

# 具有随机波动率方差的信用等级迁移模型

梁进, 陶晓宇

(同济大学 数学科学学院, 上海 200092)

**摘要:** 考虑到信用等级迁移带来的风险, 通过债券定价方式, 基于 Heston 模型建立了具有随机波动率方差的信用等级迁移模型, 以此来评估信用风险。根据预先设定的资产阈值将公司债券分为高、低两个信用等级, 公司资产的波动率方差在不同的信用等级下有不同的波动性, 即波动率方差满足不同的 CIR (cox-ingersoll-ross) 过程。根据无套利原理等, 推导出了高、低等级下债券价值满足的偏微分方程以及耦合边界处满足的条件。利用隐格式差分方法对债券价值求取数值解, 并进行参数分析。

**关键词:** Heston 模型; 信用等级迁移风险; 随机波动率; 债券价值

中图分类号: F830

文献标志码: A

## A Credit Rating Migration Model with Stochastic Volatility Variance

LIANG Jin, TAO Xiaoyu

(School of Mathematical Sciences, Tongji University, Shanghai 200092, China)

**Abstract:** Based on the Heston model, a credit rating migration model with random volatility variance is established by means of bond pricing to evaluate credit risk. Corporation bonds are divided into high and low credit ratings based on predefined asset threshold. The volatility variance of corporate assets has different volatility at different credit ratings, i. e., the volatility variance satisfies different CIR (cox-ingersoll-ross) processes. According to the no arbitrage principle, etc., the partial differential equations is derived for bond values at high and low ratings and the conditions satisfied at the coupling boundary. Finally, the implicit scheme difference method is used to get the numerical solution of bond value.

**Key words:** Heston model; credit rating migration risk; stochastic volatility; bond value

公司债券可能由于因其在到期日资不抵债而无法按面值支付暴露的信用风险越来越为投资者所重视, 因此信用评级作为能直接反映信用风险的工具也被应用在债券定价当中。现在学术和市场上的公司债券信用风险分析方法主要分为结构化方法 (structural approach) 和约化方法 (reduced form approach) 两类。约化法始于 Jarrow 和 Turnbull 的研究, 这是一种外生的方法<sup>[1]</sup>, 它不直接考虑违约与公司价值之间的关系, 而是通过给定违约概率或者强度来确定违约过程。而结构化方法最早开始于 Merton, 这是一种内生的方法<sup>[2]</sup>, 所以也被称为基于公司价值 (asset-base) 模型。

通常认为一个公司的信用等级往往与它本身的资产负债结构密切相关, 因此在某些情况下使用内生的结构化方法来刻画公司的信用等级迁移会比约化法更加直观。在结构化方法的框架下, 许多学者对信用风险分析方法进行了推广。梁进等<sup>[3]</sup>首次利用结构化的方法对含信用等级迁移的公司债券进行了研究, 他们假设公司资产满足几何布朗运动, 有关参数都为常数, 利用无套利原理和 Feynman Kac 公式得到了偏微分方程及其定解条件, 并证明了这个问题解的存在唯一性。Hu 等<sup>[4]</sup>研究了具有信用等级迁移风险的债券定价的自由边界问题, 模型中认为信用等级边界和公司的资产负债比有关, 通过结构化方法对债券定价并且得到了自由边界问题的一些性质。Liang 等<sup>[5]</sup>首次将渐近行波解与信用评级迁

收稿日期: 2022-03-14

基金项目: 国家自然科学基金(12071349)

第一作者: 梁进(1958—), 女, 教授, 博士生导师, 理学博士, 主要研究方向为金融数学与信用风险管理。

E-mail: liang\_jin@tongji.edu.cn

通信作者: 陶晓宇(1998—), 女, 硕士生, 主要研究方向为金融数学。E-mail: 2030922@tongji.edu.cn



论文  
拓展  
介绍

移问题联系起来,采用自由边界建立了债券定价模型,并证明了解的存在唯一性、唯一性和正则性。Liang等<sup>[6]</sup>在结构法框架下,建立了含信用等级迁移的公司债券的效用无差异定价模型;Wu等<sup>[7]</sup>基于宏观机制转换,建立了一个具有信用等级迁移风险的公司债券估值模型。Wu等<sup>[8]</sup>采用自由边界模型,在结构化框架下考虑了具有信用等级迁移风险的可违约公司债券的估值。梁进等<sup>[9]</sup>基于Vasicek利率模型,对担保信用等级变换的利率互换合约进行了定价,并推导出了相应合约价值的解析解。

上述研究中,信用风险分析方法往往将波动率设为常数,但这显然是理想化的,实际市场上波动率呈现“微笑”效应,将波动率简单地设为常数往往会低估风险,比如经典的Black-Scholes(BS)<sup>[10]</sup>模型。Scott、Hull和Wiggins等对BS模型进行了推广,以允许随机波动率。Heston<sup>[11]</sup>在1993年基于BS模型和CIR(cox-ingersoll-ross)模型提出了一种随机波动率模型,模型假设公司资产服从几何布朗运动,资产波动率满足CIR<sup>[12]</sup>模型,实证表明,其隐含波动率与实际更接近,从而得到较广泛的接受。

梁进等<sup>[13]</sup>基于Heston模型,针对波动率在高、低等级下定义了不同的长期均值,通过建立随机波动率模型来评估信用等级迁移风险,然后利用一张特殊的零息票来对冲由波动率的随机性造成的风险,最后将问题转化为一个债券价值关于时间、公司资产和波动率的二阶抛物型方程,并推导出在信用等级迁移处的债券价值关于公司资产的一阶导数连续的边值条件,最后采取ADI(alternating direction implicit method)交替方向隐式法求出数值解。

本文在文献[13]的基础上,同样通过债券定价方式,使用Heston模型,即资产满足几何布朗运动,资产波动率方差满足CIR过程。基于预先设定的公司资产阈值将公司分为高、低两个等级,与文献[13]不同的是,本文模型考虑到在不同的信用等级下,资产的波动率方差也会有不同的波动性,因此在本文模型中,波动率方差的波动率 $\sigma$ 在不同的信用等级下设定为不同的常数,即低等级下 $\sigma = \sigma_1$ ,高等级下 $\sigma = \sigma_2$ ,且由于低等级下波动更剧烈,因此 $\sigma_1 > \sigma_2$ ,以此反映资产波动率方差在不同信用等级下的波动情况。于是在不同的信用等级下,公司资产和波动率满足不同的随机过程,以此建立了具有随机波动率

方差的信用等级迁移模型。

## 1 建立具有随机波动率的信用等级迁移模型

### 1.1 模型假设

假设(1) 市场是完备的,不存在套利机会,无风险利率 $r$ 。

假设(2) 作为研究工具的公司债券为一张面值为 $F$ ,到期日为 $T$ 的零息债券,且违约只发生在到期日 $T$ ,即到期日的公司资产 $S_T$ 小于 $F$ 判定为违约,若公司未违约,偿付面值 $F$ ,反之偿付 $S_T$ 。

假设(3) 记信用等级边界为 $K$ ,若在 $t(t \leq T)$ 时刻,公司资产 $S_t < K$ ,则认为公司处于低等级,反之处于高等级,公司的信用等级随着 $S_t$ 的变化而变化,且假设高、低等级下的债券价值在信用等级边界 $K$ 处连续。为了满足高等级下债券一定不违约的假设,设定 $K \geq F$ 。

假设(4) 公司资产 $S_t$ 和波动率方差 $v_t$ 满足Heston模型,即

$$\begin{cases} dS_t = rS_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_t^S \\ dv_t = k(\theta - v_t) dt + \\ \quad (\sigma_1 I_{\{S_t < K\}} + \sigma_2 I_{\{S_t \geq K\}}) \sqrt{v_t} dW_t^V \\ dW_t^S dW_t^V = \rho dt \end{cases} \quad (1)$$

式中: $W_t^S$ 、 $W_t^V$ 为两个不同的由完备带流概率空间生成的标准布朗运动,且他们的相关系数为 $\rho$ ;  $I_A$ 是事件 $A$ 的示性函数; $k$ 为均值回归系数; $\theta$ 为长期均值。

记 $U = U(S_t, v_t, t)$ 、 $V = V(S_t, v_t, t)$ ,分别代表低、高等级下的债券价值。低等级下资产波动率方差的波动率为 $\sigma_1$ ,高等级下资产波动率方差的波动率为 $\sigma_2$ ,由于低等级下的波动往往要比高等级下的波动剧烈,设定 $\sigma_2 < \sigma_1$ 。波动率是非负的,根据Feller条件,参数需满足 $2k\theta \geq \sigma_i^2$ <sup>[12]</sup> ( $i = 1, 2$ )。

假设(5) 在到期日,由于低等级债券可能违约,高等级债券一定不会违约,因此,低等级下的债券价值 $U(S_T, v_T, T) = \min\{S_T, F\}$ ,高等级下的债券价值 $V(S_T, v_T, T) = F$ 。

假设(6) 以上假设中的 $F$ 、 $K$ 、 $\sigma_i$ 、 $\rho$ 、 $r$ 、 $T$ 、 $k$ 、 $\theta$ 均为正常数。

### 1.2 偏微分方程以及边值条件

债券价值  $U$  和  $V$  是关于随机变量  $S_t$  和  $v_t$  的函数,因此  $U$  和  $V$  都实际蕴含两个不同的随机波动项。由假设(1)根据无风险套利,本文运用两种风险资产来对债券的风险进行对冲,其中一种为公司本身的权益资产  $S_t$ ,下面借鉴文献[13]引入另外一种特殊的资产  $P$  并构建无风险的投资组合,推导得到  $U$  和  $V$  满足的偏微分方程以及他们满足的边值条件。

#### 1.2.1 引入对冲工具

本文选取一张特殊的利率与资产波动率方差  $v_t$  变化相一致的零息票作为对冲工具<sup>[13]</sup>。记零息票  $P_i = P_i(\hat{r}_{it}, t; T')$  ( $i = 1, 2$ ) 为不同信用等级下的零息票价值,  $P_1$  代表低等级,低等级下  $t$  时刻的利率为  $\hat{r}_{1t}$ ,利率的波动率为  $\sigma_1$ ;  $P_2$  代表高等级,高等级下  $t$  时刻的利率为  $\hat{r}_{2t}$ ,利率的波动率为  $\sigma_2$ ,  $T'$  为到期日,面值为 1。为了保证在每个时刻都能够充分对冲掉公司债券的风险,本文假设  $T' > T$ 。由于零息票的利率与资产波动率方差变化相一致,于是

$$d\hat{r}_{it} = k(\theta - \hat{r}_{it})dt + \sigma_i \sqrt{\hat{r}_{it}} dW_i^V, \quad i = 1, 2 \quad (2)$$

这里的  $k, \theta, W_i^V, \sigma_i$  同假设(4),于是  $P_i = P_i(v_t, t; \sigma_i, T')$ ,再由于  $P_i$  是一张零息票,因此它在  $t$  时刻的价值等于到期日面值按利率的折现,即

$$P_i(v, t; \sigma_i, T') = E(e^{-\int_t^{T'} v_t dt} | v_t = v) \quad (3)$$

由方程(2)和(3)以及 Feynman-Kac 公式<sup>[14]</sup>,可以推导出在鞅测度下,  $P_i$  满足的 Cauchy 问题,并得到  $P_i$  的解析式为

$$P_i(v, t; \sigma_i, T') = A_i(t; \sigma_i) e^{-vB_i(t; \sigma_i)} \quad (4)$$

式中:  $A_i(t; \sigma_i), B_i(t; \sigma_i)$  满足

$$A_i(t; \sigma_i) = \left[ \frac{2\omega_i e^{\frac{(\omega_i + k)(T' - t)}{2}}}{(\omega_i + k)e^{\omega_i(T' - t)} + (\omega_i - k)} \right]^{\frac{2k\rho}{\sigma_i^2}}$$

$$B_i(t; \sigma_i) = \frac{2(e^{\omega_i(T' - t)} - 1)}{(\omega_i + k)e^{\omega_i(T' - t)} + (\omega_i - k)}$$

$$\omega_i = \sqrt{k^2 + 2\sigma_i^2}$$

#### 1.2.2 偏微分方程的推导

利用 1.2.1 中引入的特殊的对冲工具  $P_i$  以及公司本身的权益资产  $S_t$  来对冲掉债券的风险,通过做一份公司债券的同时做空  $\Delta_i^S$  份的  $S_t$  以及  $\Delta_i^P$  份的  $P_i$  来构造高、低等级下的无风险投资组合。根据  $P_i$

的解析式、无风险套利原理和多元 Ito 公式可以得到份额的表达式以及  $U$  和  $V$  满足的偏微分方程,份额表达式如下:

$$\begin{cases} \Delta_1^S = \frac{\partial U}{\partial S} \\ \Delta_1^P = \frac{\partial U}{\partial v} / \frac{\partial P_1}{\partial v} \end{cases}, \quad \begin{cases} \Delta_2^S = \frac{\partial V}{\partial S} \\ \Delta_2^P = \frac{\partial V}{\partial v} / \frac{\partial P_2}{\partial v} \end{cases} \quad (5)$$

结合假设(3)和假设(5)以及偏微分方程,  $U(S, v, t)$  和  $V(S, v, t)$  是以下边界耦合线性偏微分方程组的解:

$$\begin{cases} L_1 U = 0, S < K, v > 0, 0 < t < T \\ L_2 V = 0, S \geq K, v > 0, 0 < t < T \\ U|_{S=K} = V|_{S=K} \\ U|_{t=T} = \min\{F, S\} \\ V|_{t=T} = F \end{cases} \quad (6)$$

式中:  $L_i = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} v S^2 \frac{\partial^2}{\partial S^2} + \frac{1}{2} v \sigma_i^2 \frac{\partial^2}{\partial v^2} + \sigma_i \rho S v \cdot \frac{\partial^2}{\partial v \partial S} + r S \frac{\partial}{\partial S} + [k(\theta - v) + \lambda_i(v, t)] \frac{\partial}{\partial v} - r$ ;

$\lambda_i(v, t) = (v - r) \frac{(\omega_i + k)e^{\omega_i(T' - t)} + (\omega_i - k)}{2(e^{\omega_i(T' - t)} - 1)}$ ;  $\rho$  为

相关系数,  $\omega_i$  见式(4)(具体推导见文献[13],在此从略)。

事实上,在利用  $\Delta$ -对冲推导偏微分方程的时候,对迁移边界可以做相似的处理,可以推导出在迁移边界处的边值条件,这个条件方程是一个关于高、低等级债券价值对波动率的一阶偏导和时间的函数,结合这个特殊的方程和公式(6)才构成了本文完整的具有随机波动率方差的信用等级迁移模型。

#### 1.2.3 信用等级迁移边界上条件的推导

本文与文献[13]同样是基于 Heston 模型,但后者的信用等级迁移体现在长期均值上,本文的信用等级迁移则是体现在波动率方差的波动率上,因此过信用等级迁移边界条件不同。根据市场无套利,高、低等级下的无风险投资组合价值在  $S = K$  处连续,即

$$U - \Delta_1^S S - \Delta_1^P P_1|_{S=K^-} = V - \Delta_2^S S - \Delta_2^P P_2|_{S=K^+} \quad (7)$$

由于高、低等级债券价值在迁移边界处连续  $U|_{S=K} = V|_{S=K}$ ,根据前面推导出的  $\Delta_i^S, \Delta_i^P$  的表达式,代入式(7)可以得到

$$\Delta_1^S S + \Delta_1^P P_1|_{S=K^-} = \Delta_2^S S + \Delta_2^P P_2|_{S=K^+}$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial S} - \frac{\partial V}{\partial S}\right)K|_{s=k} = \left(\frac{P_2}{\frac{\partial P_2}{\partial v}} \frac{\partial V}{\partial v} - \frac{P_1}{\frac{\partial P_1}{\partial v}} \frac{\partial U}{\partial v}\right)|_{s=k} \quad (8)$$

由  $P_i$  的表达式(4),可以得到  $P_i$  关于  $v$  的导数为

$$\frac{\partial P_i}{\partial v} = -A_i(t; \sigma_i)B_i(t; \sigma_i)e^{-vB_i(t; \sigma_i)} = -B_i(t; \sigma_i)P_i \quad (9)$$

结合  $B_i(t; \sigma_i)$  的表达式,得到

$$\frac{P_i}{\frac{\partial P_i}{\partial v}} = -\frac{1}{B_i(t; \sigma_i)} = -\frac{(\omega_i + k)e^{\omega_i(T'-t)} + (\omega_i - k)}{2(e^{\omega_i(T'-t)} - 1)} \quad (10)$$

将式(10)代入式(8),得到迁移边界处的边值条件为

$$\left(\frac{\partial U}{\partial S} - \frac{\partial V}{\partial S}\right)|_{s=k} = \frac{1}{K} \left( \frac{\partial U}{\partial v} \cdot \frac{(\omega_1 + k)e^{\omega_1(T'-t)} + (\omega_1 - k)}{2(e^{\omega_1(T'-t)} - 1)} - \frac{\partial V}{\partial v} \frac{(\omega_2 + k)e^{\omega_2(T'-t)} + (\omega_2 - k)}{2(e^{\omega_2(T'-t)} - 1)} \right)|_{s=k} \quad (11)$$

结合式(11)和方程组(6),就构成了完整的二阶抛物型偏微分方程的定解问题,于是得到了具有随机波动率方差的信用等级迁移模型,即

$$\begin{cases} L_1 U = 0, S < K, v > 0, 0 < t < T \\ L_2 V = 0, S \geq K, v > 0, 0 < t < T \\ \left(\frac{\partial U}{\partial S} - \frac{\partial V}{\partial S}\right)|_{s=k} = f(v, t) \\ U|_{s=k} = V|_{s=k} \\ U|_{t=T} = \min\{F, S\} \\ V|_{t=T} = F \end{cases} \quad (12)$$

其中

$$f(v, t) = \frac{1}{K} \left( \frac{\partial U}{\partial v} \frac{(\omega_1 + k)e^{\omega_1(T'-t)} + (\omega_1 - k)}{2(e^{\omega_1(T'-t)} - 1)} - \frac{\partial V}{\partial v} \frac{(\omega_2 + k)e^{\omega_2(T'-t)} + (\omega_2 - k)}{2(e^{\omega_2(T'-t)} - 1)} \right)|_{s=k}$$

## 2 数值结果及参数分析

### 2.1 蜕化边界的处理

Fichera 条件<sup>[15]</sup>是对具有非负特征的方程在边界上是否应该配置边界条件给定的判定法则。可以看

出,  $v=0$  为定解问题(12)的蜕化边界,根据 Fichera 函数的定义,在边界  $v=0$  上,方程的 Fichera 函数为

$$B(x) = B(t, S, 0) = k\theta + \lambda_i(0, t) - \frac{1}{2}\sigma_i^2 \quad (13)$$

由前面的  $\lambda_i(v, t)$  表达式,  $\lambda_i(0, t) = -r \frac{(\omega_i + k)e^{\omega_i(T'-t)} + (\omega_i - k)}{2(e^{\omega_i(T'-t)} - 1)}$ , 可以证明  $\lambda_i(0, t)$  是关于  $t$  的单调递减的函数,于是  $B(t, S, 0)$  在  $t=T$  处取最小值。当

$$k\theta - \frac{1}{2}\sigma_i^2 - r \left( \frac{\omega_i + k}{2} + \frac{\omega_i}{e^{(T'-t)} - 1} \right) \geq 0 \quad (14)$$

$B(t, S, 0)$  是恒非负的,于是在条件(14)下,不需要在  $v=0$  上额外添加边界条件。

### 2.2 隐差分格式的推导

对于一般的抛物型偏微分方程数值解法如显示格式和隐式格式,前者计算较为简单,却无法保证解是稳定的,而后者可以保证微分方程的解绝对稳定,且不依赖于步长的选取,还有诸如交替方向隐格式(ADI法)、Crank-Nicolson 格式<sup>[16]</sup>等推广方法也是无条件稳定的。本文采取隐差分格式来对问题求取数值解。

#### 2.2.1 偏微分方程的差分化

原问题(12)的变量取值区间为  $\Omega = \{0 < S < \infty, 0 < v < \infty, 0 < t < T\}$ , 为了方便求解,取截断边界  $S_\infty = v_\infty = 4K$ , 对网格进行剖分,并记

$$\Delta S = \frac{K}{M}, S_i = i\Delta S (0 \leq i \leq 4M)$$

$$\Delta v = \frac{K}{N}, v_j = j\Delta v (0 \leq j \leq 4N)$$

$$\Delta t = \frac{T}{D}, t_l = l\Delta t (0 \leq l \leq D)$$

$$\varphi_{i,j}^l = \varphi(S_i, v_j, t_l) =$$

$$\begin{cases} U(S_i, v_j, t_l) & 0 \leq i < M, 0 \leq j \leq 4N, 0 \leq l \leq D \\ V(S_i, v_j, t_l) & M \leq i \leq 4M, 0 \leq j \leq 4N, 0 \leq l \leq D \end{cases}$$

$$\sigma = \begin{cases} \sigma_1, 0 \leq i < M \\ \sigma_2, M \leq i \leq 4M \end{cases}$$

$$\lambda(v_j, t_l) = \begin{cases} \lambda_1(v_j, t_l), 0 \leq i < M \\ \lambda_2(v_j, t_l), M \leq i \leq 4M \end{cases}$$

定义如下差分算子:

$$\delta_s \varphi_{i,j}^l = \frac{\varphi_{i+1,j}^l - \varphi_{i-1,j}^l}{2\Delta S},$$

$$\begin{aligned} \delta_v \varphi_{i,j}^l &= \frac{\varphi_{i,j+1}^l - \varphi_{i,j-1}^l}{2\Delta v}, \\ \delta_S^2 \varphi_{i,j}^l &= \frac{\varphi_{i+1,j}^l - 2\varphi_{i,j}^l + \varphi_{i-1,j}^l}{(\Delta S)^2}, \\ \delta_v^2 \varphi_{i,j}^l &= \frac{\varphi_{i,j+1}^l - 2\varphi_{i,j}^l + \varphi_{i,j-1}^l}{(\Delta v)^2}, \\ \delta_{Sv} \varphi_{i,j}^l &= \frac{\varphi_{i+1,j+1}^l + \varphi_{i-1,j-1}^l - \varphi_{i-1,j+1}^l - \varphi_{i+1,j-1}^l}{4\Delta v \Delta S} \end{aligned} \quad (15)$$

对式(12)的PDE(partial differential equation)方程进行隐格式差分,得到如下差分方程:

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_{i,j}^{l+1} - \varphi_{i,j}^l}{\Delta t} + \frac{1}{2} v_j S_i^2 \delta_S^2 \varphi_{i,j}^l + \frac{1}{2} v_j \sigma^2 \delta_v^2 \varphi_{i,j}^l + \\ \sigma \rho S_i v_j \delta_{Sv} \varphi_{i,j}^l + r S_i \delta_S \varphi_{i,j}^l + \\ [k(\theta - v_j) + \lambda(v_j, t_l)] \delta_v \varphi_{i,j}^l - r \varphi_{i,j}^l = 0 \\ i \neq M, 0 < j < 4N, 0 \leq l < D \end{aligned} \quad (16)$$

### 2.2.2 边值条件和终值条件的差分化

(1)  $v=0, v_\infty=4K$

接下来对边界进行差分化处理。由于  $v=0$  是蜕化边界,且在条件(14)下,不需要在  $v=0$  上额外添加边界条件,于是本文对原始PDE方程取  $v=0$ ,可以得到如下的蜕化后的一阶偏微分方程:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + rS \frac{\partial \varphi}{\partial S} + [k\theta + \lambda(0, t)] \frac{\partial \varphi}{\partial v} - r\varphi = 0 \quad (17)$$

同样地,根据上面定义的差分算子式(15)对式(17)进行差分得到  $v=0$  上债券价值的差分表达式为

$$\begin{aligned} \varphi_{i,0}^l = (1 + r\Delta t)^{-1} \left\{ -\frac{\Delta t}{2} i r \varphi_{i-1,0}^{l+1} + \left[ 1 - \frac{\Delta t}{\Delta v} (k\theta + \right. \right. \\ \left. \left. \lambda(0, t_{l+1})) \right] \varphi_{i,0}^{l+1} + \frac{\Delta t}{2} i r \varphi_{i+1,0}^{l+1} + \right. \\ \left. \frac{\Delta t}{\Delta v} (k\theta + \lambda(0, t_{l+1})) \varphi_{i,1}^{l+1} \right\} \\ 0 < i < 4M, 0 \leq l < D \end{aligned} \quad (18)$$

在截断边界  $v_\infty=4K$  处,可以认为波动率趋于无穷时,波动率的微小变化对债券价值的影响不大,因此取  $\varphi_{i,4N}^l = \varphi_{i,4N-1}^l$

(2)  $t=T$

在终值时刻  $t=T$ ,根据条件可以得到

$$\varphi_{i,j}^D = \min(F, S_i) \quad (19)$$

(3)  $S=0, S_\infty=4K$  以及迁移边界  $S=K$

在  $S$  趋于 0 时,可以认为公司处于破产清算阶段,于是取  $\varphi_{0,j}^l = 0$ ,在  $S_\infty=4K$  时,公司不会有违约

风险,因此  $\varphi_{4M,j}^l = F$ 。

在信用等级迁移边界  $S=K$  处,即  $i=M$  时,根据式(11)可以得到

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_{M,j}^l - \varphi_{M-1,j}^l}{\Delta S} - \frac{\varphi_{M+1,j}^l - \varphi_{M,j}^l}{\Delta S} = \\ \left( \frac{1}{B_1(t_l)} - \frac{1}{B_2(t_l)} \right) \\ \frac{1}{2K\Delta v} (\varphi_{M,j+1}^l - \varphi_{M,j-1}^l) \end{aligned}$$

此处的  $B_i(t)$  的定义见式(4),对上式进行移项处理得到

$$\begin{aligned} p(l) \varphi_{M,j-1}^l - \varphi_{M-1,j}^l + 2\varphi_{M,j}^l - \varphi_{M-1,j}^l - \\ p(l) \varphi_{M,j+1}^l = 0 \\ 0 < j < 4N, 0 \leq l < D \end{aligned} \quad (20)$$

式中:  $p(l) = \frac{\Delta S}{2K\Delta v} \left( \frac{1}{B_1(t_l)} - \frac{1}{B_2(t_l)} \right)$ 。

根据前面差分后的偏微分方程、终值和边值条件以及各参数间满足的关系,对参数取值。首先设定公司债券的到期日  $T=1$  年,  $T' > T$ , 因此假设对冲工具零息票的到期日  $T'=1.07$ ; 公司债券面值  $F=1$  元,  $K > F$ , 于是假设信用等级迁移边界  $K=1.2$ ; 固定波动率方差的波动率  $\sigma_1=0.6, \sigma_2=0.0007$ <sup>[17]</sup>, 根据交易所的数据显示,历史年化隐含波动率在股灾期间可超过 100%, 在这里设定波动率方差的长期均值  $\theta=0.5$ , 根据  $2k\theta \geq \sigma^2$ , 于是假设均值回归系数  $k=0.9$ ; 根据市场情况,在大多数时候,1 年期国库券的实际利率在 3% 上下浮动,因此假设无风险利率  $r=0.03$ ; 两个随机过程的相关系数  $\rho=0.2$ ; 经过验算,以上参数取值满足 Fichera 条件。得到的数值结果如图 1~6 所示。

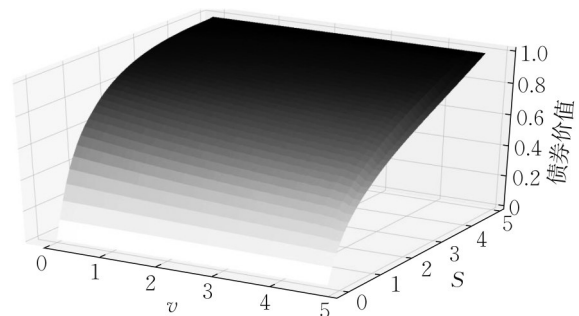


图 1 初始时刻公司债券的价值曲面

Fig. 1 Value surface of corporate bond at  $t=0$

从图 1 可以看出,债券价值关于资产  $S$  是单调递增的,并且在低等级下债券价值随着  $S$  的增大而快

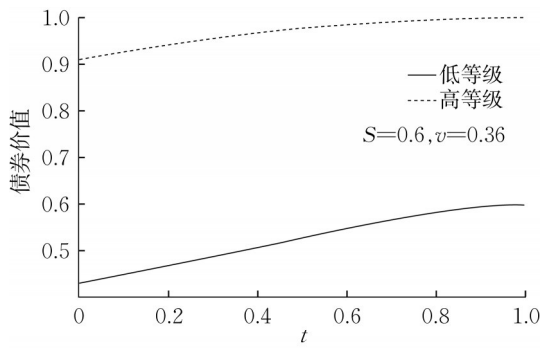


图 2 债券价值随时间  $t$  的变化

Fig. 2 Change in the value of bond with time  $t$

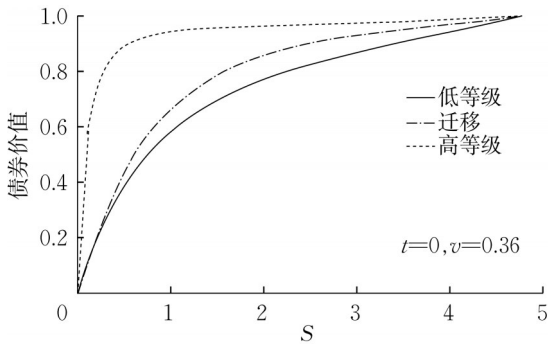


图 3 债券价值随资产  $S$  的变化

Fig. 3 Change in the value of bond with  $S$

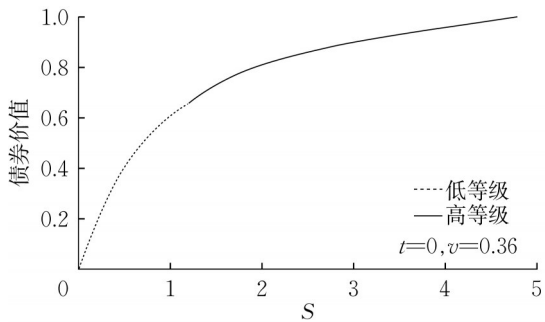


图 4 含信用等级迁移债券随资产  $S$  的变化

Fig. 4 Change of credit rating migration bond with  $S$

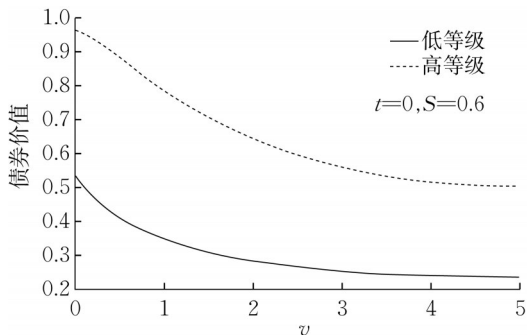


图 5 债券价值随波动率  $v$  的变化

Fig. 5 Change in the value of bond with  $v$

速增大,在高等级下,随着  $S$  的增大而增长缓慢。

从图 1~6 可以看出,债券价值是随着时间的增

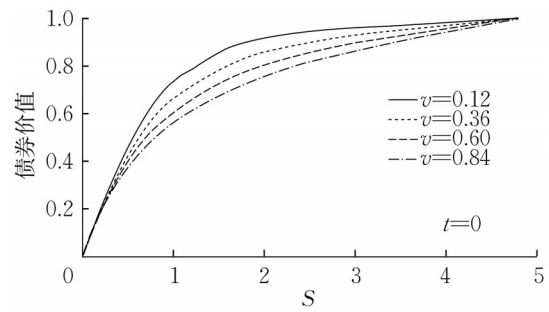


图 6 不同波动率下含信用等级迁移债券随资产  $S$  的变化

Fig. 6 Change of bond with credit rating migration as asset  $S$  changes at different volatilities

大而增大的,并且含信用等级迁移的债券的价值是介于一直处于同一等级的高、低等级债券价值之间。从图 4 可以看出,在信用等级迁移边界  $S=K$  处,债券价值关于  $S$  的一阶导数有一个下凹的尖角,符合模型在边界处带跳的情况,但是由于参数的取值需满足式 (19),因此在  $S=K$  处的跳数值较小,下凹现象不是特别明显。

图 6 是初始时刻不同波动率方差  $v$  下债券价值随资产  $S$  的变化曲线,可以看出,在同样的资产  $S$  下,债券价值随着波动率的增大而减小。

### 2.3 参数分析

通过对各参数进行调整,分析不同参数取值对于债券价值的影响。

图 7 是在  $t=0, v=0.36$  时的不同均值回归速度  $k$  下债券价值随资产  $S$  的变化曲线,可以看出,波动率方差的均值回归速度越大,债券价值越小。实际上,在现实生活中,对于利率来说,回归速度越快,波动越小,即债券凸度带来的收益越小,于是债券价值越低。

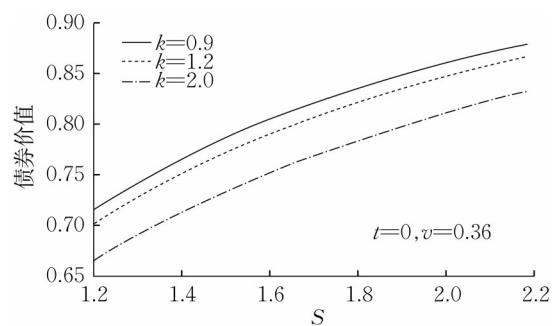


图 7 不同均值回归速度下含信用等级迁移债券随资产  $S$  的变化

Fig. 7 Change of migration bonds with credit rating as asset  $S$  changes at different mean regression speeds

图 8 是  $t=0, v=0.36$  时公司资产和波动率方差满足的两个随机过程的不同相关系数  $\rho$  下的债券价值随资产  $S$  变化的曲线,可以看出,相关系数  $\rho$  越大,债券价值越低,在 Shimko 等<sup>[18]</sup>的文章中,也有类似结论。

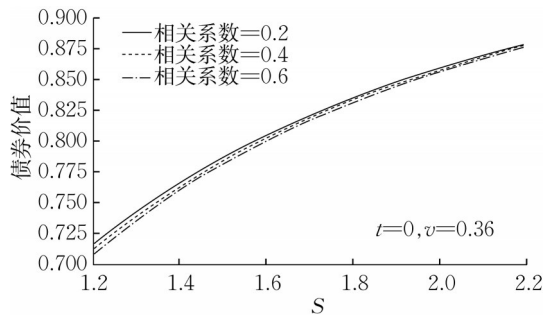


图 8 不同相关系数下含信用等级迁移债券随资产  $S$  的变化  
Fig. 8 Change of bonds with credit rating migration as asset  $S$  changes at different correlation coefficients

图 9 是  $t=0, v=0.36$  时不同长期均值  $\theta$  下债券价值随资产  $S$  的变化曲线,可以看出,在同一资产  $S$  的情况下,均值越大,债券价值越小,实际生活中,  $\theta$  代表波动率在未来达到稳定后的水平,  $\theta$  越大代表波动越大,信用风险越大,于是信用利差也会变大,因此债券价值越低。

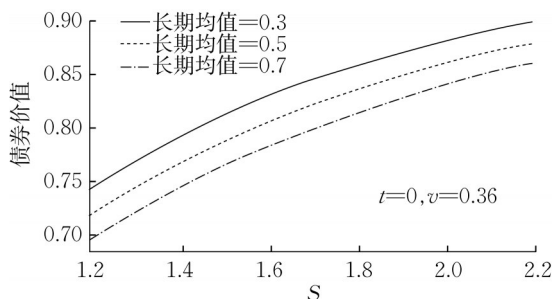


图 9 不同长期均值下含信用等级迁移债券随资产  $S$  的变化  
Fig. 9 Change of bonds with credit rating migration as asset  $S$  changes at different long-term means

### 3 结语

本文以公司债券定价为工具来评估信用等级迁移风险。公司的信用等级由公司资产决定,预先设定信用等级迁移边界将公司分为高等级和低等级,通过将公司资产波动率方差的波动率在不同信用等级下设定为不同的常数,基于 Heston 模型,通过债

券定价方式,建立了具有随机波动率方差的信用等级迁移模型。然后基于市场无套利的假设,通过对冲的方法将随机微分方程组转化为一个二阶的带内边界的抛物型初边值问题。这个推导出来的定解问题在信用等级迁移边界处的条件不同于一般的边界条件,迁移边界处的跳是一个关于高、低等级债券价值对波动率的一阶偏导和时间的函数,这也是本模型的一个创新之处。后续本文采取了隐格式求取了 PDE 的数值解,并进行了参数分析。

本文将 Heston 随机波动率模型应用到公司债券的信用等级迁移风险的研究当中,改进了以 Black Sholes 模型为基础的信用等级迁移模型中资产波动率为常数的问题。本文模型基于 Heston 随机波动率模型,引入不同的“波动率的波动率”来刻画不同信用等级下资产波动率的波动性,同时考虑了波动率与资产价格之间的相关性,以此建立了信用等级迁移模型,也使得信用等级迁移模型更加符合实际。关于本文模型的数值结果,总结得到如下结论:公司处于高等级、公司资产越大、离到期日越近、资产波动率越小、均值回归速度越小、相关系数越小、长期均值越小,都会使得债券价值越大,基本符合实际,因此在实际应用中,要重点关注这几项参数,只有正确估值,才能充分避险。进一步的实际应用价值会在以后的工作中进行实证研究。

#### 作者贡献声明:

梁 进:提出研究选题与模型,研究思路、写作指导。  
陶晓宇:负责模型推导,数值计算,论文撰写等。

#### 参考文献:

- [1] JARROW R A, TURNBULL S M. Pricing derivatives on financial securities subject to credit risk [J]. The Journal of Finance, 1995, 50(1): 53.
- [2] MERTON R C. On the pricing of corporate debt: the risk structure of interest rates [J]. The Journal of Finance, 1974, 29(2): 449.
- [3] 梁进,曾楚焜. 基于结构化方法的含信用等级迁移的公司债券定价 [J]. 高校应用数学学报(A辑), 2015, 30(1): 61.  
LIANG Jin, ZENG Chukun. Corporate bonds pricing under credit rating migration and structure framework [J]. A Journal of Chinese Universities (Applied Mathematics), 2015, 30(1): 61.
- [4] HU B, LIANG J, WU Y. A free boundary problem for

- corporate bond with credit rating migration [J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2015, 428(2): 896.
- [5] LIANG J, WU Y, HU B. Asymptotic traveling wave solution for a credit rating migration problem[J]. *Journal of Differential Equations*, 2016, 261(2): 1017.
- [6] LIANG J, ZHAO Y, ZHANG X. Utility indifference valuation of corporate bond with credit rating migration by structure approach[J]. *Economic Modelling*, 2016, 54: 339.
- [7] WU Y, LIANG J. Free boundaries of credit rating migration in switching macro regions[J]. *Mathematical Control & Related Fields*, 2020, 10(2): 257.
- [8] WU Y, LIANG J, HU B. A free boundary problem for defaultable corporate bond with credit rating migration risk and its asymptotic behavior[J]. *Discrete & Continuous Dynamical Systems:B*, 2020, 25(3): 1043.
- [9] 梁进, 邹宏春. 担保信用等级变换的利率互换衍生品定价[J]. *同济大学学报(自然科学版)*, 2018, 46(11): 1609.  
LIANG Jin, ZOU Hongchun. Pricing of interest rate swap derivatives for assuring credit rating migration [J]. *Journal of Tongji University(Natural Science)*, 2018, 46(11): 1609.
- [10] BLACK F, SCHOLES M. The pricing of options and corporate liabilities[J]. *Journal of Political Economy*, 1973, 81(3): 637.
- [11] HESTON S L. A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options [J]. *The Review of Financial Studies*, 1993, 6(2): 327.
- [12] COX J C, INGERSOLL J E, ROSS S A. A theory of the term structure of interest rates [J]. *Econometrica*, 1985, 53(2): 385.
- [13] 梁进, 周汇慧. 资产波动率为随机的信用等级迁移风险的评估模型[J]. *系统科学与数学*, 2022, 42(2): 14.  
LIANG Jin, ZHOU Huihui. An evaluation model of credit rating migration risk with stochastic asset volatility [J]. *Journal of Systems Science and Mathematical*, 2022, 42(2): 14.
- [14] 姜礼尚, 徐承龙, 任学敏, 等. 金融衍生品定价的数学模型与案例分析[M]. 北京: 高等教育出版社, 2008.  
JIANG Lishang, XU Chenglong, REN Xuemin, *et al.* *Mathematical model and case study of financial derivative product pricing*[M]. Beijing: Higher Education Press, 2008.
- [15] 姜礼尚, 陈亚浙, 刘西桓, 等. 数学物理方程讲义[M]. 3版. 北京: 高等教育出版社, 2007.  
JIANG Lishang, CHEN Yazhe, LIU Xihuan, *et al.* *Handouts on equations in mathematical physics* [M]. 3rd ed. Beijing: Higher Education Press, 2007.
- [16] 李荣华, 刘播. 微分方程数值解法[M]. 4版. 北京: 高等教育出版社, 2009.  
LI Ronghua, LIU Bo. *Numerical solution of differential equations*[M]. 4th ed. Beijing: Higher Education Press, 2009.
- [17] WU Y, LIANG J. A new model and its numerical method to identify multi credit migration boundaries [J]. *International Journal of Computer Mathematics*, 2018, 95(8): 1688.
- [18] SHIMKO D C, TEJIMA N, VAN DEVENTER D R. The pricing of risky debt when interest rates are stochastic [J]. *The Journal of Fixed Income*, 1993, 3(2): 58.