

# 颗粒材料双轴压缩试验的光弹测试

郑 虎<sup>1,2</sup>, 牛文清<sup>1</sup>, 毛无卫<sup>1,2</sup>, 黄 雨<sup>1,2</sup>

(1. 同济大学 土木工程学院, 上海 200092; 2. 同济大学 岩土及地下工程教育部重点实验室, 上海 200092)

**摘要:** 通过自主设计的柔性边界试验装置对由两种不同粒径组成的光弹颗粒混合系统进行了应变控制式的双轴压缩试验。结合试验数据, 利用Hough变换等数字图像处理方法对每个颗粒进行定位, 并通过粒子跟踪测速(particle tracking velocimetry, PTV)技术对各颗粒进行编号, 实现了对每个颗粒在时间和空间上的连续定位。通过分析颗粒非仿射(non-affine)位移场发现, 在应变为 25% 时, 颗粒材料中心位置处颗粒的相对位移非常小(小于 3 mm), 试样主要通过固定端和压缩端附近以及试样中部靠近边界处的颗粒移动实现变形, 而在固定端和压缩端主要以沿压缩方向的位移为主, 试样中部靠近变形处的颗粒主要以垂直于压缩方向的位移为主。颗粒材料的光弹效应同时也清晰揭示了颗粒在压缩过程中局部颗粒几乎没有受力的现象。而颗粒中心处的力链也呈现出相对各向同性的性质, 密度也相对较小, 正是剪切带所穿越的地方。

**关键词:** 颗粒材料; 剪切带; 光弹测试技术; 双折射

中图分类号: TU443

文献标志码: A

## Biaxial Compression Experimental of Granular Media Based on Photo-Elastic Technique

ZHENG Hu<sup>1,2</sup>, NIU Wenqing<sup>1</sup>, MAO Wuwei<sup>1,2</sup>, HUANG Yu<sup>1,2</sup>

(1. College of Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. Key Laboratory of Geotechnical and Underground Engineering of the Ministry of Education, Tongji University, Shanghai 200092, China)

**Abstract:** The strain-controlled biaxial compression experiments in bi-disperse granular system are conducted by using a homemade photo-elastic apparatus, which can provide soft boundary pressure to the granular sample. The Hough transform is used to locate each particle position based on the experimental images. The particle tracking velocimetry (PTV) is applied to track the particle

in the time scale. Hence, each particle is marked in both time and space scales. The affine motion of each particle is taken out based on the shear strain and space position of corresponding particle. The non-affine displacement field shows that the main displacements happen close to the compression sides and very small displacement in the center of the sample. Meanwhile, the photo-elastic responds of the granular systems also reveal the cage effect clearly, and some of the particles do not have any force even the sample has been compressed a lot. The anisotropy of the force chain network can be seen at the center of the sample with relatively low packing fraction, which is just the place where the shear band passes through.

**Key words:** granular material; shear band; photo-elastic; birefringence

颗粒材料是由大量离散的固体颗粒所组成的宏观体系, 也是自然界中存在最为广泛的物质之一(如砂土、砾石等), 约有 75% 的原材料属于颗粒物质, 其宏观力学行为主要是由颗粒的形状、材质、大小、排布等因素决定<sup>[1-2]</sup>。颗粒材料的离散性决定了其力学行为的复杂性, 许多自然灾害现象和地质灾害的本质即为岩土颗粒材料变形破坏<sup>[3-5]</sup>。岩土颗粒材料的变形破坏是通过细观力链和应变局部化演化耦合作用后的宏观表现, 因此, 深入研究颗粒体系应变局部化演化特征<sup>[6]</sup>, 揭示颗粒物质失稳的物理机制, 对预防此类地质灾害的发生有着重要的意义。

颗粒物质的非仿射位移是表征颗粒材料发生剪切变形时颗粒尺度上各颗粒间相对位移的有效参量, 非仿射位移场可以通过从连续位移场中减去单颗粒位移而得到<sup>[7-8]</sup>。非仿射位移与局部区域内变形相关<sup>[9]</sup>, 被认为是导致局部不可逆塑性或剪切带产

收稿日期: 2022-04-26

基金项目: 国家自然科学基金(42277156, 42002273); 中央高校基本科研业务费专项资金

第一作者: 郑 虎(1986—), 男, 教授, 博士生导师, 工学博士, 主要研究方向为地质灾害防治, 岩土颗粒物质力学等。

E-mail: zhenghu@tongji.edu.cn



论文  
拓展  
介绍

生的原因<sup>[10-11]</sup>。当外部荷载过大会导致非仿射位移累积成宏观尺度上的剪切带,剪切带演化的本质是细观尺度上的力链断裂与重建和颗粒尺度上颗粒空间位置发生非仿射位移后重新排布<sup>[12-13]</sup>。通过分析非仿射位移场来研究剪切带的演化特征,将有助于揭示岩土颗粒材料变形失稳的内在机制。

光弹试验对揭示颗粒系统内部细观尺度力链结构分布特征有着极大的优势<sup>[14-17]</sup>,可以获得剪切带产生过程中颗粒尺度上空间位置的分布、转动,细观尺度上的力链网络等数字图像信息<sup>[18-21]</sup>,对从细观尺度上揭示岩土体失稳过程中剪切带演化特征的研究有着重要的应用前景。Wang等<sup>[22]</sup>通过光弹试验研究了颗粒系统剪切膨胀过程中形成阻塞状态的结构特征。Zheng等<sup>[23]</sup>基于光弹测试技术研究了颗粒材料中产生剪切带时的细观尺度力链演化特征,发现颗粒系统局部密度变化和颗粒旋转与剪切带有很强的相关性。因此,基于光弹试验从细观尺度上识别力链演化特征对于理解颗粒材料的破坏力学行为起到了关键作用。

本文将基于光弹测试原理对二维光弹颗粒系统进行双轴压缩试验,结合粒子跟踪测速(PTV)技术对试样中各个颗粒在时间和空间上进行连续追踪,得到颗粒位移的位移场。通过分析颗粒体系细观力链演化规律和宏观位移场之间的关系,揭示颗粒材料压缩变形过程中细观尺度上非均质力链网络演化机制。

## 1 试验技术与试验装置

基于光弹测试技术进行颗粒材料相关力学性质的研究已在物理学软物质领域里应用比较成熟。光弹测试技术是基于偏振光穿透暂时(人工)光学各向异性体时发生双折射现象后所产生的相位差来计算光弹材料所受到力的大小,所谓的相位差表现出来的现象即为在颗粒材料表面出现由于频率相同的光波发生干涉后的明暗条纹<sup>[24-25]</sup>,结合光学应力定理<sup>[19]</sup>便可以定量地算出颗粒所有的应力张量。因此,可以通过提供相对均匀并稳定的偏振光场,再根据具体的试验需要设计出相应的试验方案。除此之外,还可以根据具体的研究情况研制出不同形状、不同强度的试验材料,同时颗粒与颗粒间的摩擦力也可以定量地标定。三轴试验是研究岩土体力学性质的经典且常规的试验方法。但目前采用光弹测试方法定量地分析三维的光弹试验数据还不是很成熟,已

有的试验方法基本都是通过将试验简化到二维平面内进行研究分析<sup>[26]</sup>。

图1是通过结合三轴压缩试验方法设计的一个二维双轴压缩光弹试验装置示意图。光源提供稳定均匀的自然白光,由放置在光源上方的圆形偏振片将自然光转变成均匀且垂直于偏振片的圆偏振光,当圆偏振光穿过受力状态的光弹颗粒后,颗粒材料内部所有处于受力状态的颗粒均会产生双折射现象从而连接成网络结构,即为力链。进一步通过控制数码相机前端的另一个对应的圆偏振片实现同时捕捉光弹颗粒在自然光照和偏振光场中的图片信息。试样的两侧以两根细绳为边界,通过控制细绳的张力来控制试样的边界压力,并以分布式马达来实现对颗粒试样的压缩剪切。采用拟静态的加载方案,每压缩一步, $\Delta S=1\text{ mm}$ ,对应的轴向应变约为0.25%。通过对偏振光场的控制,并在每两个压缩步之间通过数码相机对试样进行数据采集。

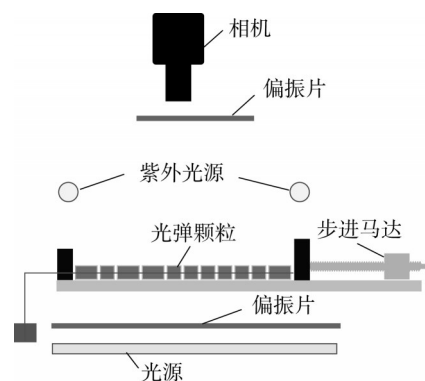


图 1 二维双轴压缩光弹试验装置示意图

Fig. 1 Biaxial setup based on photoelastic technique

图2中矩形区域为本次试验所用的光弹颗粒材料。光弹颗粒材料质地为环氧树脂,单个颗粒材料的弹性模量为4.8 MPa,泊松比为0.4~0.5,应变光学系数 $C \approx 0.002\text{ MPa}^{-1}$ ,组成试样的大小为200 mm×395 mm。为了保证试样更具有代表性,试验过程中采用两种不同大小的颗粒制样,以避免试样中出现晶状堆积的现象。两种颗粒的直径分别为8.6、7.4 mm,厚度为6.4 mm,且以1:3的比例制样。

基于Hough变换等数字图像处理手段,自主编制图像处理程序对所采集的数字图像进行分析,实现颗粒边界和位置的智能识别,识别的准确率可以达到100%,并通过数字图像粒子追踪技术在时间域

内对单个颗粒进行追踪和编号定位。结合各颗粒的位置和其光弹效应, 基于平均灰度值梯度法<sup>[19]</sup>计算各颗粒的受力信息, 并重构颗粒系统细观尺度上的力链网络。

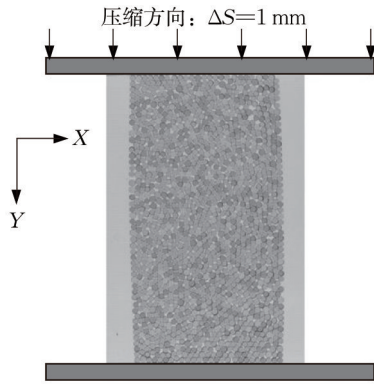


图 2 颗粒样品的俯视图

Fig. 2 Top view of granular samples

## 2 试验结果及分析

### 2.1 基于 Hough 变换的粒子位置追踪

颗粒位置追踪是基于相邻两个压缩步颗粒的位置变化特征来确定的, 例如, 在第  $n$  压缩步时某颗粒  $A$  的坐标为  $(x_{A(n)}, y_{A(n)})$ , 那么在第  $n+1$  压缩步中寻

找距离  $A$  最近的颗粒, 即

$$\min \{ \sqrt{(X_{i(n+1)} - x_{A(n)})^2 + (Y_{i(n+1)} - y_{A(n)})^2} \} \quad (1)$$

式中:  $X_{i(n+1)}$  和  $Y_{i(n+1)}$  分别为所有颗粒在第  $n+1$  压缩步时的横坐标与纵坐标。依此类推处理每一压缩步。这样便可对每个颗粒进行编号, 在时间上进行颗粒追踪 (particle tracking velocimetry, PTV), 确保每个压缩步时同一个颗粒拥有唯一一个编号, 从而实现对试样中各个颗粒在时间上和空间上的连续追踪。

图 3 为试样在应变  $\gamma = 25\%$  时各颗粒的位移场。其中图 3a 为各颗粒实际位移的位移场, 可以看出在试样底部颗粒几乎没有发生位移, 位移的大小沿着压缩的方向逐渐减小。而颗粒沿着压缩方向的位移大小主要由颗粒离压缩端的位置决定, 其位移场如图 3b 所示。虽然试验过程中只是对试样施加了沿轴向的压缩, 但颗粒在被挤压的过程中会发生与压缩方向垂直的剪胀, 如图 3c 所示, 在靠近压缩端和底部固定端位置的颗粒并没有发生 (或者只是发生了相对很小) 沿着垂直于压缩方向的位移。颗粒自试样中部开始向两侧发生剪胀, 越靠近边界位置的颗粒位移越大。由图 3c 的构型可以看出, 该构型与传统的土体以液压为围压的三轴试验压缩后的截面极为相似, 从而也验证了该二维柔性边界试验的可靠性。

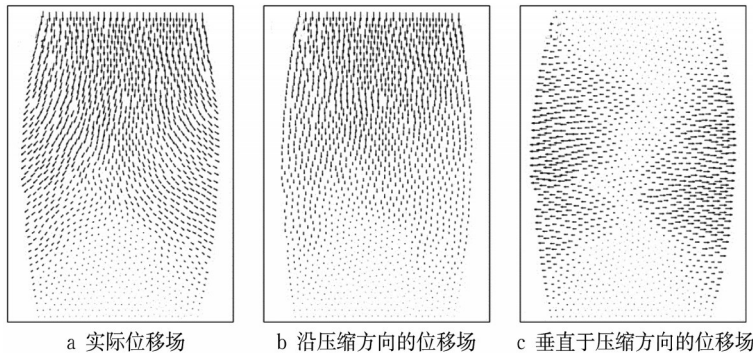


图 3 试样在  $\gamma = 25\%$  时的位移场

Fig. 3 Displacement field of granular sample at  $\gamma = 25\%$

鉴于颗粒材料在固定端附近沿着压缩方向位移的差异性, 从一个方向对试样进行压缩, 分析细/微观尺度上颗粒的位移特性, 往往只能直接得到以压缩端为主的位移场。因此, 需要对颗粒位移进行重新归一化处理, 进而分析试样在压缩后颗粒变形的本质。

### 2.2 颗粒位移场归一化处理

通过对颗粒材料试样的一端以应变控制进行压缩剪切, 对试样沿着压缩方向的位移场进行归一化处理, 其中第  $i$  个颗粒在压缩第  $n$  步时的位移可由下式进行计算:

$$Y_i = \frac{1}{2} \left[ (y_{in} - y_{i0}) - \frac{\partial n(y_{in} - y_{i0})}{(y_c - y_0)} \right] \quad (2)$$



式中:  $y_{i0}$  和  $y_{in}$  分别为试样中第  $i$  个颗粒在压缩端初始位置以及在压缩了第  $n$  步后的位置;  $\delta$  和  $n$  分别为每压缩剪切步的压缩量以及压缩步数;  $y_e$  和  $y_0$  分别为试验开始时试样的固定端以及压缩端的位置。

试样归一化处理后的位移场如图 4a 所示, 可以看出, 试样中心位置的颗粒并没有发生相对位移, 在试样的固定端和压缩端分别形成了似锥形的压缩块体向试样内部延伸。而在试样的中部颗粒主要是以沿着与压缩方向垂直的位移为主。通过图 4b 可以更清楚地看到类似锥形的压缩块体, 而在试样中部沿压缩方向的颗粒位移几乎为零。

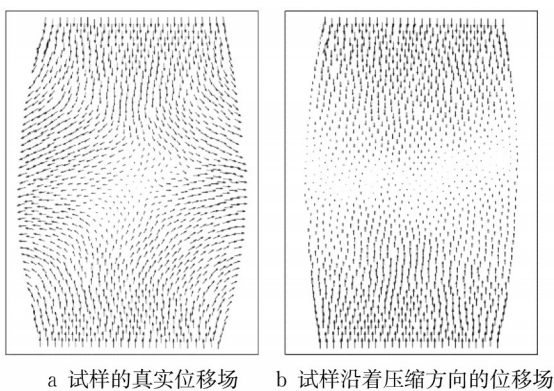


图 4 试样在  $\gamma = 25\%$  时归一化后的位移场

Fig. 4 Normalized displacement field of sample at  $\gamma = 25\%$

颗粒材料位移的概率密度分布 (probability density function, PDF) 如图 5 所示, 可以看出颗粒在沿压缩方向的位移分布基本均匀, 最大位移量分别为在固定端和压缩端附近。而颗粒在垂直于压缩方向的位移主要集中在零附近, 最大位移量与压缩方向相比较小, 最大位移的颗粒数目也较少。

试样中颗粒总位移量的 PDF 如图 6 所示, 颗粒的绝对位移大部分超过 10 mm, 只有很少一部分颗粒发生了小于 3 mm 的位移, 结合图 4 可以看出, 这部分颗粒主要集中在试样的中心位置。

### 2.3 试样内部力链网络分布

基于光弹测试技术进行颗粒材料力学特性相关试验研究的最大优势是可以直观地观测到试样在压缩变形后内部应力的网络结构。力链的明暗程度代表着颗粒间接触力的强弱, 当压缩量较小时颗粒材料内部会出现明显的应力诱导各向异性的力链网络结构<sup>[19]</sup>。

图 7 为试样在  $\gamma = 25\%$  时的力链网络结构照

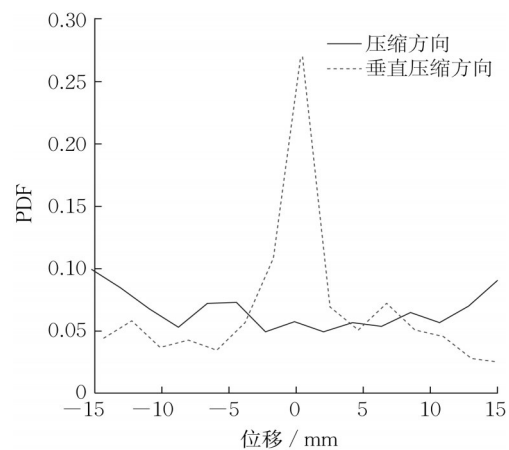


图 5 试样中颗粒位移沿着压缩方向和垂直于压缩方向的概率分布

Fig. 5 PDF of granular displacement along compression direction and perpendicular to compression direction

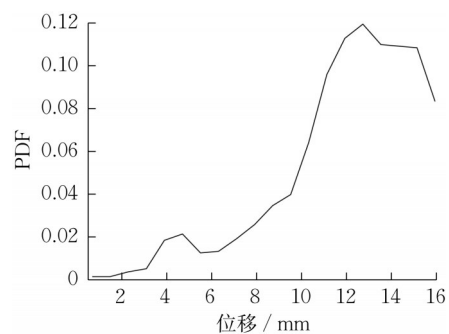
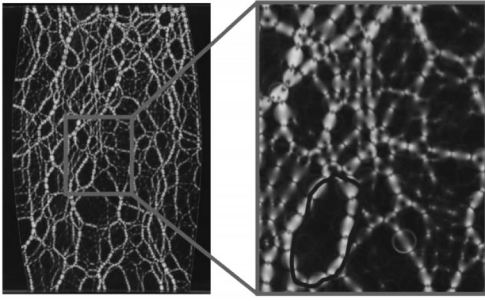


图 6 试样中颗粒总位移量的概率分布

Fig. 6 PDF of granular total displacement

片, 颗粒材料中力链容易发生弯曲<sup>[27]</sup>, 当存在侧限时会形成与压缩方向垂直的力链, 由于试样此时的压缩量相对较大, 可以看出试样的力链方向除了沿压缩方向外, 在垂直于压缩方向也可以看到力链的分布。颗粒材料受力后的特点与固体材料或者液体不同, 并不是每个颗粒都参与外部荷载的分担。从图 7 右局部放大图可以看出, 若干个颗粒形成了环形的强力链网络, 在环形力链中的颗粒几乎没有承担任何力。因此, 即使移除这些颗粒对试样的应力平衡状态或颗粒试样内部力链网络结构影响也较小。试样的光弹效应照片除了能够定性描述颗粒力链传递特征之外, 还可以通过颗粒内部灰度值梯度平方的平均值  $\langle G^2 \rangle$ , 定性计算各个颗粒的压力大小, 照片中每个像素点位置的灰度梯度平方  $\nabla I_{ij}^2$  可以通过下式计算:

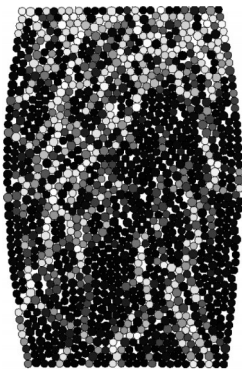
图 7 试样在  $\gamma = 25\%$  时的力链网络结构Fig. 7 Force chain network at  $\gamma = 25\%$ 

$$\nabla I_{i,j}^2 = \frac{1}{4} \left[ \left( \frac{I_{i+1,j} - I_{i-1,j}}{2} \right)^2 + \left( \frac{I_{i,j+1} - I_{i,j-1}}{2} \right)^2 + \left( \frac{I_{i+1,j+1} - I_{i-1,j-1}}{2\sqrt{2}} \right)^2 + \left( \frac{I_{i-1,j+1} - I_{i+1,j-1}}{2\sqrt{2}} \right)^2 \right] \quad (3)$$

式中:  $I_{i+1,j}$ 、 $I_{i-1,j}$ 、 $I_{i,j+1}$ 、 $I_{i,j-1}$ 、 $I_{i+1,j+1}$ 、 $I_{i-1,j-1}$ 、 $I_{i-1,j+1}$  和  $I_{i+1,j-1}$  分别为待计算像素点相邻像素点的灰度值。而每个颗粒的平均灰度值平方可以由式(4)计算。

$$\langle G^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i,j} \nabla I_{i,j}^2 \quad (4)$$

图 8 为计算所得试样中各颗粒的  $\langle G^2 \rangle$  分布图, 图中圆盘代表颗粒的位置, 其中白色的圆盘表示颗粒所受压力最大, 黑色表示颗粒所受压力相对较小。黑色圆盘和白色圆盘的分布特征直接反映了颗粒材料该状态下的内部受力分布, 力链网络的分布沿着纵向相对于水平方向较强。值得注意的是, 材料的中心位置颗粒所受的压力并不是很大, 但是可以清楚地看到该部分的颗粒分布相对均匀, 颗粒的局部密度相对较小, 此处的颗粒相对位移比较大。

图 8 试样在  $\gamma = 25\%$  时  $\langle G^2 \rangle$  的分布Fig. 8  $\langle G^2 \rangle$  distribution of granular system at  $\gamma = 25\%$ 

### 3 结论

通过自主设计的柔性边界试验装置对由两种不同粒径组成的光弹颗粒混合系统进行了应变控制式的双轴压缩试验。结合试验数据, 利用 Hough 变换等数字图像处理手段对每个颗粒进行定位, 并通过 PTV 技术对各颗粒进行编号, 实现了对每个颗粒在时间和空间上的连续定位。通过分析颗粒归一化位移场发现, 在应变为 25% 时颗粒材料中心位置颗粒的相对位移非常小(小于 3 mm), 试样主要通过固定端和压缩端附近以及试样中部靠近边界处的颗粒移动实现变形, 而在固定端和压缩端主要以沿压缩方向的位移为主, 试样中部靠近变形处的颗粒主要以垂直与压缩方向的位移为主。颗粒中心处的力链也呈现出相对各向同性的性质, 密度也相对较小, 正是剪切带所穿越的地方。颗粒材料的光弹效应清晰地揭示了颗粒在压缩过程中局部颗粒几乎没有受力的现象。

#### 作者贡献声明:

郑 虎: 论文的选题、指导、修改。

牛文清: 具体工作的开展和论文撰写。

毛无卫: 论文的指导、修改。

黄 雨: 论文的指导、修改。

#### 参考文献:

- [1] 孙其诚, 刘晓星, 张国华, 等. 密集颗粒物质的介观结构 [J]. 力学进展, 2017, 47: 263.  
SUN Qicheng, LIU Xiaoxing, ZHANG Guohua, *et al.* The mesoscopic structures of dense granular materials [J]. *Advances in Mechanics*, 2017, 47: 263.
- [2] JAEGER H M, NAGEL S R, BEHRINGER R P. Granular solids, liquids, and gases [J]. *Reviews of Modern Physics*, 1996, 68(4): 1259.
- [3] WANG D, ZHENG H, JI Y, *et al.* Shear of granular materials composed of ellipses [J]. *Granular Matter*, 2020, 22(1): 5.
- [4] WU F Q, WU J, BAO H, *et al.* Advances in statistical mechanics of rock masses and its engineering applications [J]. *Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering*, 2021, 13(1): 22.
- [5] 伍法权, 王思敬, 潘别桐. 统计岩体力学(SMRM)——岩体工程地质力学的传承与发展 [J]. *工程地质学报*, 2022, 30(1): 1.  
WU Faquan, WANG Sijing, PAN Bietong. Statistical mechanics of rock masses (SMRM)—inheriting and developing of engineering geomechanics of rock masses [J]. *Journal of Engineering Geology*, 2022, 30(1): 1.

- [6] 薛大为, 吕玺琳, 任中俊, 等. 多孔岩体蠕变诱发延迟压实局部化失稳特性 [J]. 同济大学学报(自然科学版), 2021, 49(11): 1539.  
XUE Dawei, LÜ Xilin, REN Zhongjun, *et al.* Characteristics of delayed compaction localization instability of porous rocks [J]. Journal of Tongji University (Natural Science), 2021, 49(11): 1539.
- [7] CHIKKADI V, SCHALL P. Nonaffine measures of particle displacements in sheared colloidal glasses [J]. Physical Review E, 2012, 85(3): 031402.
- [8] GOLDENBERG C, TANGUY A, BARRAT J L. Particle displacements in the elastic deformation of amorphous materials: local fluctuations vs. non-affine field [J]. Epl, 2007, 80(1): 16003.
- [9] LANGER J S. Shear-transformation-zone theory of plastic deformation near the glass transition [J]. Physical Review E, 2008, 77(2): 021502.
- [10] UTTER B, BEHRINGER R P. Experimental measures of affine and nonaffine deformation in granular shear [J]. Physical Review Letters, 2008, 100(20): 208302.
- [11] SCHALL P, WEITZ D A, SPAEPEN F. Structural rearrangements that govern flow in colloidal glasses [J]. Science, 2007, 318(5858): 1895.
- [12] ZHENG H, DIJKSMAN J A, BEHRINGER R P. Shear jamming in granular experiments without basal friction [J]. Europhysics Letters, 2014, 107(3): 34005.
- [13] 郑虎, 牛文清, 毛无卫, 等. 颗粒物质力学及其在工程地质领域中的应用初探 [J]. 工程地质学报, 2021, 29(1): 12.  
ZHENG Hu, NIU Wenqing, MAO Wuwei, *et al.* Mechanics of granular material and the application in engineering geology [J]. Journal of Engineering Geology, 2021, 29(1): 12.
- [14] 杨荣伟, 程晓辉. 光弹颗粒材料的直剪实验研究 [J]. 岩土力学, 2009, 30(S1): 103.  
YANG Rongwei, CHENG Xiaohui. Direct shear experiments of photoelastic granular materials [J]. Rock and Soil Mechanics, 2009, 30(S1): 103.
- [15] LIU C H, NAGEL S R, SCHECTER D A, *et al.* Force fluctuations in bead packs [J]. Science, 1995, 269(5223): 513.
- [16] 房营光, 侯明勋, 谷任国, 等. 桩承式路堤中土拱效应产生过程可视化分析 [J]. 岩土工程学报, 2015, 37(9): 1678.  
FANG Yingguang, HOU Mingxun, GU Renguo, *et al.* Visual analysis of initiation of soil arching effect in piled embankments [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2015, 37(9): 1678.
- [17] 杨舒涵, 周伟, 马刚, 等. 粒间摩擦对岩土颗粒材料三维力学行为的影响机制 [J]. 岩土工程学报, 2020, 42(10): 1885.  
YANG Shuhan, ZHOU Wei, MA Gang, *et al.* Mechanism of inter-particle friction effect on 3D mechanical response of granular materials [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2020, 42(10): 1885.
- [18] GENG J F, BEHRINGER R R. Slow drag in two-dimensional granular media [J]. Physical Review E, 2005, 71(1): 011302.
- [19] MAJMUDAR T S, BEHRINGER R P. Contact force measurements and stress-induced anisotropy in granular materials [J]. Nature, 2005, 435(7045): 1079.
- [20] 展亚太, 王金安, 李飞, 等. 断层破碎带剪切作用下力链结构及演化光弹试验研究 [J]. 岩土力学, 2020, 41(8): 2627.  
ZHAN Yatai, WANG Jin'an, LI Fei, *et al.* Photo-elastic experimental study on force chain structure and evolution of fault fracture zone under shear [J]. Rock and Soil Mechanics, 2020, 41(8): 2627.
- [21] HOWELL D, BEHRINGER R P, VEJE C. Stress fluctuations in a 2D granular couette experiment: a continuous transition [J]. Physical Review Letters, 1999, 82(26): 5241.
- [22] WANG M M, WANG D, SOCOLAR J E S, *et al.* Jamming by shear in a dilating granular system [J]. Granular Matter, 2019, 21(4): 102.
- [23] ZHENG H, WANG D, TONG X, *et al.* Granular scale responses in the shear band region [J]. Granular Matter, 2019, 21(4): 107.
- [24] COKER E G, FILON L N G, JESSOP H T. A treatise on photo-elasticity [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1957.
- [25] MAJMUDAR T S. Contact force measurements in sheared and isotropically compressed 2D granular systems [D]. Durham: Duke University, 2006.
- [26] ZHENG H, WANG D, BEHRINGER R P. Experimental study on granular biaxial test based on photoelastic technique [J]. Engineering Geology, 2019, 260: 105208.
- [27] WANG D, REN J, DIJKSMAN J A, *et al.* Microscopic origins of shear jamming for 2D frictional grains [J]. Physical Review Letters, 2018, 120(20): 208004.