

# 基于降维观测器与多胞体方法的执行器故障检测

朱芳来, 李铭伟

(同济大学 电子与信息工程学院, 上海 201804)

**摘要:** 针对具有执行器故障且状态方程和输出方程同时受到外部扰动影响的离散系统, 研究了降维观测器设计方法和基于多胞体理论的区间估计方法, 并在此基础上提出了基于区间估计的执行器故障检测方法。首先, 通过适当的状态等价变换, 将原系统分解成 2 个降维子系统, 使得一个子系统可以直接解耦干扰。然后, 在无执行器故障发生的前提下, 基于对干扰解耦的子系统, 提出了一种降维观测器设计方法, 实现了原系统状态的渐近收敛估计。其次, 针对具有干扰的子系统, 设计了 Luenberger 型观测器, 并结合多胞体理论, 提出了一种对可测输出的区间估计方法。之后, 基于可测输出的区间估计, 提出了一种残差的构造方法, 以此提出了一种执行器故障检测新方法。最后, 给出了仿真设计和分析, 验证了方法的有效性。

**关键词:** 执行器故障; 故障检测; 降维观测器; 区间估计; 多胞体方法; 残差构造。

中图分类号: TP11

文献标志码: A

## Actuator Fault Detection based on Combination of Reduced-order Observer and Zonotope Method

ZHU Fanglai, LI Mingwei

(College of Electronics and Information Engineering, Tongji University, Shanghai 201804, China)

**Abstract:** For the discrete-time system with actuator fault, and the state equation and output equation are affected by external disturbance, the reduced-order observer design method and interval estimation method based on the zonotope theory are studied, and an interval-observer-based actuator fault detection method is proposed. First, the original system is decomposed into two reduced-order subsystems by an appropriate state equivalent transformation, so that one subsystem can directly decouple the disturbance. Then, under the

assumption that system has no actuator fault, a reduced-order observer design method is proposed for the subsystem without disturbance to obtain the asymptotic convergence state estimation of the original system. Next, a Luenberger observer is designed for another subsystem, and by combining it with the zonotope theory, an interval estimation method for measurable output is proposed. Afterwards, based on the interval estimation of the measurable output, a new actuator fault detection method is proposed by constructing a new residual. Finally, a simulation example is given and analyzed to verify the effectiveness of the method.

**Key words:** actuator fault; fault detection; reduced-order observer; interval estimation; zonotope method; residual construction

故障检测与隔离可用来检测系统中故障的发生并发出警示信号。实际系统往往由于组件失灵或运行条件的改变, 系统的状态或性能发生意想不到的变化, 这种现象可以归为系统发生了故障。故障检测与隔离 (fault detection and isolation, FDI) 的目的是当系统存在故障时产生警报信号 (FD), 并找出故障发生的位置 (FI), 以便后续采取相应的措施削弱或消除故障的负面影响。FDI 方法可以分为基于模型的方法和基于数据的方法两大类。在基于模型的故障检测方法中, 基于观测器的 FDI 是最为有效的方法之一, 该类方法目前已经取得了很多突出的研究成果<sup>[1-4]</sup>。例如, 文献[1]针对离散广义系统, 提出了一种基于  $H_\infty/L_\infty$  观测器及多胞体残差构造的故障检测和隔离方法, 该方法由于考虑了  $H_\infty$  性能指标, 相比传统的基于多胞体讨论了互联系统的故障估计和调节问题。

收稿日期: 2021-07-08

基金项目: 国家自然科学基金(61973236)

第一作者: 朱芳来(1965—), 男, 教授, 博士生导师, 工学博士, 主要研究方向为未知输入观测器设计、故障检测和故障重构、多智能体安全性协调控制。E-mail: zhufanglai@tongji.edu.cn。

通信作者: 李铭伟(2000—), 硕士生, 主要研究方向为未知输入观测器设计、故障检测和故障重构。

E-mail: 2233069@tongji.edu.cn



论文  
拓展  
介绍

近期一种特别的观测器——区间观测器,越来越受到学者们的关注。区间观测器不同于需要对系统状态进行渐近收敛估计或邻域稳定估计的Luenberger观测器,它只需提供系统状态的一个稳定的上下界估计。与传统的Luenberger型观测器相比,区间观测器能更加便利地处理未知输入(外部扰动、执行器故障和模型不确定性)和非线性项。这是由于未知输入和非线性项的很大一部分信息,例如观测器匹配条件和Lipschitz条件等可以在区间观测器的设计中被忽略。由于这样的特点,区间观测器的研究得到了学者们的极大关注,并产生了众多的研究成果<sup>[5-11]</sup>。最近,多胞体理论被应用于离散时间系统,通过迭代计算得到包围系统状态的最小多胞体,以此得到系统状态的区间估计<sup>[12-14]</sup>。实际上,将多胞体理论应用于离散时间系统这一方法构成了一种特别类型的区间观测器。基于多胞体理论的FDI方法近几年得到了极大的关注,并且有众多优秀的研究成果<sup>[15-16]</sup>。

基于观测器的FD方法,通常要求所设计的观测器针对干扰鲁棒而对故障敏感,这样的观测器可以作为故障检测器。其主要技术手段之一就是构造合理的残差,通过残差来标志故障是否发生。如果采用基于Luenberger类观测器的FD方法,通常采用测量输出向量及其估计值的偏差构造残差。区间观测器作为一种未知输入观测器的特殊类型,其产生的残差区间估计实际上是残差天然的阈值。因而,基于区间观测器的FD方法成为了基于模型FDI方法的主要方法之一<sup>[17-21]</sup>。例如,文献[17]重点比较了基于集论未知输入观测器的方法和基于区间观测器方法的故障检测鲁棒性。文献[18]研究了具有有界扰动的离散线性变参数系统的故障检测问题。

针对执行器故障和扰动同时直接影响状态方程和输出方程的系统,本文基于Luenberger型观测器和多胞体方法的结合研究执行器故障检测的问题。设计降维观测器并分析观测器误差动态系统的稳定性,使用多胞体方法提出状态的区间估计方法,并给出新的残差构造方法,实现执行器故障的检测。

## 1 离散系统的问题描述

在给出问题描述之前,先给出一些符号说明。

假设  $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times m}$  和  $B = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , 则  $A \leq B \Leftrightarrow a_{ij} \leq b_{ij} (i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m)$ 。 设  $A =$

$[a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $\max(0, A) = [\alpha_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , 而  $\alpha_{ij} = \max(0, a_{ij})$ 。  $\forall x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\text{diag}(x)$  表示以向量  $x$  为对角元的  $n \times n$  阶对角方阵。设  $M$  为对称方阵,  $M < 0$  表示  $M$  为负定矩阵。

考虑一类受到未知输入和执行器故障影响的离散时间线性系统

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k) + B(u(k) + f_a(k)) + D\eta(k) \\ y(k) &= Cx(k) \end{aligned} \quad (1)$$

式中:  $x(k) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(k) \in \mathbb{R}^m$ ,  $y(k) \in \mathbb{R}$  和  $\eta(k) \in \mathbb{R}$  分别为系统状态, 已知控制输入, 可测量输出和未知输入。  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$  和  $D \in \mathbb{R}^{n \times q}$  为已知的常数矩阵。矩阵  $B$  和  $D$  为列满秩, 而  $C$  为行满秩, 并有  $n \geq p \geq q$ 。不失一般性, 假设  $C = [I_p \quad O]$ 。

**假设 1** 秩条件  $\text{rank} \begin{bmatrix} sI - A & D \\ C & O \end{bmatrix} = n + q$  对所有满足  $|s| \geq 1$  的复数  $s$  成立。

对系统(1)中的干扰变量及其系数矩阵  $D$  做假设, 如假设 2。

**假设 2** 针对干扰  $\eta(k)$ , 几乎所有的  $l \geq q$  成立, 有

$$\text{rank}[\eta(1) \quad \dots \quad \eta(l)] = q$$

且对其系数矩阵  $D$ , 满足

$$\text{rank}(D) = \text{rank}(CD) = q$$

**引理 1**<sup>[22]</sup> 假设 1 和假设 2 成立的充分必要条件为: 对于任意正定对称矩阵  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , 有如式(2)的Lyapunov矩阵代数方程组:

$$\begin{cases} (A + LC)^T P (A + LC) - P = -Q \\ D^T P = GC \end{cases} \quad (2)$$

关于矩阵  $L \in \mathbb{R}^{p \times n}$  和  $G \in \mathbb{R}^{p \times p}$  以及正定对称矩阵  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  有解。

**假设 3** 对初始状态  $x(0)$ , 存在 2 个已知向量  $\underline{x}_0$  和  $\bar{x}_0$ , 使得  $\underline{x}_0 \leq x(0) \leq \bar{x}_0$ 。对于未知输入  $\eta(k)$ , 存在 2 个已知向量  $\underline{\eta}$  和  $\bar{\eta}$  使得  $\underline{\eta} \leq \eta(k) \leq \bar{\eta}$ 。

**定义 1**  $n$  维  $s$  阶的多胞体  $Z$  是单位超立方体  $B^s = [-1, +1]^s (s \geq n)$  的仿射变换:  $Z = p \oplus HB^s = \{p + Hz, z \in B^s\}$ , 其中向量  $p \in \mathbb{R}^n$  是多胞体  $Z$  的中心, 而  $H \in \mathbb{R}^{n \times s}$  是多胞体  $Z$  的生成矩阵。这里符号  $\oplus$  代表闵可夫斯基和。

为了简化符号, 使用  $Z = \langle p, H \rangle$  来表示多胞体。多胞体具有如下性质。

**性质 1**<sup>[13]</sup>

$$\langle p_1, H_1 \rangle \oplus \langle p_2, H_2 \rangle = \langle p_1 + p_2, [H_1 H_2] \rangle$$

$$L \odot \langle p, H \rangle = \langle Lp, LH \rangle$$

式中:  $p, p_1, p_2 \in \mathbb{R}^s, H \in \mathbb{R}^{s \times s}, H_1 \in \mathbb{R}^{s_1 \times s_1}, H_2 \in \mathbb{R}^{s_2 \times s_2}$  和  $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$  是具有相应维数的矩阵, 符号  $\odot$  代表线性映射。

**性质 2**<sup>[13]</sup> 对  $n$  维  $s$  阶多胞体  $Z = p \oplus HB^s = \{p + Hz, z \in B^s\} \in \mathbb{R}^n$  按照欧几里得范数降序排列矩阵  $H$  的各列得到矩阵  $\hat{H}$ 。那么有  $Z \subseteq \langle p, \mathfrak{R}_d(H) \rangle (n \leq d \leq s)$ , 其中  $\mathfrak{R}_d(H) = [H^a H^b] \in \mathbb{R}^{n \times d}, H^a \in \mathbb{R}^{n \times (d-n)}$  是由  $\hat{H}$  的前  $d-n$  列构成, 而  $H^b \in \mathbb{R}^{n \times n}$  是对角矩阵, 以  $H_{i,i}^b = \sum_{j=d-n+1}^s |\hat{H}_{i,j}| (i=1, \dots, n)$  作为其对角线元素。其中,  $\hat{H}_{i,j}$  代表矩阵  $\hat{H}$  的第  $i$  行第  $j$  列的元素。

**性质 3**<sup>[13]</sup> 对  $n$  维  $s$  阶的多胞体  $Z = p \oplus HB^s, \forall x = [x_1 \dots x_n]^T \in Z$ , 有

$$p_i - \sum_{j=1}^s |H_{ij}| \leq x_i \leq p_i + \sum_{j=1}^s |H_{ij}| (i=1, \dots, n)$$

式中:  $H_{i,j}$  为矩阵  $H$  的第  $i$  行、第  $j$  列的元素;  $p = [p_1 \dots p_n]^T$  是多胞体的中心。

**性质 4**<sup>[13]</sup> 对任意  $x \in \mathbb{R}^n$ : 有  $\underline{x} \leq x \leq \bar{x}$ , 其中  $\underline{x}, \bar{x} \in \mathbb{R}^n$ , 那么  $x \in Z_x = p_x \oplus H_x B^n = \langle p_x, H_x \rangle$ , 其中,  $p_x = \frac{1}{2}(\underline{x} + \bar{x})$  和  $H_x = \frac{1}{2} \text{diag}(\bar{x} - \underline{x})$ 。

**引理 2**<sup>[23]</sup> 设向量变量  $\underline{x}(k), x(k), \bar{x}(k) \in \mathbb{R}^n$  满足  $\underline{x}(k) \leq x(k) \leq \bar{x}(k)$ , 那么对任何常数矩阵  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , 有  $M^+ \underline{x}(k) - M^- \bar{x}(k) \leq Mx(k) \leq M^+ \bar{x}(k) - M^- \underline{x}(k)$ , 其中  $M^+ = \max(0, M)$  和  $M^- = \max(0, -M)$ 。

## 2 降维未知输入观测器设计

首先基于一个等价变换将原系统分解成2个子系统, 其中一个子系统对于干扰解耦。然后针对干扰解耦的子系统设计降维观测器, 在无执行器故障发生的前提下, 给出系统状态的估计。

对状态向量  $x$ , 矩阵  $A, B, D, L$  和式(2)中的  $P$  写成分块形式

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^T & P_{22} \end{bmatrix}$$

式中:  $x_1 \in \mathbb{R}^p, x_2 \in \mathbb{R}^{(n-p)}, A_{11} \in \mathbb{R}^{p \times p}, A_{12} \in \mathbb{R}^{p \times (n-p)}, A_{21} \in \mathbb{R}^{(n-p) \times p}, A_{22} \in \mathbb{R}^{(n-p) \times (n-p)}, B_1 \in \mathbb{R}^{p \times m}, B_2 \in \mathbb{R}^{(n-p) \times m}, D_1 \in \mathbb{R}^{p \times q}, D_2 \in \mathbb{R}^{(n-p) \times q}, L_1 \in \mathbb{R}^{p \times p}, L_2 \in \mathbb{R}^{(n-p) \times p}, P_{11} \in \mathbb{R}^{p \times p}$  和  $P_{22} \in \mathbb{R}^{(n-p) \times (n-p)}$ 。

对系统(1)作等价状态变换

$$z(k) = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = Tx(k) = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ K & I_{n-p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

其中  $K \in \mathbb{R}^{(n-p) \times p}$  为之后需要确定的参数矩阵。在该等价变换下, 有

$$z_1(k+1) = [I_p \ 0] \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(k) \\ z_2(k) \end{bmatrix} + [I_p \ 0] Bu(k) + [I_p \ 0] Bf_a(k) + [I_p \ 0] D\eta(k)$$

和

$$z_2(k+1) = [K \ I_{n-p}] \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(k) \\ z_2(k) \end{bmatrix} + [K \ I_{n-p}] Bu(k) + [K \ I_{n-p}] Bf_a(k) + [K \ I_{n-p}] D\eta(k)$$

由式(2)的第2式并注意到  $C$  的特别形式可以得到  $[P_{12}^T \ P_{22}]D=0$ , 这意味着如果选取  $K = P_{22}^{-1}P_{12}^T$ , 就有  $[K \ I_{n-p}]D=0$ 。于是得到

$$\begin{cases} z_1(k+1) = (A_{11} - A_{12}K)z_1(k) + A_{12}z_2(k) + B_1u(k) + B_1f_a(k) + D_1\eta(k) \\ z_2(k+1) = (KA_{12} + A_{22})z_2(k) + [(A_{21} - A_{22}K) + K(A_{11} - A_{12}K)]y(k) + (KB_1 + B_2)u(k) + (KB_1 + B_2)f_a(k) \end{cases} \quad (3)$$

**定理 1** 在执行器无故障发生的情况下 ( $f_a(k) \equiv 0$ ), 如果取  $K = P_{22}^{-1}P_{12}^T$ , 则

$$\begin{cases} \hat{z}_2(k+1) = (KA_{12} + A_{22})\hat{z}_2(k) + [(A_{21} - A_{22}K) + K(A_{11} - A_{12}K)]y(k) + (KB_1 + B_2)u(k) \\ \hat{x} = \begin{bmatrix} y(k) \\ \hat{z}_2(k) - Ky(k) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (4)$$

系统(4)是原系统(1)的渐近降维观测器, 即有

$\lim_{k \rightarrow \infty} (x - \hat{x}) = 0$ 。

**证明** 首先,注意到  $y(k) = z_1(k)$ , 然后式(3)的第2式减去式(4)的第1式得到降维观测器误差动态方程为

$$\tilde{z}_2(k+1) = (KA_{12} + A_{22})\tilde{z}_2(k) \quad (5)$$

其中  $\tilde{z}_2(k) = z_2(k) - \hat{z}_2(k)$ 。根据 Schur 补引理, 式(2)的第1式等价于

$$\begin{bmatrix} -P & (PA + WC)^T \\ PA + WC & -P \end{bmatrix} < 0$$

其中  $W = PL$ 。进行矩阵分块展开, 有

$$\begin{bmatrix} -P_{11} & * & * & * & * & * \\ * & -P_{22} & * & * & * & * \\ P_{11}(A_{11} + L_1) + & * & * & * & * & * \\ P_{12}(A_{21} + L_2) & P_{12}^T A_{12} + P_{22} A_{22} & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ (A_{11} + L_1)^T P_{11} + & * & * & * & * & * \\ (A_{21} + L_2)^T P_{12}^T & A_{22}^T P_{22} + A_{12}^T P_{12} & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ -P_{11} & -P_{22} & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \end{bmatrix} < 0$$

再经同等的初等行和列变换得到

$$\begin{bmatrix} -P_{11} & (A_{11} + L_1)^T P_{11} + & * & * & * & * \\ P_{11}(A_{11} + L_1) + & (A_{21} + L_2)^T P_{12}^T & * & * & * & * \\ P_{12}(A_{21} + L_2) & -P_{11} & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ -P_{22} & A_{22}^T P_{22} + A_{12}^T P_{12} & * & * & * & * \\ P_{12}^T A_{12} + P_{22} A_{22} & -P_{22} & * & * & * & * \end{bmatrix} < 0$$

故有

$$\begin{bmatrix} -P_{22} & A_{22}^T P_{22} + A_{12}^T P_{12} \\ P_{12}^T A_{12} + P_{22} A_{22} & -P_{22} \end{bmatrix} < 0 \quad (6)$$

和

$$\begin{bmatrix} -P_{11} & * \\ P_{11}(A_{11} + L_1) + P_{12}(A_{21} + L_2) & (A_{11} + L_1)^T P_{11} + (A_{21} + L_2)^T P_{12}^T \\ & -P_{11} \end{bmatrix} < 0 \quad (7)$$

再由 Schur 补引理, 知式(6)和式(7)分别等价于

$$(KA_{12} + A_{22})^T P_{22} (KA_{12} + A_{22}) - P_{22} < 0 \quad (8)$$

$$M^T P_{11} M - P_{11} < 0 \quad (9)$$

其中,  $M = A_{11} + L_1 + P_{11}^{-1} P_{12} (A_{21} + L_2)$ 。即在假

设1和假设2下, 式(8)与式(9)成立。而式(8)意味着式(5)是渐近收敛稳定的系统, 于是有  $\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{z}_2(k) = 0$ , 从而有  $\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{x}(k) = 0$ , 其中  $\tilde{x} = x - \hat{x}$ , 证毕。

### 3 区间观测器设计与故障检测

针对式(3)的第1式所决定的关于  $z_1(k)$  的动态系统, 结合 Luenberger 型观测器和多胞体理论, 提出一种能估计  $y(k) = z_1(k)$  之上下界的区间观测器, 以此提出一种执行器故障检测方法。

首先, 对于式(3)的第1式, 考虑如式(10)的 Luenberger 型观测器:

$$\begin{aligned} \hat{z}_1(k+1) = & (A_{11} - A_{12}K)\hat{z}_1(k) + A_{12}\hat{z}_2(k) + \\ & B_1 u(k) + N(y(k) - \hat{z}_1(k)) \end{aligned} \quad (10)$$

其中  $N = -L_1 - A_{12}K - P_{11}^{-1}P_{12}(A_{21} + L_2)$ , 而  $\hat{z}_2(k)$  是  $z_2(k)$  的状态估计, 由降维观测器式(4)给出。显然, 式(3)的第1式和式(10)共同决定的误差动态系统如式(11):

$$\tilde{z}_1(k+1) = M\tilde{z}_1(k) + A_{12}\tilde{z}_2(k) + D\eta(k) \quad (11)$$

其中  $M = A_{11} + L_1 + P_{11}^{-1}P_{12}(A_{21} + L_2)$ 。

**引理 3** 在原系统无执行器故障发生 ( $f_a(k) = 0$ ) 和无干扰 ( $\eta(k) = 0$ ) 的假设下, 系统式(10)是式(3)的第1式的渐近收敛估计观测器, 即有  $\lim_{k \rightarrow \infty} (z_1(k) - \hat{z}_1(k)) = 0$ , 其中  $\tilde{z}_1(k) = z_1(k) - \hat{z}_1(k)$ 。

**证明** 事实上, 当  $f_a(k) = 0$  且  $\eta(k) = 0$  时, 误差方程(11)变为

$$\tilde{z}_1(k+1) = M\tilde{z}_1(k) + A_{12}\tilde{z}_2(k) \quad (12)$$

考虑到  $\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{z}_2(k) = 0$ , 由式(10)和 Lyapunov 稳定理论知式(12)为渐近稳定的系统, 即有  $\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{z}_1(k) = 0$ , 证毕。

注意到  $y(k) = z_1(k)$ , 因而  $e_y(k) = y(k) - \hat{y}(k) = z_1(k) - \hat{z}_1(k) = \tilde{z}_1(k)$ 。但由于干扰  $\eta(k)$  事实上的存在 (即事实上  $\eta(k) \neq 0$ ), 因而观测器式(10)无法直接用于执行器故障检测器, 因为观测器式(10)对干扰  $\eta(k)$  不具有鲁棒性。基于式(12)多胞体理论的结合提出一种对残差  $e_y(k)$  的区间估计方法, 且该区间估计在区间估计意义下是对干扰鲁棒的, 以此提出一种执行器故障检测方法。

首先,由等价状态变换知  $z_1(0) = \Gamma x(0)$ , 其中  $\Gamma = [I_p \ 0_{p \times (n-p)}]T$ , 于是  $\tilde{z}_1(0) = \Gamma x(0) - \hat{z}_1(0)$ , 其中  $\hat{z}_1(0)$  是观测器式(10)设定的初值。再根据引理 2 知道

$\Gamma^+ \underline{x}_0 - \Gamma^- \bar{x}_0 - \hat{z}_1(0) \leq \tilde{z}_1(0) \leq \Gamma^+ \bar{x}_0 - \Gamma^- \underline{x}_0 - \hat{z}_1(0)$  即观测误差  $\tilde{z}_1(k)$  的初始值  $\tilde{z}_1(0)$  的上界(记为  $\bar{\tilde{z}}_{1,0}$ )和下界(记为  $\underline{\tilde{z}}_{1,0}$ )为

$$\begin{cases} \bar{\tilde{z}}_{1,0} = \Gamma^+ \bar{x}_0 - \Gamma^- \underline{x}_0 - \hat{z}_1(0) \\ \underline{\tilde{z}}_{1,0} = \Gamma^+ \underline{x}_0 - \Gamma^- \bar{x}_0 - \hat{z}_1(0) \end{cases}$$

**引理 4** 在假设 3 下,有  $\tilde{z}_1(0) \in \langle p_0, H_0 \rangle$ ,  $\eta(k) \in \langle p_\eta, H_\eta \rangle \subseteq \langle p_\eta, \mathfrak{R}_d(H_\eta) \rangle$ , 其中  $p_0 = \frac{1}{2}(\bar{\tilde{z}}_{1,0} + \underline{\tilde{z}}_{1,0})$ ,  $H_0 = \frac{1}{2} \text{diag}(\bar{\tilde{z}}_{1,0} - \underline{\tilde{z}}_{1,0})$ ,  $p_\eta = \frac{1}{2}(\bar{\eta} + \eta)$ ,  $H_\eta = \frac{1}{2} \text{diag}(\bar{\eta} - \eta)$ 。

**证明** 该引理的结论可以由多胞体性质 4 直接得到。

由于  $\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{z}_2(k) = 0$ , 在  $f_a(k) = 0$  的前提下,基于(11),先考虑

$$\tilde{z}_1(k+1) = M\tilde{z}_1(k) + D\eta(k) \quad (13)$$

**定理 2** 在假设 1、假设 2、假设 3 和  $f_a(k) \equiv 0$  的前提下,基于动态系统(13),有

$$\tilde{z}_1(k) \in \langle p_k, H_k \rangle \subseteq \langle p_k, \mathfrak{R}_d(H_k) \rangle, k \geq 1 \quad (14)$$

其中  $p_k = Mp_{k-1} + Dp_\eta$ ,  $H_k = [MH_{k-1} \ DH_\eta]$ 。这里定义  $\mathfrak{R}_d(H_0) = H_0$ ,  $\mathfrak{R}_d(H_k) (k \geq 1)$  的定义类似于性质 2 中  $\mathfrak{R}_d(H)$  的定义。

**证明** 基于引理 4,有  $\tilde{z}_1(0) \in \langle p_0, H_0 \rangle$ 。在式(13)中令  $k=1$  得  $\tilde{z}_1(1) = M\tilde{z}_1(0) + D\eta(0)$ , 于是有

$$\begin{aligned} \tilde{z}_1(1) &\in M \langle p_0, H_0 \rangle \oplus D \langle p_\eta, H_\eta \rangle = \\ &\langle p_1, H_1 \rangle \subseteq \langle p_1, \mathfrak{R}_d(H_1) \rangle \end{aligned}$$

其中  $p_1 = Mp_0 + Dp_\eta$  和  $H_1 = [MH_0 \ DH_\eta]$ , 而  $\mathfrak{R}_d(H_0) = H_0$ 。假设已经 有  $\tilde{z}_1(k-1) \in \langle p_{k-1}, \mathfrak{R}_d(H_{k-1}) \rangle, k \geq 1$ , 由式(13)推导出

$$\begin{aligned} \tilde{z}_1(k) &= M\tilde{z}_1(k-1) + D\eta(k-1) \in \\ &M \langle p_{k-1}, H_{k-1} \rangle \oplus D \langle p_\eta, H_\eta \rangle = \\ &\langle p_k, H_k \rangle \subseteq \langle p_k, \mathfrak{R}_d(H_k) \rangle \end{aligned}$$

其中  $p_k = Mp_{k-1} + Dp_\eta, H_k = [MH_{k-1} \ DH_\eta]$ , 根据数学归纳法,证毕。

**推论 1** 在假设 1、假设 2、假设 3 和  $f_a(k) \equiv 0$  的

前提下,基于动态系统(11),则存在正整数  $N_0 > 0$ , 使得

$$\tilde{z}_1(k) \in \langle p_k, H_k \rangle \subseteq \langle p_k, \mathfrak{R}_d(H_k) \rangle, k \geq N_0 \quad (15)$$

其中  $p_k = Mp_{k-1} + Dp_\eta, H_k = [MH_{k-1} \ DH_\eta]$ 。这里定义  $\mathfrak{R}_d(H_0) = H_0, \mathfrak{R}_d(H_k) (k \geq 1)$  的定义,类似于性质 2 中  $\mathfrak{R}_d(H)$  的定义。

**证明** 由于  $\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{z}_2(k) = 0$ , 所以对充分小的正数  $\epsilon > 0$ , 存在正整数  $N_0 > 0$ , 使得当  $k \geq N_0$  时有  $-\epsilon I_{n-p} < \tilde{z}_2(k) < \epsilon I_{n-p}$ , 其中  $I_{n-p} = [1 \ \dots \ 1]^T \in \mathbb{R}^{n-p}$ 。由性质 4,知

$$\tilde{z}_2(k) \in \langle 0, H_\epsilon \rangle \subseteq \langle 0, \mathfrak{R}_{n-p}(H_\epsilon) \rangle$$

其中  $H_\epsilon = \epsilon I_{n-p}$ 。基于式(11),知当  $k \geq N_0$  时,有

$$\begin{aligned} \tilde{z}_1(k) &= M\tilde{z}_1(k-1) + A_{12}\tilde{z}_2(k-1) + \\ &D\eta(k-1) \in M \langle p_{k-1}, H_{k-1} \rangle \oplus \\ &A_{12} \langle 0, H_\epsilon \rangle \oplus D \langle p_\eta, H_\eta \rangle = \\ &M \langle p_{k-1}, H_{k-1} \rangle \oplus D \langle p_\eta, H_\eta \rangle \oplus \\ &A_{12} \langle 0, H_\epsilon \rangle = \langle p_k, H_k \rangle \oplus A_{12} \langle 0, H_\epsilon \rangle = \\ &\langle p_k, [H_k A_{12} H_\epsilon] \rangle = \langle p_k, [H_k \epsilon A_{12} I_{n-p}] \rangle = \\ &\langle p_k, [H_k \epsilon A_{12}] \rangle \end{aligned}$$

即有

$$\tilde{z}_1(k) \in \langle p_k, [H_k \epsilon A_{12}] \rangle \subseteq \langle p_k, \mathfrak{R}_d([H_k \epsilon A_{12}]) \rangle$$

其中  $p \leq d \leq d+q+n-p$ 。

根据性质 2,记  $\hat{H}$  为将矩阵  $[H_k \epsilon A_{12}] \in \mathbb{R}^{p \times (d+q+n-p)}$  各列按欧几里得范数降序排列而得到。记

$$\hat{H} = \begin{bmatrix} \hat{H}_1 & \hat{H}_2 \\ \hline \hline \end{bmatrix}$$

由于  $\epsilon$  充分小,所以  $\hat{H}_1$  就是  $H_k$  各列按欧几里得范数降序排列后取其前  $d+q$  列,记为  $\hat{H}_1$ 。而  $\hat{H}_2$  为  $\epsilon A_{12}$  的各列按欧几里得范数降序排列而得到。根据性质 2,有  $\mathfrak{R}_d([H_k \epsilon A_{12}]) = [H_a H_b]$ , 其中  $H_a$  为  $\hat{H}$  的前  $d-p$  列,也就是  $\hat{H}_1$  的前  $d-p$  列。 $H_b$  为对角矩阵,其对角元素满足

$$\begin{aligned} H_{b,ii} &= \sum_{j=d-p+1}^{d+q+n-p} |\hat{H}_{ij}| = \sum_{j=d-p+1}^{d+q} |\hat{H}_{ij}| + \\ &\sum_{j=d+q+1}^{d+q+n-p} |\hat{H}_{ij}| = \sum_{j=d-p+1}^{d+q} |\hat{H}_{ij}| + \sum_{j=1}^{n-p} |\hat{H}_{2,ij}| = \\ &\sum_{j=d-p+1}^{d+q} |\hat{H}_{ij}| + \epsilon \sum_{j=1}^{n-p} |A_{12,ij}| \end{aligned}$$

所以有

$$H_b = \text{diag} \left( \sum_{j=d-p+1}^{d+q} |\hat{H}_{ij}| + \epsilon \sum_{j=1}^{n-p} |A_{12,ij}| \right) = \text{diag} \left( \sum_{j=d-p+1}^{d+q} |\hat{H}_{ij}| \right) + \epsilon \cdot \text{diag} \left( \sum_{j=1}^{n-p} |A_{12,ij}| \right)$$

由于  $\epsilon > 0$  为充分小的正数, 有  $H_{b,ii} \approx \sum_{j=d-p+1}^{d+q} |\hat{H}_{ij}|$ ,

那么有

$$\mathfrak{R}_d([H_k \ \epsilon A_{12}]) = [H_a \ H_b] \approx \mathfrak{R}_d(H_k)$$

证毕。

**注 1** 记  $\mathfrak{R}_d([H_k \ \epsilon A_{12}]) = [H_a \ H_b]$ , 其中  $H_b = H_c + H_d$ ,  $H_c = \text{diag} \left( \sum_{j=d-p+1}^{d+q} |\hat{H}_{ij}| \right)$ ,  $H_d = \epsilon \cdot \text{diag} \left( \sum_{j=1}^{n-p} |A_{12,ij}| \right)$ 。同时记  $\mathfrak{R}_d(k) = [H_a \ H_c]$ 。那么

有  $p$  维  $d$  阶多胞体  $Z_1 = \langle p_k, \mathfrak{R}_d([H_k \ \epsilon A_{12}]) \rangle$  和多胞体  $Z_2 = \langle p_k, \mathfrak{R}_d(k) \rangle$  是  $B_d = [-1, +1]^d$  上的仿射变换。对任意  $u \in B_d$ , 有  $u = [u_1^T \ u_2^T]^T \in B_d$ , 其中  $u_1 \in B^{d-p}, u_2 \in B^p$ 。那么

$$p_k + \mathfrak{R}_d([H_k \ \epsilon A_{12}])u = p_k + H_a u_1 + H_b u_2 = p_k + H_a u_1 + H_c u_2 + H_d u_2$$

同时有  $p_k + \mathfrak{R}_d(k)u = p_k + H_a u_1 + H_c u_2$ 。可见多胞体  $Z_1$  比多胞体  $Z_2$  包含的范围更广。

**推论 2** 假设  $f_a(k) \equiv 0$ , 则  $z_1^+(k) = p_k + \hat{z}_1(k) + \alpha_k$  和  $z_1^-(k) = p_k + \hat{z}_1(k) - \alpha_k$  分别给出了  $z_1(k)$  的上下区间估计, 其中  $\alpha_k = \left[ \sum_{j=1}^d |H_{k,lj}^R| \dots \sum_{j=1}^d |H_{k,nj}^R| \right]^T$ , 而  $\hat{z}_1(k)$  是由式(10)给出的状态估计, 其中  $H_{k,lj}^R$  表示推论 1 中  $R_d(H_k)$  的第  $l(l=1, \dots, n)$  行、第  $j$  列元素。

**证明** 根据定理 2 和性质 3, 不难得出结论。

由于  $y(t) = z_1(t)$ , 所以有

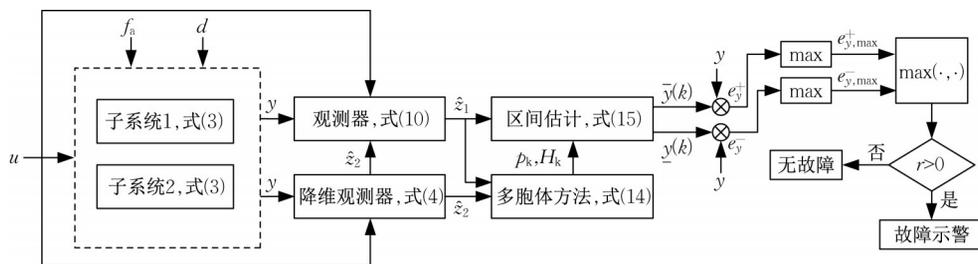


图 1 基于多胞体方法的执行器故障检测方案

Fig. 1 Actuator fault detection scheme based on Zonotope method

$$\begin{cases} \bar{y}(k) = p_k + \hat{z}_1(k) + \alpha_k \\ y(k) = p_k + \hat{z}_1(k) - \alpha_k \end{cases} \quad (16)$$

使得在  $f_a(k) \equiv 0$  的条件下, 有  $\underline{y}(k) \leq y(k) \leq \bar{y}(k)$ 。

一个执行器故障检测逻辑如式(17):

$$y(k) \begin{cases} \in [\underline{y}(k), \bar{y}(k)], & \text{无故障发生} \\ \notin [\underline{y}(k), \bar{y}(k)], & \text{有故障发生} \end{cases} \quad (17)$$

把式(17)转变为更直观和更为方便验证的形式。为此, 定义  $e_{y^+} = y - \bar{y}$  和  $e_{y^-} = y - \underline{y}$ 。此外, 定义  $e_{y, \max}^+$  和  $e_{y, \max}^-$  分别是  $e_{y^+}$  和  $e_{y^-}$  的最大元素。然后再定义  $r = e_{y, \max} = \max\{e_{y, \max}^+, e_{y, \max}^-\}$  作为故障检测的残差。于是提出如式(18)的故障检测方法:

$$r = e_{y, \max} \begin{cases} > 0, & \text{有故障发生} \\ \leq 0, & \text{无故障发生} \end{cases} \quad (18)$$

基于多胞体方法进行故障检测的方案可由图 1 简要描述。

### 4 仿真案例

对所提出的降维观测器设计方法和基于多胞体理论的执行器故障检测方法给出仿真分析。炉温采样控制系统、电枢控制的直流伺服电机系统等真实世界中的连续系统均可进行等价离散化, 以方便数字控制系统的设计。例如, 电枢控制的直流伺服电机系统可选取角位移、角速度和角加速度作为状态变量, 以角位移和角速度为输出, 构建状态方程。参考文献[22], 系统(1)对应的系统矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 0.49 & 0.10 & 0.06 \\ -0.32 & 0.95 & -0.23 \\ -0.25 & -0.06 & 0.63 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.4 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} -0.1 \\ 0.2 \\ -0.1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}。$$

通过构建线性矩阵不等式,可得到代数矩阵方程(2)的解如下:

$$P = \begin{bmatrix} 6.9892 & 3.1102 & 0.5172 \\ 3.1102 & 1.5476 & 0.2896 \\ 0.5172 & 0.2896 & 0.0620 \end{bmatrix} \times 10^7$$

$$L = \begin{bmatrix} 0.0049 & 0.1788 \\ -1.5352 & -2.0075 \\ 5.3258 & 2.9549 \end{bmatrix}$$

$$G = [-1.2859 \quad -0.3046] \times 10^6$$

将矩阵P和L分块得到

$$P_{11} = \begin{bmatrix} 6.9892 & 3.1102 \\ 3.1102 & 1.5476 \end{bmatrix} \times 10^7$$

$$P_{12} = \begin{bmatrix} 0.5172 \\ 0.2896 \end{bmatrix} \times 10^7$$

$$P_{12}^T = [0.5172 \quad 0.2896] \times 10^7$$

$$P_{22} = [0.0620] \times 10^7$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} 0.0049 & 0.1788 \\ -1.5352 & -2.0075 \end{bmatrix}$$

$$L_2 = [5.3258 \quad 2.9549]$$

由于  $K = P_{22}^{-1}P_{12}^T$  计算得到  $K = [8.3461 \quad 4.6730]$ 。M和N亦可得到。

$$M = \begin{bmatrix} 0.0498 & 0.0249 \\ -0.0109 & -0.0056 \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} -0.0605 & -0.2053 \\ 1.6105 & 2.0304 \end{bmatrix}$$

首先验证无执行器故障发现下的降维观测器状态估计效果。为此,假设控制输入为  $u(k) = 5\sin(2k)$ ,未知输入  $\eta(k) = \sin(50k)$ ,而  $f_a(k) \equiv 0$ 。在执行器无故障发生时,根据定理1,降维观测器式(4)能产生原系统状态  $x_3$  的渐进估计,其估计效果由图2c给出。图2a和2b展示了  $x_1$  和  $x_2$  的区间估计。

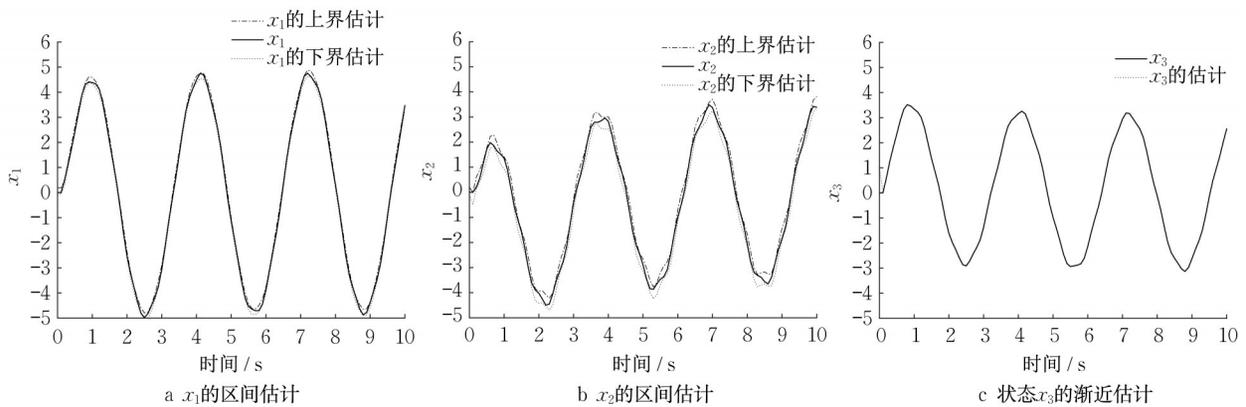


图2 状态的区间估计与渐近估计

Fig. 2 Interval estimation and asymptotic estimation of states

其次,为了体现基于多胞体的执行器故障检测效果,假设执行器故障信号为

$$f_a = \begin{cases} 8\sin(7t), & 5 \leq t \leq 15 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

基于式(18)的执行器故障检测方法的故障检测效果由图3给出。从图中可以看出5~15s时间段内执行器发生故障,此时残差信号给出了对应的示警。

图4针对多胞体方法(zonotope method, ZM)和传统的区间观测器方法(traditional interval observer method, TIOM)的状态区间估计和故障检测效果两方面进行了比较。图4a展示了2种方法获取到的上界估计(upper boundary, UB)和下界估计(lower boundary, LB)。限于篇幅,仅呈现状态  $x_1$  的区间估计。可以看到,由于估计偏差更小,采用ZM得到的

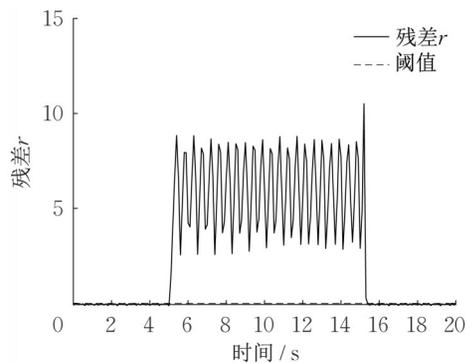


图3 存在执行器故障时的残差信号

Fig. 3 Residual signal in the presence of actuator fault

区间估计优于TIOM。图4b展示了2种方法构建的残差。可见,由ZM法构建的残差对故障更敏感。

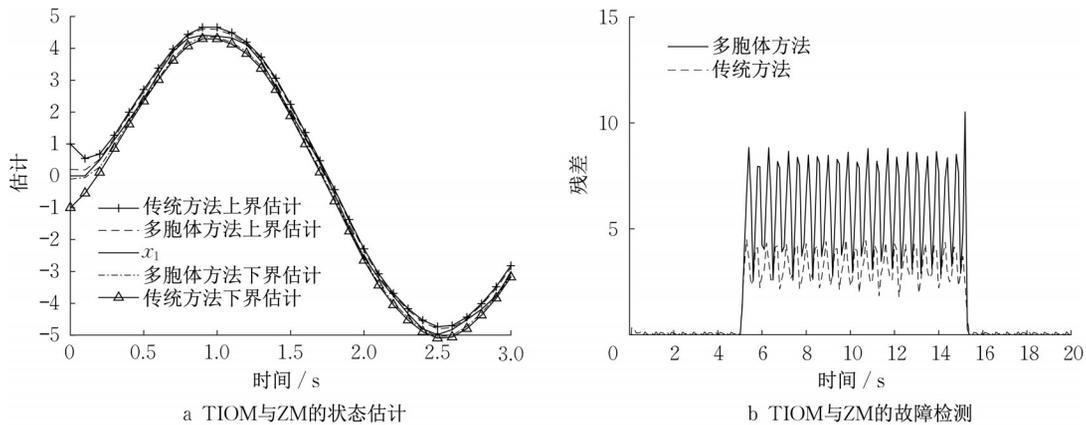


图4 传统方法与多胞体方法的对比

Fig. 4 Comparison of traditional method and Zonotope method

## 5 结论

针对离散系统研究了降维观测器设计方法及其Luenberger型观测器和多胞体理论相结合的执行器故障检测方法。为了达到这样的目的,首先对原系统进行合理的状态等价变换,将原系统分解成2个子系统。然后针对干扰解耦的子系统,提出了无执行器故障发生时的降维观测器设计方法。针对输出动态子系统,基于多胞体理论和Luenberger型观测器的结合,提出了对输出误差的区间估计。基于输出误差的区间估计,构造残差实现了执行器故障检测的目的。如何将方法推广到连续系统将是下一步的研究议题。

### 作者贡献声明:

朱芳来:项目负责人,指导论文构思和论文修改。

李铭伟:论文构思和论文撰写。

### 参考文献:

- [1] TANG Wentao, WANG Zhenhua, SHEN Yi. Fault detection and isolation for discrete-time descriptor systems based on  $H_\infty/L_\infty$  observer and zonotopic residual evaluation [J]. International Journal of Control, 2020, 93(8): 1867
- [2] FARZIN Nemati, SEYED Mostafa Safavi Hamami, ALI Zemouche. A nonlinear observer-based approach to fault detection, isolation and estimation for satellite formation flight application [J]. Automatica, 2019, 107: 474.
- [3] YAN Xinggang, CHRISTOPHER Edwards. Nonlinear robust fault reconstruction and estimation using a sliding mode observer [J]. Automatica, 2007, 43(9): 1605.
- [4] YANG Hao, HUANG Chengkai, JIANG Bin, *et al.* Fault estimation and accommodation of interconnected systems: A separation principle [J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2019, 49(12): 4103.
- [5] THABET Rihab El Houda, AHMED Ali Sofiane, PUIG Vicenç. High-gain interval observer for partially linear systems with bounded disturbances [J]. International Journal of Control, 2021, 94(5): 1376.
- [6] TAN Junbo, XU Feng, YANG Jun, *et al.* Robust fault detection and isolation of discrete-time LPV systems combining set-theoretic UIO and invariant sets [C]// Proceedings of the 21st IFAC World Congress. Berlin: IFAC, 2020, 53(2): 724-729.
- [7] 郭胜辉, 朱芳来. 基于区间观测器的执行器故障检测 [J]. 控制与决策, 2016, 31(6): 1118.
- [8] 杨光红, 张志慧. 基于区间观测器的动态系统故障诊断技术综述 [J]. 控制与决策, 2018, 33(5): 769.
- [9] YANG Guanghong, ZHANG Zhihui. Review of interval observer-based fault diagnosis techniques for dynamic systems [J]. Control and Decision, 2018, 33(5): 769.
- [10] MA Li, ZHU Fanglai, ZHANG Jiancheng, *et al.* Leader-follower asymptotic consensus control of multiagent systems: An observer-based disturbance reconstruction approach [J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2021, (99): 1. doi: 10.1109/TCYB.2021.3125332.
- [11] ZHENG Gang, EFIMOV Denis, FRANCISCO Javier Bejarano, *et al.* Interval observer for a class of uncertain nonlinear singular systems [J]. Automatica, 2016, 71: 159.
- [12] MA Xiang, HUANG Jun, CHEN Liang. Finite-time interval observers' design for switched systems [J]. Circuits Systems and Signal Processing, 2019, 38: 5304.
- [13] WANG Jing, SHI Yuru, ZHOU Meng, *et al.* Active fault detection based on set-membership approach for uncertain discrete-time systems [J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2020, 30(14): 5322.
- [14] TANG Wentao, WANG Zhenhua, WANG Ye, *et al.* Interval estimation methods for discrete-time linear time-invariant

- systems [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2019, 64(11): 4717.
- [14] ZHU Fanglai, TANG Yuyan, WANG Zhenhua. Interval-observer-based fault detection and isolation design for T-S fuzzy system based on Zonotope analysis [J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2022, 30(4): 945.
- [15] TANG Wentao, WANG Zhenhua, ZHANG Qinghua, *et al.* Set-membership estimation for linear time-varying descriptor systems [J]. Automatica, 2020, 115. DOI: 10.1016/j.automatica.2020.108867.
- [16] ZHANG Xiangming, ZHU Fanglai, ZHANG Jiancheng, *et al.* Attack isolation and location for a complex network cyber-physical system via zonotope theory [J]. Neurocomputing, 2022, 469: 239.
- [17] XU Feng, TAN Junbo, WANG Xueqian, *et al.* Conservatism comparison of set-based robust fault detection methods: Set-theoretic UIO and interval observer cases [J]. Automatica, 2019, 105: 307.
- [18] ZHANG Zhihui, YANG Guangdong. Fault detection for discrete-time LPV systems using interval observers [J]. Taylor & Francis, 2017, 48(14): 2921.
- [19] SU Qingyu, FAN Zhongxin, LU Tong, *et al.* Fault detection for switched systems with all modes unstable based on interval observer [J]. Information Sciences, 2020, 517: 167.
- [20] ZHANG Zhihui, YANG Guanghong. Interval observer-based fault detection in finite frequency domain for discrete-time fuzzy systems [J]. Neurocomputing, 2018, 310: 38.
- [21] ZHANG Xiangming, ZHU Fanglai, GUO Shenghui. Actuator fault detection for uncertain systems based on the combination of the interval observer and asymptotical reduced-order observer [J]. International Journal of Control, 2020, 93(11): 2653.
- [22] 朱芳来, 蔡明, 郭胜辉. 离散切换系统观测器存在性讨论及降维观测器设计 [J]. 自动化学报, 2017, 43(12): 2091. ZHU Fanglai, CAI Ming, GUO Shenghui. Discussions on existence of observers and reduced-order observer design for discrete-time switched systems [J]. Acta Automatica Sinica, 2017, 43(12): 2091.
- [23] DENIS Efimov, TAREK Raïssi, STANISLAV Chebotarev, *et al.* Interval state observer for nonlinear time varying systems [J]. Automatica, 2013, 49(1): 200.