

# 一种新型高精度半显式基于模型的积分算法

傅博, 张付泰, 陈瑾

(长安大学 建筑工程学院, 陕西 西安 710061)

**摘要:** 提出了一种新型高精度基于模型的积分算法, 该算法采用了半显式 Chang 算法的速度、位移表达式, 但是具有不同的积分参数。采用离散控制理论中“零点匹配”和二阶 Pade 近似推导出新算法的积分参数。对算法的精度、稳定性、周期延长和振幅衰减等数值特性进行分析。与 Newmark 族积分算法和两种典型的基于模型的积分算法相比, 新算法具备四阶精度, 并且有非常小的周期误差。最后, 通过三个数值算例验证了新算法的高精度特性。

**关键词:** 积分算法; 显式; 基于模型; 精度; 周期延长

**中图分类号:** TU311.3

**文献标志码:** A

## A New Semi-explicit Model-based Integration Algorithm with High Accuracy

FU Bo, ZHANG Futai, CHEN Jin

(School of Civil Engineering, Chang'an University, Xi'an 710061, China)

**Abstract:** A new model-based integration algorithm with high accuracy is proposed. The proposed algorithm adopts the formulations of velocity and displacement of the semi-explicit Chang algorithm but uses different integration parameters. The integration parameters of the new algorithm are derived by using the zero-pole matching in discrete control theory and second-order Pade approximation. The numerical properties including accuracy, stability, period elongation and amplitude decay are analyzed. Compared with the Newmark family algorithms and two typical model-based integration algorithms, the proposed algorithm is fourth-order accurate and possess extremely small period error. Finally, the high accuracy of the algorithm is demonstrated by three numerical examples.

**Key words:** Integration algorithm; explicit; model-based; accuracy; period elongation

直接逐步积分方法被广泛应用于求解离散化的结构动力学运动方程。根据位移差分方程的表达式不同, 可以将积分算法分为显式和隐式积分算法。在求解非线性结构动力学问题时, 显式积分算法无需进行迭代, 节省了计算时间, 因此具有较高的计算效率。根据积分时间步长选取是否有限制, 积分算法又可以分为无条件稳定和条件稳定积分算法。当求解具有多自由度的复杂结构动力学问题时, 条件稳定积分算法可能需要极小的积分步长以满足稳定, 因此极大地降低了计算效率。综上, 如果一个算法同时兼具显式和无条件稳定, 那么将具有非常高的计算效率。但是, 通常显式积分算法是条件稳定, 而无条件稳定算法往往是隐式。

为了同时满足显式和无条件稳定这两个特性, 近年来学者提出一类新型积分算法, 因为其积分参数与模型质量、刚度和阻尼相关, 故被称为基于模型的积分算法<sup>[1]</sup>。基于模型积分算法计算效率高, 主要用于混合试验<sup>[2]</sup>、实时混合模拟<sup>[3]</sup>、子结构振动台试验<sup>[4]</sup>及倒塌模拟<sup>[5]</sup>中。基于模型的积分算法根据其速度差分方程的不同又可以分为双显式和半显式算法, 双显式指的是其速度、位移差分方程均为显式, 半显式指的是仅位移差分方程是显式, 但速度差分方程是隐式。Chang<sup>[6]</sup>最早提出一种基于模型的 Chang 算法, 该算法为半显式算法, 具有二阶精度。随后, Chen 和 Ricles<sup>[7]</sup>提出了另一种基于模型的 CR 算法, 该算法为双显式, 同样具有二阶精度。Gui<sup>[8]</sup>等基于 CR 算法的表达式, 提出一族双显式的 Gui 算

收稿日期: 2021-11-25

基金项目: 国家自然科学基金(51908048, 52108432); 陕西省高校科协青年人才托举计划(20200412); 长安大学中央高校基本科研业务费专项资金(300102283201)

第一作者: 傅博(1990-), 男, 副教授, 工学博士, 硕士生导师, 主要从事抗震与数值积分算法的研究。

E-mail: 90\_bofu@chd.edu.cn

通信作者: 陈瑾(1990-), 女, 讲师, 工学博士, 硕士生导师, 主要从事轨道减隔振及数值积分算法的研究。

E-mail: chenjin5310@126.com



论文  
拓展  
介绍

法,Gui算法与 $\gamma=1/2$ 的Newmark族算法具有相同的数值特性,具有二阶精度。Fu<sup>[9]</sup>等提出一族与Newmark族算法<sup>[10]</sup>具有相同数值特性的双显式GCR算法,该族算法的精度不超过二阶。

综上,与传统积分算法相比,基于模型的积分算法虽然在计算效率上有很大优势,但是在精度上和常规方法类似。为此本文提出一种高精度的基于模型的积分算法,该算法既保持了基于模型的积分算法的显式和无条件稳定的数值特性,同时具有更高的数值精度。

## 1 新算法的建立

### 1.1 已有积分算法简介

对于线弹性的单自由度(SDOF)结构体系,离散时间系统下结构运动方程可表示为

$$m\ddot{x}_{i+1} + c\dot{x}_{i+1} + kx_{i+1} = F_{i+1} \quad (1)$$

式中: $m, c, k$ 分别为质量,阻尼系数和刚度, $c = 2m\omega\xi$ ,其中 $\xi$ 为阻尼比, $\omega$ 为圆频率, $\omega = \sqrt{k/m}$ ;  $\ddot{x}_{i+1}, \dot{x}_{i+1}, x_{i+1}$ 分别为 $i+1$ 时刻的加速度,速度和位移; $F_{i+1}$ 为 $i+1$ 时刻的外界激励。

积分算法可用于求解式(1),以经典的Newmark族积分算法为例,其速度、位移差分方程如下:

$$\dot{x}_{i+1} = \dot{x}_i + \Delta t [(1-\gamma)\ddot{x}_i + \gamma\ddot{x}_{i+1}] \quad (2)$$

$$x_{i+1} = x_i + \Delta t\dot{x}_i + \Delta t^2 [(0.5-\beta)\ddot{x}_i + \beta\ddot{x}_{i+1}] \quad (3)$$

式中: $\Delta t$ 是积分时间步长, $\beta, \gamma$ 是积分参数,直接影响积分算法的数值特性。常用的Newmark算法包括常平均加速度法(CAA,  $\beta=1/4, \gamma=1/2$ ),线性加速度法(LA,  $\beta=1/6, \gamma=1/2$ ),显式算法(NE,  $\beta=0, \gamma=1/2$ )。由于 $\beta$ 和 $\gamma$ 与结构模型无关,所以Newmark算法属于模型不相关的积分算法。

与模型不相关的积分算法不同,基于模型的积分算法的积分参数与模型相关,以CR算法为例,其速度、位移差分方程如下:

$$\dot{x}_{i+1} = \dot{x}_i + \alpha_1 \Delta t \ddot{x}_i \quad (4)$$

$$x_{i+1} = x_i + \Delta t \dot{x}_i + \alpha_2 \Delta t^2 \ddot{x}_i \quad (5)$$

式中: $\alpha_1, \alpha_2$ 为与模型相关的积分参数,其值为

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{4}{\omega^2 \Delta t^2 + 4\xi\omega\Delta t + 4} \quad (6)$$

类似地,Chang算法的速度、位移差分方程如下:

$$\dot{x}_{i+1} = \dot{x}_i + 0.5\Delta t\ddot{x}_i + 0.5\Delta t\ddot{x}_{i+1} \quad (7)$$

$$x_{i+1} = x_i + \alpha_1 \Delta t \dot{x}_i + \alpha_2 \Delta t^2 \ddot{x}_i \quad (8)$$

式中: $\alpha_1, \alpha_2$ 亦为与模型相关的积分参数,其值为

$$\alpha_1 = \frac{4(1 + \xi\omega\Delta t)}{\omega^2 \Delta t^2 + 4\xi\omega\Delta t + 4} \quad (9)$$

$$\alpha_2 = \frac{2}{\omega^2 \Delta t^2 + 4\xi\omega\Delta t + 4} \quad (10)$$

本文提出一种新型高精度半显式基于模型的积分算法,该算法采用Chang算法相同的速度、位移差分方程,但是具有不同的积分参数。下文将对新算法的积分参数进行推导。

### 1.2 离散控制理论方法

采用离散控制理论的方法来确定基于模型的积分算法的积分参数,该方法在文献<sup>[7-9]</sup>已经成功应用。

根据离散控制理论,式(7),(8)和式(1)的Z变换形式如下:

$$X(z) = z^{-1}X(z) + z^{-1}\alpha_1\Delta tX_v(z) + z^{-1}\alpha_2\Delta t^2X_a(z) \quad (11)$$

$$X_v(z) = z^{-1}X_v(z) + \frac{1}{2}z^{-1}\Delta tX_a(z) + \frac{1}{2}\Delta tX_a(z) \quad (12)$$

$$mX_a(z) + cX_v(z) + kX(z) = F(z) \quad (13)$$

式中: $X(z), X_v(z), X_a(z), F(z)$ 分别为 $x_{i+1}, \dot{x}_{i+1}, \ddot{x}_{i+1}, f_{i+1}$ 的Z变换形式。

联立式(11)~(13),得

$$G(z) = \frac{X(z)}{F(z)} = \frac{n_2z^2 + n_1z + n_0}{d_2z^2 + d_1z + d_0} \quad (14)$$

其中,分子分母系数如表1所示。

表1 离散传递函数的分子和分母系数

Tab.1 Numerator and denominator coefficients of the discrete transfer function

分子系数	值	分母系数	值
$n_2$	0	$d_2$	$m(2\xi\omega\Delta t + 2)$
$n_1$	$(\alpha_1 + 2\alpha_2)\Delta t^2$	$d_1$	$m[(\alpha_1 + 2\alpha_2)\omega^2\Delta t^2 - 4]$
$n_0$	$(\alpha_1 - 2\alpha_2)\Delta t^2$	$d_0$	$m[(\alpha_1 - 2\alpha_2)\omega^2\Delta t^2 - 2\xi\omega\Delta t + 2]$

一种称为“零极点匹配”的离散化方法在控制理论中用来从连续域的极点映射到离散域的极点,这种精确的映射法则规定如下:

$$z = e^{s\Delta t} \quad (15)$$

式中: $\Delta t$ 为采样周期,可以令其与积分算法的时间步长相等。式(15)的映射法则不太适合实际应用,因此通常采用近似的映射法则。

本文新算法采用2阶pade近似其映射规则如下:

$$z \approx \frac{12 + 6s\Delta t + (s\Delta t)^2}{12 - 6s\Delta t + (s\Delta t)^2} \quad (16)$$

采用2阶pade近似与式(15)的逼近程度远优于用于CR算法和Chang算法的1阶pade近似,对比情况如图1所示,可以看出,2阶pade近似的效果要远优于1阶pade近似,尤其当 $s\Delta t < -0.5$ 时。

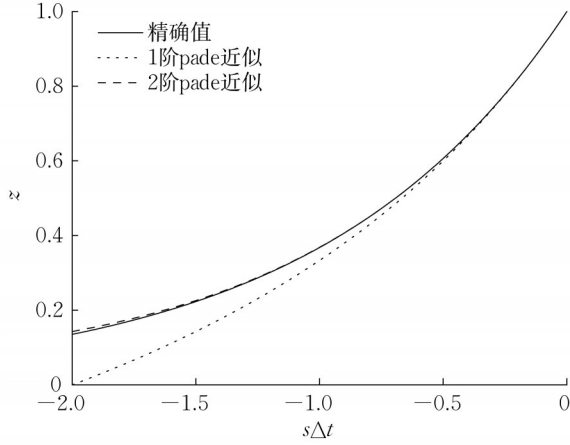


图1 两种Pade近似与指数函数对比

Fig.1 Comparisons of two Pade approximations with exponential function

### 1.3 新算法积分参数推导(SDOF体系)

采用2阶pade近似的离散传递函数极点如下:

$$z_{1,2} \approx \frac{12 + 6s\Delta t + (s\Delta t)^2}{12 - 6s\Delta t + (s\Delta t)^2} \quad (17)$$

式中:  $s_{1,2} = -\xi\omega \pm i\omega\sqrt{(1-\xi^2)}$ 。因此离散的  $z_{1,2}$  的值如下:

$$z_{1,2} \approx \frac{12 + 6s \left[ -\xi\omega \pm i\omega\sqrt{(1-\xi^2)} \right] \Delta t + \left\{ \left[ -\xi\omega \pm i\omega\sqrt{(1-\xi^2)} \right] \Delta t \right\}^2}{12 - 6s \left[ -\xi\omega \pm i\omega\sqrt{(1-\xi^2)} \right] \Delta t + \left\{ \left[ -\xi\omega \pm i\omega\sqrt{(1-\xi^2)} \right] \Delta t \right\}^2} \quad (18)$$

根据式(14)特征方程的零点,特征方程可表达为

$$\alpha_{1j}^* = \frac{72\Delta t C_j^* M_j^* + 144M_j^{*2}}{\Delta t^4 K_j^{*2} + 6\Delta t^3 K_j^* C_j^* + 12\Delta t^2 C_j^{*2} + 12\Delta t^2 M_j^* K_j^* + 72\Delta t C_j^* M_j^* + 144M_j^{*2}} \quad (28)$$

$$\alpha_{2j}^* = \frac{72M_j^{*2} - \Delta t^3 K_j^* C_j^* + (36\Delta t - 48\xi_j^2 \Delta t) C_j^* M_j^*}{\Delta t^4 K_j^{*2} + 6\Delta t^3 K_j^* C_j^* + 12\Delta t^2 C_j^{*2} + 12\Delta t^2 M_j^* K_j^* + 72\Delta t C_j^* M_j^* + 144M_j^{*2}} \quad (29)$$

式中:  $M_j^*$ ,  $C_j^* = 2M_j^* \xi_j \omega_j$ ,  $K_j^* = M_j^* \omega_j^2$  分别为第  $j$  阶模态的质量, 阻尼和刚度矩阵;  $\xi_j$ ,  $\omega_j$  分别为第  $j$  阶模态的阻尼比和圆频率。因此, 对角积分参数矩阵  $\alpha_1^*$ ,  $\alpha_2^*$  形式如下:

$$\alpha_1^* = \alpha^{-1} [72\Delta t C^* M^* + 144M^{*2}] \quad (30)$$

$$\begin{cases} d_2 z_1^2 + d_1 z_1 + d_0 = 0 \\ d_2 z_2^2 + d_1 z_2 + d_0 = 0 \end{cases} \quad (19)$$

将表1中离散传递函数的分母系数  $d_2$ ,  $d_1$ ,  $d_0$  和式(18), 同时代入式(19), 可以联立求解得到积分参数  $\alpha_1$  和  $\alpha_2$  的值为

$$\alpha_1 = \frac{144\xi\Omega + 144}{\Omega^4 + 12\xi\Omega^3 + (48\xi^2 + 12)\Omega^2 + 144\xi\Omega + 144} \quad (20)$$

$$\alpha_2 = \frac{72 - 2\xi\Omega^3 + (72\xi - 96\xi^3)\Omega}{\Omega^4 + 12\xi\Omega^3 + (48\xi^2 + 12)\Omega^2 + 144\xi\Omega + 144} \quad (21)$$

式中:  $\Omega = \omega\Delta t$ 。

### 1.4 新算法积分参数推导(MDOF体系)

对于具有  $n$  个自由度的多自由度(MDOF)线弹性系统, 新算法的速度、位移微分方程和运动方程如下:

$$\dot{X}_{i+1} = \dot{X}_i + \frac{1}{2} \Delta t \ddot{X}_i + \frac{1}{2} \Delta t \ddot{X}_{i+1} \quad (22)$$

$$X_{i+1} = X_i + \Delta t \alpha_1 \dot{X}_i + \Delta t^2 \alpha_2 \ddot{X}_i \quad (23)$$

$$M\ddot{X}_{i+1} + C\dot{X}_{i+1} + KX_{i+1} = F_{i+1} \quad (24)$$

假定阻尼矩阵是经典阻尼, 由于结构振型的正交性, 可将式(22), (23)和(24)写成模态坐标系下的表达式, 即

$$\dot{Y}_{i+1} = \dot{Y}_i + \frac{1}{2} \Delta t \ddot{Y}_i + \frac{1}{2} \Delta t \ddot{Y}_{i+1} \quad (25)$$

$$Y_{i+1} = Y_i + \Delta t \alpha_1^* \dot{Y}_i + \Delta t^2 \alpha_2^* \ddot{Y}_i \quad (26)$$

$$M^* \ddot{Y}_{i+1} + C^* \dot{Y}_{i+1} + K^* Y_{i+1} = \Phi^T F_{i+1} \quad (27)$$

式中:  $\Phi = [\phi_1 \ \phi_2 \ \dots \ \phi_n]$  是模态矩阵;  $\phi_j$  ( $j = 1 \dots n$ ) 是第  $j$  阶模态的特征向量;  $Y$  是模态坐标中的位移矢量, 与  $X$  的关系为  $X = \Phi Y$ ;  $\alpha_1^* = \Phi^{-1} \alpha_1 \Phi$  和  $\alpha_2^* = \Phi^{-1} \alpha_2 \Phi$  是对角积分参数矩阵;  $M^* = \Phi^T M \Phi$ ,  $C^* = \Phi^T C \Phi$  和  $K^* = \Phi^T K \Phi$  分别为模态质量, 阻尼和刚度矩阵。因此, 第  $j$  阶模态的积分参数可以表示为SDOF体系的积分参数, 其形式如下:

$$\alpha_2^* = \alpha^{-1} [72M^{*2} - \Delta t^3 K^* C^* + (36\Delta t - 48\xi_j^2 \Delta t) C^* M^*] \quad (31)$$

因此, 可以进一步得到基于模型的积分参数矩阵  $\alpha_1$  和  $\alpha_2$  如下:

$$\alpha_1 = \Phi \alpha^{-1} [72\Delta t C^* M^* + 144M^{*2}] \Phi^{-1} \quad (32)$$

$$\alpha_2 = \Phi \alpha^{-1} [72M^{*2} - \Delta t^3 K^* C^* + (36\Delta t - 48\xi^2 \Delta t) C^* M^*] \Phi^{-1} \quad (33)$$

式中:  $\alpha = \Delta t^4 K^{*2} + 6\Delta t^3 K^* C^* + 12\Delta t^2 C^{*2} + 12\Delta t^2 M^* K^* + 72\Delta t C^* M^* + 144M^{*2}$

## 2 数值特性分析

### 2.1 精度分析

首先将式(1), (7)和(8)写成递推矩阵的形式:

$$\begin{bmatrix} x_{i+1} \\ \Delta t \dot{x}_{i+1} \\ \Delta t^2 \ddot{x}_{i+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_i \\ \Delta t \dot{x}_i \\ \Delta t^2 \ddot{x}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Delta t^2/m \end{bmatrix} f_{i+1} \quad (34)$$

式中:  $A$  为放大矩阵, 其值为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ -\frac{\omega^2 \Delta t^2}{2(\xi \omega \Delta t + 1)} & -\frac{\alpha_1 \omega^2 \Delta t^2 - 2}{2(\xi \omega \Delta t + 1)} & -\frac{\alpha_2 \omega^2 \Delta t^2 - 1}{2(\xi \omega \Delta t + 1)} \\ -\frac{\omega^2 \Delta t^2}{\xi \omega \Delta t + 1} & -\frac{\alpha_1 \omega^2 \Delta t^2 + 2\xi \omega \Delta t}{\xi \omega \Delta t + 1} & -\frac{\alpha_2 \omega^2 \Delta t^2 + \xi \omega \Delta t}{\xi \omega \Delta t + 1} \end{bmatrix}$$

放大矩阵  $A$  的特征方程按照  $|A - \lambda I| = 0$  进行计算如下:

$$\lambda^3 - 2A_1 \lambda^2 + A_2 \lambda - A_3 = 0 \quad (35)$$

式中:  $\lambda$  为放大矩阵  $A$  的特征值;  $A_1, A_2, A_3$  的表达式为

$$\begin{cases} A_1 = (4 - \alpha_1 \Omega^2 - 2\alpha_2 \Omega^2) / 4(\xi \Omega + 1) \\ A_2 = (\alpha_1 \Omega^2 - 2\alpha_2 \Omega^2 - 2\xi \Omega + 2) / 2(\xi \Omega + 1) \\ A_3 = 0 \end{cases}$$

离散时间系统的位移数值解与连续时间系统的位移精确解的差值称为局部截断误差<sup>[11]</sup>, 表示如下:

$$\tau = [x(t + \Delta t) - 2A_1 x(t) + A_2 x(t - \Delta t) - A_3 x(t - 2\Delta t)] / \Delta t^2 \quad (36)$$

假设位移任何阶导数均连续可微, 则式(36)的有限阶的泰勒级数展开如下所示:

$$\tau = \sum_{l=0}^L T_l \Delta t^{l-2} x^{(l)} + O(\Delta t^{L-1}) \quad (37)$$

式中:  $x^{(l)}$  为位移的第  $l$  阶微分,  $T_l$  的表达式如下所示:

$$\begin{cases} T_0 = 1 - 2A_1 + A_2 - A_3 \\ T_l = \frac{1}{l!} [1 + (-1)^l A_2 - (-2)^l A_3], l \geq 1 \end{cases} \quad (38)$$

这里假设  $L=5$ , 可以得到新算法的局部截断误差表达式如下:

$$\tau = \frac{d_1}{d_3} x(t) + \frac{d_2}{d_3} \dot{x}(t) + O(\Delta t^4) \quad (39)$$

式中:

$$\begin{cases} d_1 = 96\omega^2 [(\xi^2 - \frac{5}{8})(\xi^2 - \frac{1}{12})\Omega^2 + 2\xi^4 - \xi^2] \Omega^4 \\ d_2 = 192\omega\xi [(\xi^4 - \frac{23}{24}\xi^2 + \frac{1}{6})\Omega^2 + 2\xi^4 - \frac{3}{2}\xi^2 + \frac{1}{8}] \Omega^4 \\ d_3 = 60\Omega^4 + 720\xi\Omega^3 + (2880\xi^2 + 720)\Omega^2 + 8640\xi\Omega + 8640 \end{cases}$$

从系数  $d_1, d_2, d_3$  可以看出, 新算法具有4阶精度, 而 Chang、CR、CAA、LA、NE 等算法均为2阶精度。为了进一步验证本文提出的新算法具有4阶精度, 用无阻尼线弹性单自由度结构的自由振动来给出新算法的绝对误差收敛速率, 如图2所示。取  $\omega = 2\pi \text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $x(0) = 1\text{m}$ ,  $\dot{x}(0) = 1\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ , 计算时间  $t_n = 1\text{s}$ , 计算次数  $N = 10, 100, 1000, 10000$ 。

### 2.2 稳定性分析

如果积分算法放大矩阵的谱半径  $\rho = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|\} \leq 1$ , 那么该算法就是稳定的, 但是如果三个特征根中有重根时, 那么仅当  $\rho < 1$  时, 算法才是稳定的。

本文方法放大矩阵的特征值可由式(35)求得

$$\begin{cases} \lambda_{1,2} = \sigma \pm \epsilon i, \lambda_3 = 0 \\ \rho = \sqrt{\sigma^2 + \epsilon^2} \\ \sigma = \frac{144 + \Omega^4 + (48\xi^2 - 60)\Omega^2}{144 + \Omega^4 + 12\xi\Omega^3 + (48\xi^2 + 12)\Omega^2 + 144\xi\Omega} \\ \epsilon = \frac{12\Omega(\Omega^2 - 12)\sqrt{1 - \xi^2}}{144 + \Omega^4 + 12\xi\Omega^3 + (48\xi^2 + 12)\Omega^2 + 144\xi\Omega} \end{cases} \quad (40)$$

本文方法的谱半径如图3所示。

由图3可知, 当  $\xi > 0$  时, 谱半径  $\rho < 1$ , 表明本文方法在有阻尼情况下无条件稳定; 当  $\xi = 0$  时, 谱半径  $\rho = 1$ , 当  $\Omega = 2\sqrt{3}$  时,  $\epsilon = 0$ , 意味着有两个重根  $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ , 表明在该特例下算法不稳定, 而对于其他  $\Omega$  值, 本文方法均稳定。因为真实结构均存在阻尼, 因此, 本文方法仍可视为无条件稳定的算法。

### 2.3 周期延长和振幅衰减

算法的周期延长 ( $P_E$ ) 和振幅衰减 (AD) 可以反映积分算法的数值准确度。算法的周期延长  $P_E$  定义如下:

$$P_E = (\bar{T}_n - T_n) / T_n = \Omega / \bar{\Omega} - 1 \quad (41)$$

式中:  $\bar{T}_n = 2\pi / \bar{\omega}$ ,  $\bar{\omega} = \bar{\Omega} / \Delta t$ ,  $T_n$  为 SDOF 结构体系无阻尼自振周期。振幅衰减 AD 如图4定义。

振幅衰减 AD 还可以通过算法的数值阻尼  $\bar{\xi}$  来量



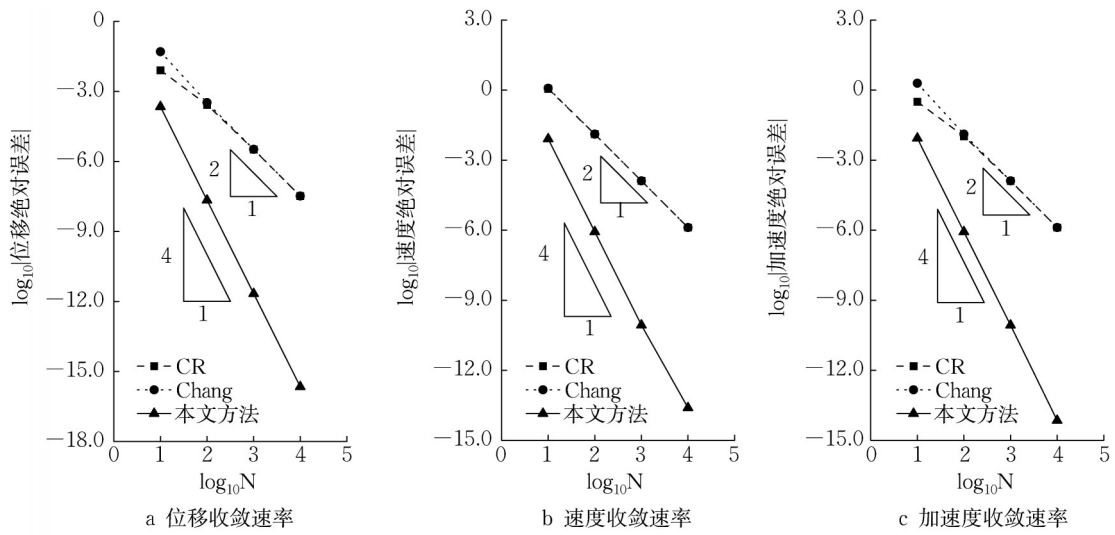


图 2 CR, Chang 和本文方法对位移、速度和加速度的收敛速率对比

Fig.2 Comparison of the convergence rates of CR, Chang and this paper's methods for displacement, velocity and acceleration

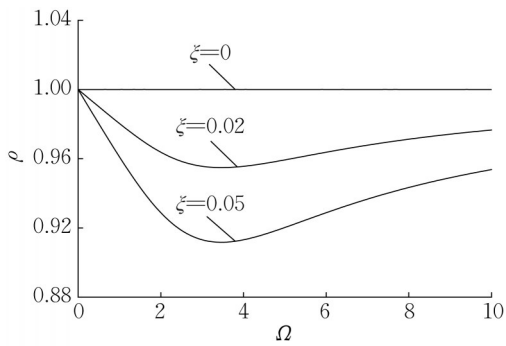


图 3 新算法的谱半径

Fig.3 Spectra radius of new algorithm

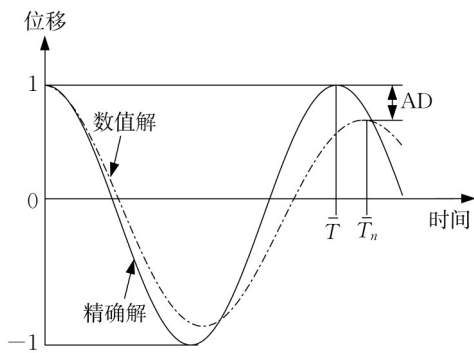


图 4 振幅衰减的定义

Fig.4 Definition of amplitude decay (AD)

化,其表达式如下:

$$\begin{cases} \bar{\xi} = \frac{-\ln(\sigma^2 + \epsilon^2)}{2\bar{\Omega}} \\ \bar{\Omega} = \frac{\tan^{-1}(\epsilon/\sigma)}{\sqrt{1 - \bar{\xi}^2}} \end{cases} \quad (42)$$

正是由于数值阻尼 $\bar{\xi}$ 的存在才造成了振幅衰减现象。当 $\bar{\xi}=0$ 时,新算法的数值阻尼为 $\bar{\xi}=0$ ,故不存在振幅衰减,该数值特性与Chang、CR、CAA、LA、NE等算法一致。图5为本文方法与几种已有算法的周期延长对比,可以看出,本文方法相较于几种已有算法,具有极低的周期延长,这也从侧面反映出本文方法的精度高。

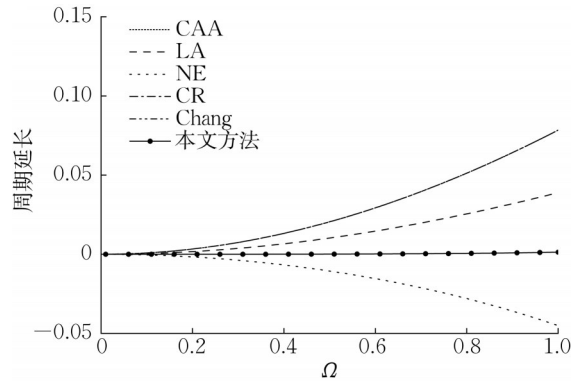


图 5 多种积分算法的周期延长 PE 对比

Fig.5 Comparison of period elongation (PE) of various integration algorithms

### 3 数值算例

#### 3.1 无阻尼线弹性 SDOF 结构的自由振动

采用本文方法、Chang 和 CR 算法对无阻尼线弹性 SDOF 结构的自由振动进行求解,采用时间步长为 $\Delta t=0.02s$ 和 $\Delta t=0.05s$ 进行计算。该结构质量 $m=20kg$ , $k=2000N \cdot s^{-1}$ ,因此结构的自振频率 $\omega=$

10rad·s<sup>-1</sup>。结构的初始位移  $x_0=0\text{m}$ , 初始速度  $\dot{x}_0=1\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ 。结构模型如图6所示。

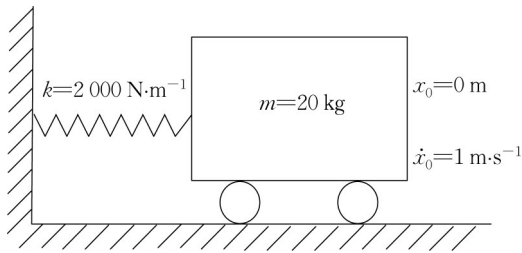


图6 无阻尼线弹性SDOF结构的简图

Fig.6 Schematic diagram of a linear elastic SDOF system without damping

无阻尼线弹性SDOF结构的自由振动的位移解析解<sup>[12]</sup>如下:

$$x(t) = x(0) \cos \omega t + \frac{\dot{x}(0)}{\omega} \sin \omega t \quad (43)$$

图7为3种积分算法采用两种不同积分步长计算得到的位移时程曲线。由图7可以看出,本文方法的计算结果与精确解非常接近,而CR、Chang算法的计算结果与精确解存在较为明显的差异,尤其是当  $\Delta t=0.05\text{s}$  时,由周期延长引起的相位误差较大。

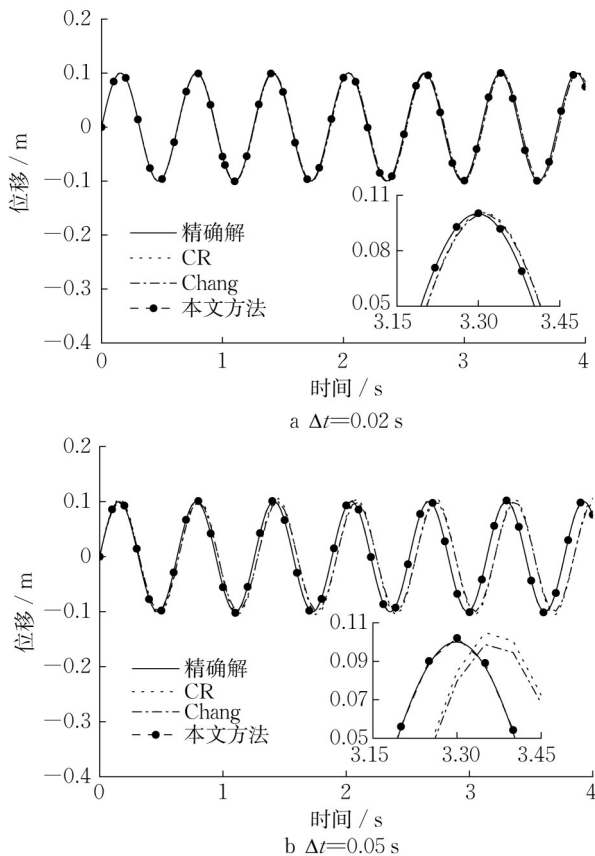


图7 位移时程曲线

Fig.7 Time history curves of displacement

进一步,采用以下两个指标来衡量积分算法的误差:

$$N_{EE} = \left| \frac{\sum_{i=1}^n x_{R,i}^2 - \sum_{i=1}^n x_{N,i}^2}{\sum_{i=1}^n x_{N,i}^2} \right| \quad (44)$$

$$N_{RMSE} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_{R,i} - x_{N,i})^2}{n}} \quad (45)$$

$$\max(x_N) - \min(x_N)$$

式中: $x_N$ 和 $x_R$ 分别代表数值(Numerical)结果和参考(Reference)结果; $N$ 是样本数目。 $N_{EE}$ 和 $N_{RMSE}$ 分别对幅值和相位误差比较敏感。表2列出了位移误差指标。

表2 位移误差指标

Tab.2 Error indices of displacement

		%	
$\Delta t$	算法	$N_{EE}$	$N_{RMSE}$
0.02s	CR	1.459 3	10.170 0
	Chang	1.522 3	10.217 9
	本文方法	0.002 8	0.053 8
0.05s	CR	7.588 7	44.888 4
	Chang	4.323 7	46.255 2
	本文方法	0.041 3	0.727 6

由表2可以看出,相同时间步长的情况下,Chang算法的 $N_{EE}$ 小于CR算法,二者的 $N_{RMSE}$ 接近,而本文方法的 $N_{EE}$ 和 $N_{RMSE}$ 均远小于CR和Chang算法;本文方法在较大时间步长(0.05s)时,误差还不到CR和Chang算法在较小时间步长(0.02s)时的8%。

### 3.2 两层钢框架有限元模型的地震响应分析

选取某两层钢框架办公楼,该建筑的层高为4m,跨度为9m,侧向力由抗弯框架承担,重力由倚靠柱承担,抗弯框架与倚靠柱之间通过刚性楼板假定进行关联,其结构如图8所示。

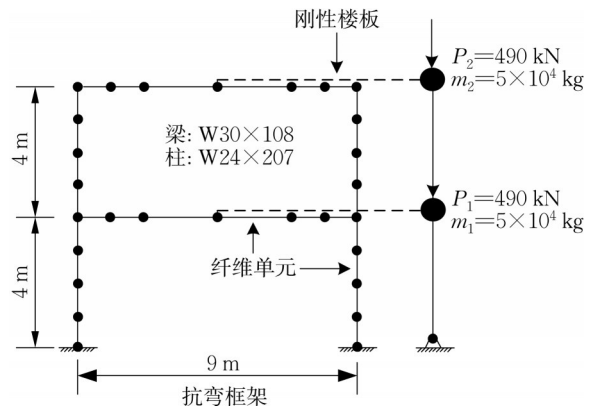


图8 两层钢框架结构示意图

Fig.8 Schematic diagram of two-story steel frame structure

基于 Matlab/Simulink<sup>[13]</sup>, 对该结构进行了有限元建模: 材料密度为  $7.8 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ , 采用理想弹塑性材料本构关系, 弹性模量  $2 \times 10^{11} \text{ Pa}$ , 屈服强度为  $3.45 \times 10^8 \text{ Pa}$ 。采用基于刚度的纤维梁单元模拟梁柱构件<sup>[14]</sup>, 单元的积分点数为 5, 截面纤维数为 24; 采用弹性梁柱单元模拟倚靠柱并考虑 P- $\Delta$  效应。该结构模型共包括 31 个节点, 30 个单元以及 83 个自由度。采用集中质量矩阵, 阻尼矩阵采用瑞利阻尼, 假定前两阶模态阻尼比为 2%。

为了验证基于 Matlab/Simulink 所建立的有限元模型的可靠性, 在 OpenSEES 中对该框架进行建模: 材料本构采用 uniaxialMaterial ElasticPP, 梁、柱均采用 dispBeamColumn 单元, 倚靠柱采用 elasticBeamColumn 单元, 其余模型参数与 Matlab/Simulink 模型保持一致。Matlab/Simulink 模型与 OpenSEES 模型前 5 阶周期对比如表 3 所示。

表 3 Matlab/Simulink 模型与 OpenSEES 模型前 5 阶周期对比

Tab.3 Comparison of first 5th order periods of the Matlab/Simulink model and the OpenSEES model

阶数	Matlab/Simulink 模型/s	OpenSEES 模型/s	误差/%
1	0.306 945	0.306 991	0.015 0
2	0.076 473	0.076 019	0.597 2
3	0.019 860	0.020 079	1.090 7
4	0.017 239	0.017 434	1.118 5
5	0.008 600	0.008 620	0.232 0

从表 3 中可以看出, 基于 Matlab/Simulink 建立的有限元模型的前 5 阶周期与基于 OpenSEES 建立的有限元模型的前 5 阶周期非常接近, 误差最大仅为 1.118 5%, 从而说明本文基于 Matlab/Simulink 建立的有限元模型的可靠性。

将 El Centro NS, 1940 作为结构的地震动输入, 采用 CR、Chang 及本文方法进行时程分析, 同时采用  $\Delta t=0.001 \text{ s}$  的 CAA 算法作为参考解。图 9 给出了不同时间步长 ( $\Delta t=0.005 \text{ s}$ ,  $0.01 \text{ s}$  和  $0.02 \text{ s}$ ) 时各算法的首层位移时程曲线。

从图 9 和表 4 可以看出, 相同时间步长下, CR 算法和 Chang 算法的计算结果很接近, 误差指标也非常接近, 而本文方法的结果与参考解更契合,  $N_{EE}$  和  $N_{RMSE}$  均小于 CR 算法和 Chang 算法, 其中本文方法的  $N_{RMSE}$  优势非常明显, 不及 CR 算法和 Chang 算法的 5%。即便在较大时间步长 ( $\Delta t=0.02 \text{ s}$ ) 时, 本文方法的  $N_{EE}$  也不到 3%,  $N_{RMSE}$  不到 0.3%, 这说明本文方法

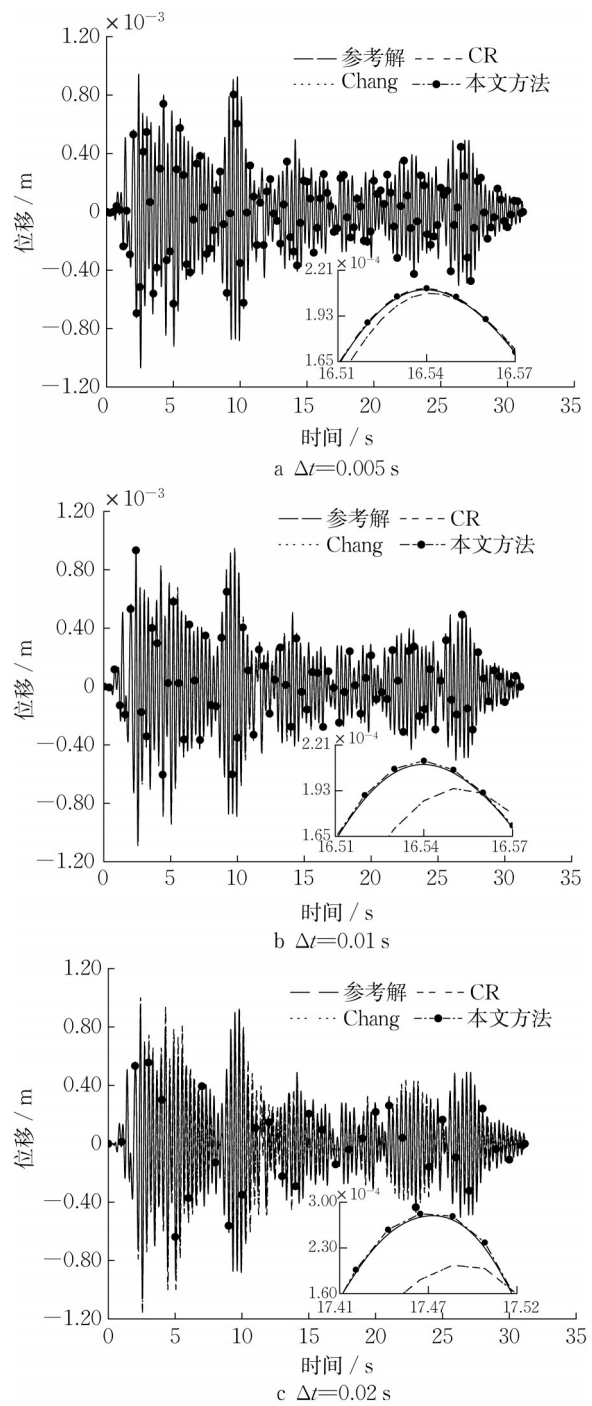


图 9 首层位移时程曲线

Fig.9 Time history curves of displacement at first story

在较大时间步长时也可以达到较高精度。表 5 给出了本算例中各算法在不同时间步长的计算时间, 使用的计算机配置为 CPU Intel Core i5-6 300HQ @2.30GHz, 内存 8G。

由表 5 可以看出, 当时间步长相同时, 本文方法与 CR 算法、Chang 算法的计算时间接近, 但是计算时间明显小于隐式 CAA 算法。结合表 4、5 可知,  $\Delta t=0.02 \text{ s}$  时本文方法的  $N_{EE}$  仍小于  $\Delta t=0.01 \text{ s}$  时 CR 算法

表4 位移误差指标

Tab.4 Error indices of displacement

时间步长 $\Delta t$	算法	$N_{EE}$	$N_{RMSE}$
0.005s	CR	1.055 4	0.441 2
	Chang	1.046 1	0.442 4
	本文方法	0.328 7	0.032 9
0.01s	CR	3.216 1	1.765 4
	Chang	3.191 1	1.769 9
	本文方法	0.823 2	0.067 6
0.02s	CR	4.818 7	6.272 1
	Chang	4.723 0	6.289 1
	本文方法	2.833 8	0.245 9

表5 各算法的计算时间对比

Tab.5 Comparison of computation time of different algorithms

算法	时间步长 $\Delta t$		
	0.005	0.01	0.02
CAA	212.18	107.50	79.07
CR	67.718	33.90	17.32
Chang	66.19	33.27	17.26
本文方法	65.37	34.45	17.19

和Chang算法的 $N_{EE}$ ;  $\Delta t=0.02s$ 时本文方法的 $N_{RMSE}$ 仍远小于 $\Delta t=0.01s$ 时CR算法和Chang算法的 $N_{RMSE}$ ,这说明 $\Delta t=0.02s$ 时本文方法的计算精度高于 $\Delta t=0.01s$ 时CR算法和Chang算法。 $\Delta t=0.01s$ 时CR算法和Chang算法分别耗时33.90s和33.27s,而 $\Delta t=0.02s$ 时本文方法耗时仅为17.19s。这说明本文方法不仅节约了约50%的计算时间,还达到了更高的计算精度。从另一个角度来说,在保证相近的计算精度的前提下,本文方法的计算效率要高于CR算法和Chang算法。

### 3.3 多自由度非线性质量-弹簧系统的动力学问题

基于模型的积分算法非常重要的特性是无条件稳定性和显式表达式。无条件稳定性意味着无需为了保证算法的稳定性而可以选择较大的时间步长,显式格式则意味着求解非线性问题时无需迭代。因此,基于模型的积分算法计算效率高也对应于上述两个方面:一是较大的时间步长,从而计算步数较少;二是每一积分时间步的计算时间短,因为无需迭代。本节将选取图10中具有 $N$ 个自由度的非线性质量-弹簧系统来说明本文方法在计算效率和计算精度方面的优势。

在图10的质量-弹簧系统中, $m_i=150kg$ ,  $k_i=5.5 \times 10^5 N \cdot m^{-1}$  ( $i=1, 2, 3 \dots N$ ),  $\ddot{x}_g=10\sin(10t) m \cdot s^{-2}$  ( $t=0 \dots 5s$ ), 阻尼矩阵采用瑞利阻尼,假定前两阶模态阻尼比为2%,采用式(46)的非线性刚度,则

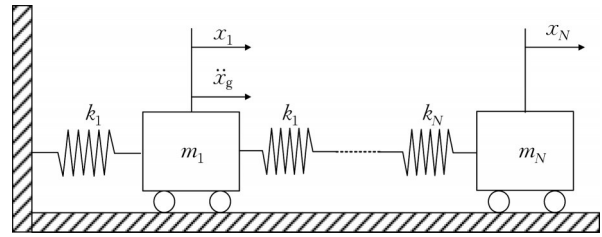


图10 质量-弹簧系统示意图

Fig.10 Schematic diagram of Mass-Spring system

$$k_{i,t} = k_{i,0} \left[ 1 - \sqrt{|x_{i,t} - x_{i-1,t}|} \right] \quad (46)$$

式中: $k_{i,t}$ 为 $t$ 时刻的第 $i$ 个弹簧的刚度; $x_{i,t}$ 为 $t$ 时刻的第 $i$ 个质量的位移; $x_{i-1,t}$ 为 $t$ 时刻的第 $i-1$ 个质量的位移。考虑 $N=50, 100, 400, 700, 1000$ 等5种不同自由度数的工况,选取 $\Delta t=0.001s$ 的Newmark显式算法作为参考解,对比 $\Delta t=0.05s$ 的CAA算法、振型叠加法、CR算法、Chang算法和本文方法的计算结果。表6给出了各算法的计算时间和 $x_{50}$ 的误差指标。

表6 各算法的计算时间和位移误差指标对比

Tab.6 Comparison of computation time and error indices of displacement of different algorithms

自由度数	方法	计算时间	$x_{50}$ 计算误差/ %	
			$N_{EE}$	$N_{RMSE}$
50	CAA	0.059 2	35.469 1	7.469 6
	振型叠加法	0.009 3	28.464 8	5.013 8
	CR	0.011 1	22.297 2	7.166 4
	Chang	0.016 2	22.697 2	7.314 5
	本文方法	0.023 0	3.410 9	0.618 0
100	CAA	0.196 1	5.334 3	6.170 1
	振型叠加法	0.008 9	1.237 4	4.341 4
	CR	0.027 1	16.991 1	6.851 9
	Chang	0.041 5	16.548 4	6.958 3
400	CAA	2.336 4	16.058 5	4.411 9
	振型叠加法	0.018 9	18.450 3	3.542 3
	CR	0.216 0	4.738 6	4.101 9
	Chang	0.474 3	7.760 8	4.379 1
	本文方法	0.536 6	3.688 4	0.779 3
700	CAA	6.384 6	12.099 5	3.307 9
	振型叠加法	0.021 7	16.462 1	2.483 7
	CR	0.727 4	4.466 1	3.000 4
	Chang	1.523 7	7.660 1	3.314 4
1000	CAA	15.463 9	8.951 9	2.275 6
	振型叠加法	0.032 2	13.633 1	1.961 1
	CR	1.410 1	3.704 6	2.012 7
	Chang	3.090 7	6.541 5	2.011 2
	本文方法	3.685 1	3.856 8	0.789 7

从表6中可以看出,CAA算法的计算时间远大于本文方法和其他方法,这是因为CAA算法需要迭



代,CAA算法的 $N_{EE}$ 和 $N_{RMSE}$ 均大于本文方法,说明CAA算法的计算精度和计算效率均逊于本文方法;振型叠加法的计算时间相对于本文方法和其他方法有明显的优势,但是该方法在求解非线性问题时较大的误差,虽然在100自由度工况时,其 $N_{EE}$ 略小于本文方法,但是其 $N_{RMSE}$ 是本文方法的5倍,而在其余4种自由度工况下,振型叠加法的 $N_{EE}$ 、 $N_{RMSE}$ 均大于本文方法;与CR算法和Chang算法相比,本文方法计算时间略长,这是因为在计算积分参数矩阵的过程中需要额外的计算时间,但是在计算精度上,本文方法的 $N_{EE}$ 和 $N_{RMSE}$ 基本上都要小于CR算法和Chang算法,只有在1000自由度工况下,CR算法的 $N_{EE}$ 略小于本文方法,但是其 $N_{RMSE}$ 是本文方法的2.5倍。综上,本文方法在计算精度上有明显的综合优势。

## 4 结论

本文提出了一种新型高精度半显式基于模型的积分算法。新算法与半显式Chang算法具有相同的速度、位移差分方程,采用二阶Pade近似极点映射方法生成新算法的积分参数。对新算法的精度、稳定性和周期延长和振幅衰减等数值特性进行分析,发现本文方法具有四阶精度,周期延长极小,并且没有能量耗散。通过3个具有代表性的数值算例,进一步论证了本文方法的优越性。

### 作者贡献声明:

傅博:论文修改,数据分析;  
张付泰:论文撰写,编程计算;  
陈瑾:论文修改,数据校核。

### 参考文献:

- [1] KOLAY C, RICLES J M. Assessment of explicit and semi-explicit classes of model-based algorithms for direct integration in structural dynamics [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2016, 107(1):49.
- [2] 彭天波, 谢馨, 曾忠, 等. 采用Chang方法的混合试验的稳定性和精度[J]. *同济大学学报(自然科学版)*, 2014, 42(12): 1790.  
PENG Tianbo, XIE Xin, ZENG Zhong, *et al.* Stability and accuracy of sharking table-actuator hybrid test with Chang method [J]. *Journal of Tongji University (Natural Science)*, 2014, 42(12): 1790.
- [3] KOLAY C, RICLES J M. Force-based frame element implementation for real-time hybrid simulation using explicit direct integration algorithms [J]. *Journal of Structural Engineering*, 2018, 144(2): 04017191.
- [4] 傅博, 蒋欢军. 具有高稳定性的剪切型子结构振动台试验[J]. *同济大学学报(自然科学版)*, 2017, 45(11): 1602.  
FU Bo, JIANG Huanjun. Shear-type substructure sharking table testing method with high stability [J]. *Journal of Tongji University (Natural Science)*, 2017, 45(11): 1602.
- [5] FENG D C, KOLAY C, RICLES J M, *et al.* Collapse simulation of reinforced concrete frame structures [J]. *The Structural Design of Tall and Special Buildings*, 2016, 25(12): 578.
- [6] CHANG S Y. Explicit pseudodynamic algorithm with unconditional stability [J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 2002, 128(9): 935.
- [7] CHEN C, RICLES J M. Development of direct integration algorithms for structural dynamics using discrete control theory [J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 2008, 134(8): 676.
- [8] GUI Y, WANG J T, JIN F, *et al.* Development of a family of explicit algorithms for structural dynamics with unconditional stability [J]. *Nonlinear Dynamics*, 2014, 77(4): 1157.
- [9] FU B, FENG D C, JIANG H. A new family of explicit model-based integration algorithms for structural dynamic analysis [J]. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 19(6): 1950053.
- [10] NEWMARK N M. A method of computation for structural dynamics [J]. *Journal of the Engineering Mechanics* 1959, 85(3): 67—94.
- [11] HILBER H M. *Analysis and design of numerical integration methods in structural dynamics* [R]. Berkeley: Earthquake Engineering Research Center, 1976.
- [12] CHOPRA A K. *Dynamics of structures: theory and applications to earthquake engineering* [M]. 4th ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2011.
- [13] The MathWorks Inc. Matlab R2014b [EB/OL]. [2021-08-29] <http://www.mathworks.com>.
- [14] 傅博, 蒋欢军. 使用基于模型的积分算法的钢框架非线性时程分析[J]. *土木工程学报*, 2018, 51(S1): 63.  
FU Bo, JIANG Huanjun. Nonlinear time history analysis of steel frame using model-based integration algorithm [J]. *China Civil Engineering Journal*, 2018, 51(S1): 63.