bigcup_{i=1}^{8}\{c(x_i)\}$,则$3\leqslant|S|\leqslant 8$。

如果$L(v)\backslash S\neq\varnothing$,令$c(v)\in L(v)\backslash S$,就可以把这个染色扩充到图$G$上,矛盾。

下面不妨设$L(v)\subseteq S$,对k进行分类讨论

情况 1. 当 $k=4$ 时,$\left|L^*(v)\right|=\left|L(v)\right|=\left\lceil\frac{\Delta}{k-1}\right\rceil+3\geqslant 3+3=6$从而$|S|\geqslant L(v)\geqslant 6$。

此时$L(v)$中必然存在3种颜色,这3种颜色在S中出现的次数均小于等于1。因为如果只有两种颜色在S中出现不超过一次的话,可以推出$S\geqslant 4\times 2+2\times 1=10$,矛盾。

而且,此时必然有$C_{k-1}(v)=C_3(v)\leqslant 1$,因为如果$|C_{k-1}(v)|\geqslant 2$,可以推出$S\geqslant 2\times 3+4\times 1=10$,矛盾。

此时不妨设$c(x_i)\in L(v)\cap C_1(v)$,首先擦掉$x_i$的颜色,然后给点$v$染$c(x_i)$,最后用集合$L^*(x_i)\backslash[\{c(x_i)\}\cup C_3(v)]$中的染色给点$x_i$染色,即可将染色扩充到图$G$上。

情况 2. 当 $k\geqslant 5$ 时,$\left|L^*(v)\right|=\left|L(v)\right|=\left\lceil\frac{\Delta}{k-1}\right\rceil+3\geqslant 4$,从而$|S|\geqslant L(v)\geqslant 4$。

根据前边的染色方法,得知$\forall c\in L(v)$,颜色c在集

合S中出现的次数不超过3，即$C_4(v)=\varnothing$。

此时集合$L(v)$中至多有两种颜色在S中出现的次数等于3(不妨设这两种颜色为$\{1, 2\}$)，因为如果有3种颜色在S中出现的次数等于3，则可以推出$|S|\geqslant 3\times 3+1\times 1=10$，矛盾。

由于$L(v)\setminus\{1, 2, c(x_8)\}\neq\varnothing$，从该集合中任取一个颜色$c_1$，则集合$S$中至多有两个点的颜色为$c_1$，不妨设存在两个点的颜色为$c_1$(若只有一个点颜色为$c_1$，证明方法类似)，且这两个点均不为$x_8$。设这两个点为$\{v_i, v_j\}$。首先擦掉这两个点的颜色，给点$v$染颜色$c_1$，然后给点$v_i$染集合$L^*(v_i)\setminus\{c_1, 1\}$中的颜色，给点$v_j$染集合$L^*(v_j)\setminus\{c_1, 2\}$中的颜色，容易验证此时染色满足5-frugal的条件，因此可以将这个染色扩充到图G上。矛盾。

引理4.8.　不存在与两个轻8-点相邻的3-点。

证明：　由定义，得知与轻8-点相邻的3-点一定是重3-点。

设v为一个重3-点，u和w为与点v相邻的轻8-点，设$N_G(u)=\{v, x_1, x_2, \cdots, x_7\}$，$N_G(w)=\{v, x_1^*, x_2^*, \cdots, x_7^*\}$。

由G的极小性，图$G-\{u, v, w, x_1, x_2, \cdots, x_7, x_1^*, x_2^*, \cdots, x_7^*\}$有一个$k$-frugal L-染色c。

设$a\in\{u, v, w, x_1, x_2, \cdots, x_7, x_1^*, x_2^*, \cdots, x_7^*\}$的可用颜色列表为$L^*(a)$，容易得到$|L^*(v)|=|L^*(x_i)|=|L^*(x_i^*)|\geqslant 3$ $(i=1, 2, \cdots, 7)$，$|L^*(u)|=|L(u)|=\left\lceil\dfrac{\Delta}{k-1}\right\rceil+3$，$|L^*(w)|=|L(w)|=\left\lceil\dfrac{\Delta}{k-1}\right\rceil+3$。(方法类似上述引理，在此不再赘述。)

设$L^*(v)=\{a, b, c\}$，分别取$L_1^*(v)=\{a, b\}$，$L_2^*(v)=\{a, c\}$，$L_3^*(v)=\{b, c\}$，观察点$u, v, x_1, x_2, \cdots, x_7$，由引理4.7的证明过程，得知，如果一个8-点的列表长度为$\left\lceil\dfrac{\Delta}{k-1}\right\rceil+3$，8个邻点中有7个点的列表长度为3，有一个点的列表长度为2，那么总可以从其列表中选取适当的颜色，使得这个染色为正常的。因此基于上述点v的三种不同的列表，可以得到3种关于这8个点的染色方案，分别记作c_x，c_y，c_z。

上述3种染色方案中点v使用的列表均不完全相同，因此$c_x(v)$，$c_y(v)$，$c_z(v)$这3种颜色不可能完全相同，所以总可以找到两个方案，不妨设为c_x，c_y，满足$c_x(v)\neq c_y(v)$，这里不妨设$c_x(v)=a$，$c_y(v)=b$。

令$L_4^*(v)=\{a, b\}$，观察点$v, w, x_1^*, x_2^*, \cdots, x_7^*$，由引理4.7，可以得到关于这8个点的染色方案，记作c_0。

此时，如果$c_0(v)=a$，就用方案c_x给点$u, v, x_1, x_2, \cdots, x_7$染色，用方案$c_0$给点$v, w, x_1^*, x_2^*, \cdots, x_7^*$染色。

如果$c_0(v)=b$，就用方案c_y给点$u, v, x_1, x_2, \cdots, x_7$染色，用方案点$c_0$给点$v, w, x_1^*, x_2^*, \cdots, x_7^*$染色。

容易验证此时得到的染色为原图的一个k-frugal L-染色，因此可以将染色c扩充到图G上，矛盾。

这样就通过discharging的方法来获得一个矛盾，首先给每个点v赋初始权$\omega(v)=d(v)$，设权转移后得到的新权为$\omega^*(v)$。

下面给出权转移规则：

(R1)每个点均向相邻的2-点转移$\dfrac{2}{3}$。

(R2)除了轻8-点外，每个4^+-点向相邻的3-点转移$\dfrac{1}{6}$。

下边来验证上述过程，每个点的权均大于等于$\dfrac{10}{3}$。

设点v为一个k-点，因为图G中没有1-点，所以$k\geqslant 2$。

如果$k=2$，由(R1)容易验证$\omega^*(v)=2+\dfrac{2}{3}=\dfrac{10}{3}$。

如果$k=3$，分两种情况讨论。

若v不与轻8-点相邻，由引理4.4，v周围至少有两个4^+-点，由(R2)，容易验证$\omega^*(v)=3+\dfrac{1}{6}\times 2=\dfrac{10}{3}$。若$v$与轻8-点相邻，由引理4.7和引理4.8，点$v$必然为重3-点，且点$v$周围至多有一个轻8-点，因此除了这个轻8-点，点$v$周围还存在两个$4^+$-点，由(R2)，容易验证$\omega^*(v)=3+\dfrac{1}{6}\times 2=\dfrac{10}{3}$。

如果$4\leqslant k\leqslant 6$，由引理4.3，点v周围不存在2-点，由(R2)容易验证$\omega^*(v)\geqslant \mathrm{d}(v)-\dfrac{1}{6}\mathrm{d}(v)=\dfrac{5}{6}\mathrm{d}(v)\geqslant\dfrac{10}{3}$。

如果$k=7$，由引理4.5，点v周围至多存在5个2-点，由(R1)(R2)，容易验证$\omega^*(v)\geqslant 7-\dfrac{2}{3}\times 5-\dfrac{1}{6}\times 2=\dfrac{10}{3}$。

如果$k=8$,由引理4.6,点v周围至多存在7个2-点,下面分两种情况讨论。

若点v为轻8-点,由引理4.8,如果点v与7个2-点和1个3-点相邻,则这个3-点必定为重3-点,由(R2)可得轻8-点不需要给相邻的3-点转移权,容易验证$\omega^*(v)\geqslant 8-\frac{2}{3}\times 7=\frac{10}{3}$。若点$v$不为轻8-点,由(R2),容易验证$\omega^*(v)\geqslant 8-\frac{2}{3}\times 7=\frac{10}{3}$。

如果$k=9$,由引理3.6,点v周围至多存在8个2-点,容易验证$\omega^*(v)\geqslant 9-\frac{2}{3}\times 8-\frac{1}{6}=3.5>\frac{10}{3}$。

如果$k\geqslant 10$,容易验证$\omega^*(v)\geqslant d(v)-\frac{2}{3}d(v)=\frac{1}{3}d(v)\geqslant\frac{10}{3}$。

这样就得到一个矛盾,定理得证。

作者贡献声明:

房启明:提出研究问题,设计研究方案,起草论文;

张莉:对发表文章作最后的审阅和定稿,并在研究的过程中提出诸多启发性观点。

参考文献:

[1] BONDY J, MURTY U. Graph theory [M]. London:Springer , 2008.

[2] HIND H, MOLLOY M, REED B. Colouring a graph frugally [J]. Combinatorica, 1997, 17(4):469.

[3] YUSTER R. Linear coloring of graphs [J]. Discrete Mathematics, 1998, 185(1/3):293.

[4] CRANSTON D, YU G. Linear choosability of sparse graphs [J]. Discrete Mathematics, 2010, 311(17):1910.

[5] ESPERET L, MONTASSIER M, RASPAUD A. Linear choosability of graphs [J]. Discrete Mathematics, 2008, 308(17): 3938.

[6] BORODIN O, FON-DER F, KOSTOCHKA A, *et al*. Acyclic list 7-coloring of planar graphs [J]. Journal of Graph Theory, 2002, 40(2):83.

[7] COHEN N, HAVET F. Linear and 2-frugal choosability of graphs of small maximum average degree [J]. Graphs and Combinatorics, 2011, 27(6):831.

[8] ERDŐS P, RUBIN A, TAYLOR H. Choosability in graphs [EB/OL]. [2021-01-05]. http://emis.dsd.sztaki.hu/classics/Erdos/cit/46905032.htm

[9] RASPAUD A, WANG W. Linear coloring of planar graphs with large girth [J]. Discrete Mathematics, 2009, 309(18):5678.

[10] WEGNER G. Graphs with given diameter and a coloring problem [R]. Dortmund:University of Dortmund, 1977.

[11] AGNARSSON G, HALLDÓRSSON M. Coloring powers of planar graphs [J]. SIAM Journal on Discrete Mathematics, 2003, 16(4): 651.

[12] BORODIN O, IVANOVA A. 2-distance (Δ+2)-coloring of planar graphs with girth six and Δ⩾18 [J]. Discrete Mathematics, 2009,309(23/24): 6496.

[13] BORODIN O, IVANOVA A. 2-distance 4-colorability of planar subcubic graphs with girth at least 22 [J]. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 2012, 32(1):141.

[14] BONAMY M, CRANSTON D, POSTLE L. Planar graphs of girth at least five are square (Δ+2)-choosable [J]. Journal of Combinatorial Theory, Series B 134 (2019): 218.

[15] BONAMY M, LÉVÊQUE B, PINLOU A. Graphs with maximum degree Δ⩾17 and maximum average degree less than 3 are list 2-distance (Δ+2)-colorable [J]. Discrete Mathematics, 2014, 317: 19.

[16] BU Y, ZHU X. An optimal square coloring of planar graphs [J]. Journal of combinatorial optimization, 2012, 24(4): 580.

[17] CRANSTON D, KIM S. List-coloring the square of a subcubic graph [J]. Journal of Graph theory, 2008, 57(1): 65.

[18] CRANSTON D, ERMAN R, ŠKREKOVSKI R. Choosability of the square of a planar graph with maximum degree four [EB/OL]. [2021-05-05]. https://arxiv.org/abs/1303.5156.

[19] DONG W, LIN W. An improved bound on 2-distance coloring plane graphs with girth 5 [J]. Journal of Combinatorial Optimization, 2016, 32(2): 645.

[20] DONG W, XU B. 2-distance coloring of planar graphs with girth 5 [J]. Journal of Combinatorial Optimization, 2017, 34(4): 1302.

[21] HAVET F. Choosability of the square of planar subcubic graphs with large girth [J]. Discrete Mathematics, 2009, 309(11): 3553.

[22] HAVET F, VAN DEN HEUVEL J, MCDIARMID C, *et al*. List colouring squares of planar graphs [J]. Electronic Notes in Discrete Mathematics, 2007, 29: 515.

[23] VAN DEN HEUVEL J, MCGUINNESS S. Coloring the square of a planar graph [J]. Journal of Graph Theory, 2003, 42(2): 110.

[24] THOMASSEN C. The square of a planar cubic graph is 7-colorable [J]. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 2018, 128: 192.

[25] AMINI O, ESPERET L, HEUVEL J. Frugal colouring of graphs [EB/OL]. [2021-02-05]. https://arxiv. org/abs/0705.0422.

[26] FANG Q, ZHANG L. *k*-frugal list coloring of planar graphs without 4 and 5-cycles [J]. Journal of Shandong University (Natural Science), 2018, 53(10): 35.