文章编号：0253-374X(2025)02-0233-11 DOI：10.11908/j.issn.0253-374x.23223

基本型平曲线"两点法"设计计算原理

李玉华[1]，王奥凯[1]，刘佳音[2]，马洋洋[1]，吴树铭[1]

（1. 大连理工大学 建设工程学院，辽宁 大连 116023；2. 大连海洋大学 海洋与土木工程学院，辽宁 大连 116023）

摘要：为改善传统导线法存在导线与平曲线偏离较大等不足，提出"两点法"基本型平曲线形设计方法。仅需利用导线法中的直缓点与缓直点两个端点即可获得由缓和曲线及圆曲线共3段线元组成的基本型平曲线形，其平曲线总偏转角α、总切线长T为已知值。先采用迭代法确定缓和曲线长度L_S（对称基本型）或采用夹逼法获得圆曲线半径R（非对称基本型）的理论最小值、最大值，并结合平面线形技术要求确定L_S或R的设计取值范围；然后基于L_S或R进行遍历循环，通过迭代法获得缓和曲线偏转角β，进而获得各线元其余参数。研究结果表明，"两点法"设计可获得系列"平曲线族"，线形分布规律，互不交叉重叠，且全部曲线位于两端细窄、中间宽厚的"特定设计区域"；L_S、R、圆曲线长L_C及平曲线总长L_H等参数呈规律性变化，其中L_S与R、L_C的增减趋势相反，L_H平均值近似固定，非对称基本型的总切线长度之比须在(0.5，2.0)范围内方可有解。"两点法"突显坐标位置点的控制作用，线形布设高效，设计成果为特定区域内的系列平曲线族而非单条曲线，有益于结合实际地形及设计意图进行线形比选、优选和路线智能化设计。

关键词：道路工程；基本型平曲线；两点法；迭代法；平曲线族；特定设计区域；线形优选

中图分类号：U412.33；U412.31 **文献标志码**：A

Design and Calculation Principles of the "Two-Point Method" for Basic Horizontal Curves

LI Yuhua[1], *WANG Aokai*[1], *LIU Jiayin*[2], *MA Yangyang*[1], *WU Shuming*[1]

(1. School of Infrastructure Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116023, China; 2. College of Ocean and Civil Engineering, Dalian Ocean University, Dalian 116023, China.)

Abstract: To address the shortcomings of traditional traverse method such as significant deviation between the traverse and the horizontal curve, this paper proposes a "two-point method" for basic horizontal alignment design. It is only necessary to use the two endpoints named "point of tangent to spiral" and "point of spiral to tangent" to obtain the basic type horizontal curve family consisting of three elements including the transition curves and the circular curve. The total deflection angle (α) and total tangent length (T) of the horizontal curve family are known fixed parameters. First, the theoretical minimum and maximum values of the transition curve length (L_S) or the radius of circular curve (R) are calculated using the iterative method (for symmetric type) or squeeze theorem analysis method (for asymmetric type), respectively. Then, the design value range of L_S or R is determined based on the technical requirements of horizontal alignment. Afterwards, the traversal cycle is performed based on L_S or R, and the corresponding deflection angle of the transition curve (β) is calculated using an iterative calculation method. Finally, the remaining parameters of each element is determined. The results indicate that, the "horizontal curve family" obtained through the "two-point method" has a regular distribution and does not overlap with each other, and all of the curves are located in "a specific design area" with narrow ends and wide-thick middle. The variation of parameters such as L_S, R, circular curve length (L_C), and total horizontal curve length (L_H) is very regular. The increasing and decreasing of LS are opposite to those of R and L_C, while the average of L_H is approximately fixed. Furthermore, the ratio of the total tangent lengths is only solvable within the range from 0.5 to 2.0. The "two-point method" highlights the controlling role of coordinate location points, making the alignment layout efficient. The design outcome presents a series of horizontal curve families within a specific area, rather than a single curve. This is beneficial for comparing and selecting alignments based on actual topography and design intentions, thereby contributing to the advancement of intelligent route design.

Keywords: road engineering; basic horizontal curve; two-point method; iterative calculation; horizontal curve

论文拓展介绍

收稿日期：2023-07-03
基金项目：国家自然科学基金(51878121)
第一作者：李玉华，副教授，工学博士，主要研究方向为智能化道路工程CAD技术。E-mail：liwo@dlut.edu.cn

family; specific design area; horizontal alignment optimization

近几十年来我国公路及铁路建设迅猛发展,已形成较为完善的路线平面线形设计方法,其中导线法[1]和曲线法[2]应用最为广泛。导线法一般设计过程是先拟定直线导线,然后在相邻导线间设置由“第1缓和曲线+圆曲线+第2缓和曲线”共3段线元构成的基本型平曲线形。导线法敷设便捷,简单易行,但存在导线与实际平曲线偏离较大等问题,较适合于平原微丘区或立交桥主线等简单线形设计。曲线法的一般设计方法是先布设圆曲线,然后采用直线、缓和曲线或圆曲线3种基本线元相互连接,由此构建复杂的平曲线形。曲线法依靠线元灵活布线、设计过程“所见即所得”,无赘余线形,在山岭重丘区、立交匝道等复杂线形设计中极具优势;但在调整线元参数时,其两端的切线方向易改变,由此将产生“牵连效应”。由于导线法依靠直线控制基本走向,所含3段平曲线线元参数的调整不会改变两端的切线方向,这正好弥补曲线法的不足。

在复杂地形及立交匝道线形设计实践中,路线设计方法进一步发展,如针对导线法改进的附合导线法[3]、五单元导线法[4]等,针对曲线法改进的综合法[5]、控制线元法[6]等。这些方法尽管有利于线形优化,但增加了选线的复杂性。两点线元法[7]基于已确定的终点坐标、切线方向角、曲线半径3个参数,仅需再拟定1个端点便可确定6类线元,同时生成10余条线元曲线,有益于线形比选及线形拟合重构[8-9]。

导线法与曲线法两种方法相结合是较好的创新思路,如曲直法[2]、直线约束通用方法[10]、圆心连线闭合导线法[11]等,但这些方法偏重于完善曲线法的优势;采用样条函数[12]、多项式缓和曲线[13]等方法拓展了传统平曲线形类型,提高了线形曲率的连续性[14],但增加了设计计算难度。

综上,目前平面线形设计方法面临的主要问题有:①两种基本方法均存在固有不足;②设计成果通常为单一平曲线,不利于进行多种适宜线形的比选。两点线元法对此有所改进,但仍局限于曲线法优势。

近年来,随着高新技术及人工智能的发展,线形优化[15]和智能选线[16]备受关注。本文提出的“两点法”[17-18]综合了导线法的便捷性与曲线法的灵活性,可获得规律性分布的“平曲线族”及“特定区域”的线形,便于设计比选,有助于路线优化和智能选线设计。

1 导线法基本型平曲线参数及计算

1.1 平曲线组成及参数

如图1所示,导线法基本型平曲线参数包括:平曲线偏转角α,圆曲线半径R、圆心角α_C及圆曲线长L_C,第1、第2缓和曲线长L_{S_1}、L_{S_2}及相应的缓和曲线偏转角β_1、β_2,第1、第2总切线长T_{S_1}、T_{S_2},因设置缓和曲线而引起的切线长增加值q_1、q_2及相应的圆曲线内移值Δ_{R_1}、Δ_{R_2},其中α、R、L_{S_1}、L_{S_2}通常为已知参数;点D为导线交点,点C为圆曲线圆心,点A、点B分别为过圆心C向第1、第2导线作垂线的垂足;T_1、T_2为不设缓和曲线(仅含圆曲线)时的名义切线长,其相应的圆曲线半径分别为$|\overline{CA}|=R+\Delta_{R_1}$、$|\overline{CB}|=R+\Delta_{R_2}$。

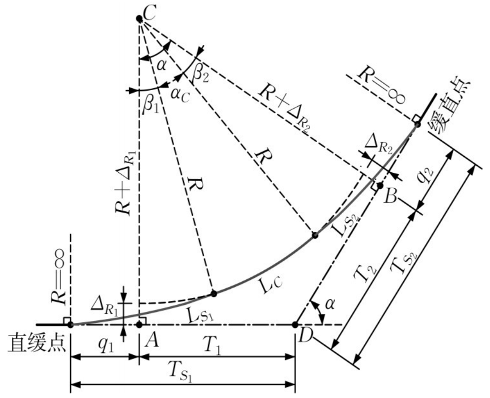

图1 导线法基本型平曲线组成及参数

Fig. 1 Composition and parameters for basic horizontal curves using traverse method

1.2 平曲线参数计算

1.2.1 基本参数

按式(1)~(3)计算基本参数β_1、β_2、q_1、q_2及Δ_{R1}、Δ_{R2},其中关于缓和曲线偏转角β的多项式函数$g_x(\beta)$、$g_y(\beta)$、$f_x(\beta)$、$f_y(\beta)$如式(4)、(5)所示。

$$\begin{cases}\beta_1=L_{S_1}/(2R)\\ \beta_2=L_{S_2}/(2R)\end{cases}\tag{1}$$

$$\begin{cases}q_1=Rg_x(\beta_1)\\ q_2=Rg_x(\beta_2)\end{cases}\tag{2}$$

$$\begin{cases}\Delta_{R_1}=Rg_y(\beta_1)-R\\ \Delta_{R_2}=Rg_y(\beta_2)-R\end{cases}\tag{3}$$

$$\begin{cases}g_x(\beta)=2\beta f_x(\beta)-\sin\beta\\ g_y(\beta)=2\beta^2 f_y(\beta)+\cos\beta\end{cases}\tag{4}$$

$$\begin{cases} f_x(\beta)=\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i-1}\dfrac{\beta^{2i-2}}{(2i-2)!(4i-3)} \\ f_y(\beta)=\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i-1}\dfrac{\beta^{2i-2}}{(2i-1)!(4i-1)} \end{cases} \tag{5}$$

1.2.2　切线长

总切线长 T_{S_1}、T_{S_2} 的计算公式如式(6)所示。

$$\begin{cases} T_{S_1}=q_1+T_1=q_1+\dfrac{R+\Delta_{R_2}}{\sin\alpha}-\dfrac{R+\Delta_{R_1}}{\tan\alpha} \\ T_{S_2}=q_2+T_2=q_2+\dfrac{R+\Delta_{R_1}}{\sin\alpha}-\dfrac{R+\Delta_{R_2}}{\tan\alpha} \end{cases} \tag{6}$$

1.2.3　其他参数

圆心角 α_C 按式(7)计算,圆曲线长 $L_C=R\alpha_C$。

$$\alpha_C=\alpha-(\beta_1+\beta_2) \tag{7}$$

2　对称基本型“两点法”线形及参数计算

2.1　线形设计与计算概述

图2为对称基本型“两点法”线形设计及主要参数示意图,点 B 为已设计的上一段平面线形终点,亦为当前平曲线设计段起点,其切线方向角 α_B 已知。“两点法”线形设计时,仅需再拟定当前平曲线设计段的终点 E 即可获得“$L_S+L_C+L_S$”对称基本型系列平曲线族;利用对称平曲线的几何特点,先计算获得 α 及总切线长 T_S,然后依据路线平面技术指标要求确定 L_S 及 R 的可行值范围,再以 L_S 或 R 为遍历参数,通过 T_S 与 α、L_S、R、β 等参数之间的特定关系建立关于 β 的显示迭代公式,最后计算得到 β 值及其余参数。

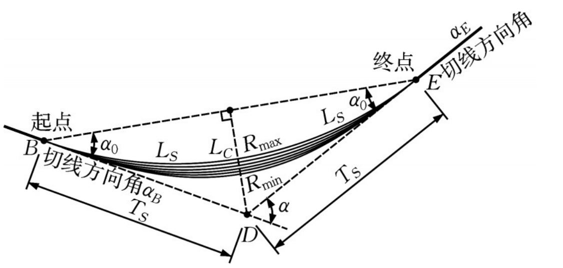

图2　对称基本型线形及参数示意图

Fig. 2　Alignment and parameter diagram of symmetric basic horizontal curve

2.2　总切线长及参数关系

由图2可知,在拟定当前平曲线设计段的终点 E 后,对称基本型“两点法”平曲线参数 α、T_S 即可通过式(8)、(9)计算确定,其中 α_{BE} 为矢量 $\overrightarrow{BE}$ 的方向角(弧度),α_0 为由起点 B 切线方向旋转至矢量 $\overrightarrow{BE}$ 方向的偏转角。

$$\begin{cases} \alpha_0=|\alpha_{BE}-\alpha_B| \\ \alpha=2\alpha_0 \end{cases} \tag{8}$$

$$T_S=0.5|\overrightarrow{BE}|/\cos(\alpha/2) \tag{9}$$

由对称性有 $L_S=L_{S_1}=L_{S_2}$、$\beta=\beta_1=\beta_2$、$q=q_1=q_2$ 及 $\Delta_R=\Delta_{R_1}=\Delta_{R_2}$,其中 $\beta=L_S/(2R)$;由式(6)可得 T_S 关于 R、L_S、α 的关系式(10)、(11)。

$$T_S=q+(R+\Delta_R)\tan(\alpha/2)=Rf(\alpha,\beta) \tag{10}$$

$$f(\alpha,\beta)=g_x(\beta)+g_y(\beta)\tan(\alpha/2) \tag{11}$$

2.3　理论缓和曲线长度及圆曲线半径

2.3.1　缓和曲线理论最大长度及圆曲线理论最小半径

由缓和曲线基本特性可知,当 L_S 增大时,β 增加而 R 将减小;当 L_S 达到理论最大值 L_{Smax0} 时,相应的 β 亦达到理论最大值 $\beta_{max0}=0.5\alpha$,而 R 达到理论最小值 R_{min0},由此可得 $L_{Smax0}=2\beta_{max0}R_{min0}=\alpha R_{min0}$,其中 R_{min0} 由式(12)计算;需注意应满足 $R_{min0}\geqslant R_{min}$,其中 R_{min} 为路线平面技术指标要求的圆曲线最小半径。

$$R_{min0}=T_S/f(\alpha,\beta_{max0}=0.5\alpha) \tag{12}$$

2.3.2　缓和曲线理论最小长度及圆曲线理论最大半径

依据路线平面线形技术要求,当 R 大于不设超高的圆曲线最小半径 R_{minC} 时,可不设置缓和曲线,即 L_S 理论最小长度 $L_{Smin0}=0$,易知此时 R 达到理论最大值 R_{max0}、β 达到理论最小值 $\beta_{min0}=0$;将 $\beta=\beta_{min0}=0$ 带入式(10),可获得 R_{max0} 的计算式(13)。需注意应检验是否满足 $R_{max0}\geqslant R_{maxC}$ 的条件,否则 L_{Smin0} 应采用缓和曲线最小长度 L_{Smin},即 $L_{Smin0}=L_{Smin}>0$,此时 R_{max0} 需依据式(10)计算确定。

$$R_{max0}=\frac{T_S}{f(\alpha,\beta_{min0}=0)}=\frac{T_S}{\tan(\alpha/2)} \tag{13}$$

2.4　线形参数求解过程

当已知 α、T_S 及 R 时,由式(10)、(11)可得到式(14),该式仅含未知参数 β。为便于求解 β,将 $R=L_S/(2\beta)$ 带入式(14)得到式(15);此时若 L_S 已知,则变量 c 为常数,式(15)为关于 β 的显示迭代计算公式。

$$f(\alpha,\beta)=g_x(\beta)+g_y(\beta)\tan(\alpha/2)=T_S/R=c_0 \tag{14}$$

$$\begin{cases} \beta=c[g_x(\beta)+g_y(\beta)\tan(\alpha/2)] \\ c=0.5L_S/T_S \end{cases} \tag{15}$$

依据式(12)、(13)可获得 L_S 的理论值范围 $[L_{Smin0},L_{Smax0}]$,再结合路线平面设计技术指标要求可确定 L_S 的可行值范围 $[L_{Smin},L_{Smax}]$;若以一定步长 Δ_{L_S} 对 L_S 进行遍历,则可基于常数 $c=0.5L_S/T_S$,由式(15)迭代计算得到 β。主要步骤简述如下:

(1)已知α、T_S、$L_{S\min}$及$L_{S\max}$;设定L_S的遍历步长Δ_{L_S}(如Δ_{L_S}=20 m),设定β计算精度ε_β(如$\varepsilon_\beta=1.0\times10^{-7}$);开始针对$L_S$进行循环遍历。

(2)由当前L_S计算常数$c=0.5L_S/T_S$;设定β初始值$\beta_0=0.1\alpha$,令$\beta_p=\beta_0$。

(3)将$\beta=\beta_p$带入迭代公式(15),计算获得新的偏转角$\beta_q=cf(\alpha,\beta_p)$。

(4)计算偏转角差值$\Delta_\beta=|\beta_q-\beta_p|$,若$\Delta_\beta>\varepsilon_\beta$,则令$\beta_p=\beta_q$,返回步骤(3),进行下一次迭代计算。

(5)若$\Delta_\beta\leqslant\varepsilon_\beta$,迭代结束,获得满足精度要求的偏转角$\beta=\beta_q$。

获得偏转角β后,由当前L_S值可得$R=0.5L_S/\beta$、圆心角$\alpha_C=\alpha-2\beta$及圆曲线长$L_C=R\alpha_C$等其余参数并确定出“$L_S+L_C+L_S$”单条对称型平曲线,L_S遍历结束即可获得系列平曲线族。

3 非对称基本型平曲线参数及计算

3.1 线形设计与计算概述

图3为非对称基本型“两点法”线形设计及主要参数示意图,与对称基本型“两点法”线形设计有以下不同:①$L_{S_1}\neq L_{S_2}$,因此$\beta_1\neq\beta_2$、$q_1\neq q_2$、$\Delta_{R_1}\neq\Delta_{R_2}$及$T_{S_1}\neq T_{S_2}$;②除需拟定终点$E$之外,还需指定终点$E$的切线方向$\alpha_E$。先计算平曲线偏转角$\alpha$及$T_{S_1}$、$T_{S_2}$,并获得圆曲线半径$R$的理论值范围[$R_{\min0}$, $R_{\max0}$],再结合路线平面技术指标要求确定R的可行值区间[$R_{\min}$,$R_{\max}$],然后针对R进行遍历,采用“双迭代法”计算获得β_1、β_2,最后确定L_{S_1}、L_{S_2}、L_C及α_C等其余参数。

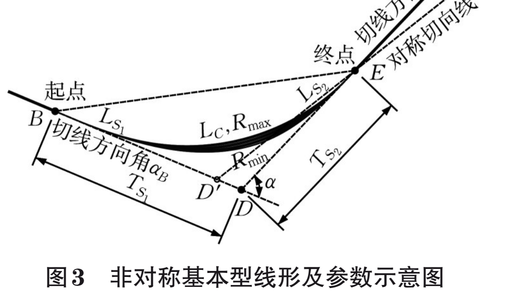

图3 非对称基本型线形及参数示意图

Fig. 3 Diagram of alignment and parameters of asymmetric basic horizontal curve

3.2 总切线长计算分析

依据式(2)、(3)、(6)可获得T_{S_1}、T_{S_2}与α、R、β_1、β_2的关系式(16),其中R、β_1、β_2应同时满足如式(17)所示的几何限定条件及路线平面技术指标要求;由式(16)可得函数$f_{T_S}=T_{S_1}/T_{S_2}$与α、β_1、β_2的关系式(18)。

$$\begin{cases}\dfrac{T_{S_1}}{R}=g_x(\beta_1)+\dfrac{g_y(\beta_2)}{\sin\alpha}-\dfrac{g_y(\beta_1)}{\tan\alpha}\\[2ex]\dfrac{T_{S_2}}{R}=g_x(\beta_2)+\dfrac{g_y(\beta_1)}{\sin\alpha}-\dfrac{g_y(\beta_2)}{\tan\alpha}\end{cases}\tag{16}$$

$$\begin{cases}0<R_{\min}\leqslant R\leqslant R_{\max}\\0<\beta_{\min}\leqslant\beta_1\leqslant\beta_{\max}<\alpha\\0<\beta_{\min}\leqslant\beta_2\leqslant\beta_{\max}<\alpha\\\beta_1+\beta_2\leqslant\alpha\end{cases}\tag{17}$$

$$f_{T_S}=\frac{T_{S_1}}{T_{S_2}}=\frac{g_x(\beta_1)+\dfrac{g_y(\beta_2)}{\sin\alpha}-\dfrac{g_y(\beta_1)}{\tan\alpha}}{g_x(\beta_2)+\dfrac{g_y(\beta_1)}{\sin\alpha}-\dfrac{g_y(\beta_2)}{\tan\alpha}}\tag{18}$$

为探寻函数f_{T_S}的变化规律,在$\alpha\in[1°,179°]$范围内以及$\beta_1\in[0,1.4]$、$\beta_2\in[0,1.4]$条件下,以步长$\Delta\alpha=1°$、$\Delta_\beta=0.01$ rad,由式(18)计算[β_1, β_2]域内的f_{T_S},并绘制α、f_{T_S}关系如图4所示。由图4可知,对任意偏转角α,比值$f_{T_S}=T_{S_1}/T_{S_2}$限定在一定范围[$f_{T_S\min}$, $f_{T_S\max}$],且$f_{T_S\min}$、$f_{T_S\max}$互为倒数关系;当α较小、接近于0°时,$f_{T_S\min}=0.5$、$f_{T_S\max}=2.0$;当α较大、接近于180°时,$f_{T_S\min}=f_{T_S\max}=1.0$。如果总切线长$T_{S_1}$、$T_{S_1}$相差过大,当比值$f_{T_S}$小于0.5或大于2.0时,将不存在满足要求的非对称型平曲线。可获得平曲线偏转角α与$f_{T_S\max}$的二次多项式函数拟合关系如式(19)所示,拟合相关系数$R^2=0.9994254$。

$$f_{T_S\max}(\alpha)=2+0.0227746\alpha-0.1048512\alpha^2\tag{19}$$

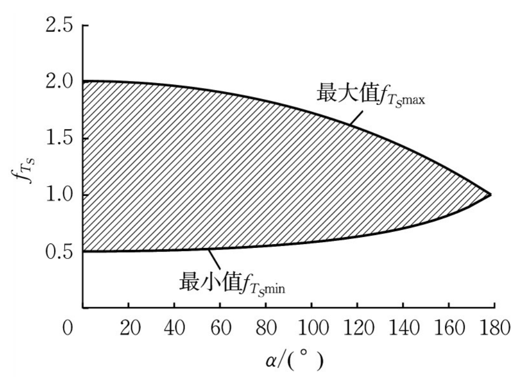

图4 α、f_{T_S}关系图

Fig. 4 Diagram of correlation between α and f_{T_S}

3.3 圆曲线半径理论范围

3.3.1 理论圆曲线最小半径

对于完整型缓和曲线,起点处$L_S=0$、$\beta=0$、$R=\infty$;随L_S增加,β亦增大,与缓和曲线终点相接的圆曲线半径R及圆曲线长L_C均将减小。由此可知,当

第1、第2缓和曲线偏转角之和达到最大值即$\beta_1+\beta_2=\alpha$时，相应的R、L_C将分别达到理论最小值$R_{\min0}$、$L_{C\min0}$，其中$L_{C\min0}=0$。引入上述条件，由式(16)整理得到式(20)，可采用“夹逼法”求解获得$R_{\min0}$及相应的β_1、β_2。

$$\begin{cases} R_1=\dfrac{T_{S_1}\sin\alpha}{g_x(\beta_1)\sin\alpha-g_y(\beta_1)\cos\alpha+g_y(\beta_2)} \\ R_2=\dfrac{T_{S_2}\sin\alpha}{g_x(\beta_2)\sin\alpha-g_y(\beta_2)\cos\alpha+g_y(\beta_1)} \\ \beta_1+\beta_2=\alpha \\ R_1=R_2=R_{\min0} \end{cases} \tag{20}$$

3.3.2　理论圆曲线最大半径

由前述分析可知，当$T_{S_1}>T_{S_2}$时，若设有缓和曲线L_{S_1}、L_{S_2}，则必有$L_{S_1}>L_{S_2}$，故当圆曲线半径R达到极大值$R_{\max0}$时，必有$L_{S_2}=0$、$\beta_2=0$及$g_x(\beta_2)=0$、$g_y(\beta_2)=1$，带入式(16)整理可得到式(21)；若$T_{S_1}<T_{S_2}$，则定有$L_{S_1}=0$、$\beta_1=0$及$g_x(\beta_1)=0$、$g_y(\beta_1)=1$，带入式(16)整理可获得与式(21)类似的关系式。式(21)亦可采用“夹逼法”求解获得$R_{\max0}$、β_1、β_2，与前述$R_{\min0}$求解方法类似。

$$\begin{cases} R_1=\dfrac{T_{S_1}\sin\alpha}{g_x(\beta_1)\sin\alpha-g_y(\beta_1)\cos\alpha+1} \\ R_2=\dfrac{T_{S_2}\sin\alpha}{g_y(\beta_1)-\cos\alpha}=R_1=R_{\max0} \end{cases} \tag{21}$$

3.4　参数求解方法

3.4.1　概述

在已知α、T_{S_1}、T_{S_2}条件下，式(16)含2个方程、3个互相独立的未知数R、β_1、β_2，故不存在唯一解。由上文分析可知，依据几何限定条件及式(20)～(21)可计算获得圆曲线半径的理论最小值$R_{\min0}$、理论最大值$R_{\max0}$，再考虑路线平面技术指标要求的圆曲线最小半径$R_{\min1}$、最大半径$R_{\max1}$，则可最终确定R的可行值范围$[R_{\min},R_{\max}]$，并同时获得缓和曲线长度及偏转角范围$[L_{S\min},L_{S\max}]$、$[\beta_{\min},\beta_{\max}]$；由此针对$R$进行遍历循环，即可在已知$\alpha$、$T_{S_1}$、$T_{S_2}$、$R$条件下求解式(16)，获得$\beta_1$、$\beta_2$，继而得到其余参数。

3.4.2　缓和曲线偏转角求解的双迭代法

求解缓和曲线偏转角β_1、β_2的计算过程均基于针对R的遍历循环，参数α、T_{S_1}、T_{S_2}、R均已知。

(1)设定β_1、β_2的计算精度$\varepsilon_{\Delta_\beta}$(如$\varepsilon_{\Delta_\beta}=1.0\times10^{-7}$ rad)，设置β_1、β_2迭代计算初始值β_{1p}、β_{2p}(如$\beta_{1p}=0.25\alpha$或$\beta_{1p}=\beta_{\min}$)。

(2)由式(16)的第1个方程，带入β_{1p}计算获得常数c_1，整理后得式(22)、(23)。

$$c_1=\sin\alpha\left[T_{S_1}/R-g_x(\beta_{1p})\right]+\cos\alpha\, g_y(\beta_{1p})\sqrt{a^2+b^2} \tag{22}$$

$$g_y(\beta_2)=c_1=2\beta_2^2 f_y(\beta_2)+\cos\beta_2 \tag{23}$$

(3)依据式(23)得到β_2的显示迭代计算式(24)，迭代求解获得满足精度要求的β_2，记$\beta_2=\beta_{2q}$。

$$\beta_2=\frac{c_1-\cos\beta_2}{2\beta_2 f_y(\beta_2)} \tag{24}$$

(4)由式(16)的第2个方程，带入$\beta_2=\beta_{2q}$计算获得常数c_2并整理得式(25)、(26)。

$$c_2=\sin\alpha\left[\frac{T_{S_2}}{R}-g_x(\beta_{2q})+\frac{g_y(\beta_{2q})}{\tan\alpha}\right] \tag{25}$$

$$g_y(\beta_1)=c_2=2\beta_1^2 f_y(\beta_1)+\cos\beta_1 \tag{26}$$

(5)依据式(26)得到β_1的显示迭代计算式(27)，迭代求解获得满足精度要求的β_1新值，记$\beta_1=\beta_{1q}$。

$$\beta_1=\frac{c_2-\cos\beta_1}{2\beta_1 f_y(\beta_1)} \tag{27}$$

(6)计算偏转角差值$\Delta_{\beta_1}=|\beta_{1q}-\beta_{1p}|$；若$\Delta_{\beta_1}\leqslant\varepsilon_{\Delta_\beta}$，则获得满足精度要求的$\beta_1=\beta_{1q}$及$\beta_2=\beta_{2q}$，计算结束；否则令$\beta_{1p}=\beta_{1q}$，返回步骤(2)进入下一轮迭代计算，直至满足偏转角差值计算精度要求。

在上述每轮计算过程中，需对β_1、β_2进行两次迭代求解，故称为“双迭代法”。

3.4.3　缓和曲线偏转角求解的改进双迭代法

前述“双迭代法”的迭代式(24)、(27)均为偏转角β_2、β_1的近似二次式，计算表明在求解过程中对β_2、β_1的迭代初始值限定较为苛刻，每个迭代计算轮回中β_1收敛性尚可，但β_2收敛性欠佳。采用以下改进方法，可明显提高迭代求解的收敛性。

(1)与“双迭代法”相同，设定β_1、β_2的计算精度$\varepsilon_{\Delta_\beta}$及初始值。

(2)由式(16)的第1个方程，带入β_{1p}计算获得常数c_1，有$g_y(\beta_2)=c_1$，参见式(22)、(23)。

(3)由式(16)的第2个方程，带入β_{1p}并替换$g_y(\beta_2)=c_1$，计算获得常数c_3，整理得式(28)、(29)。

$$c_3=\frac{T_{S_2}}{R}-\frac{g_y(\beta_{1p})}{\sin\alpha}+\frac{c_1}{\tan\alpha} \tag{28}$$

$$g_x(\beta_2)=c_3=2\beta_2 f_x(\beta_2)-\sin\beta_2 \tag{29}$$

(4)依据式(29)得到β_2的显示迭代计算式(30)，迭代求解获得满足精度要求的β_2，记$\beta_2=\beta_{2q}$。

$$\beta_2=\frac{c_2+\sin\beta_2}{2f_x(\beta_2)} \tag{30}$$

(5)由式(16)的第2个方程，带入$\beta_2=\beta_{2q}$计算获

得常数c_4并整理得式(31)、(32)。

$$c_4=(\sin\alpha)\left[\frac{T_{S_2}}{R}-g_x(\beta_{2q})+\frac{g_y(\beta_{2q})}{\tan\alpha}\right] \tag{31}$$

$$g_y(\beta_1)=c_4 \tag{32}$$

(6)由式(16)的第1个方程,带入$\beta_2=\beta_{2q}$并替换$g_y(\beta_1)=c_4$,计算获得常数c_5,整理得式(33)、(34)。

$$c_5=\frac{T_{S_1}}{R}-\frac{g_y(\beta_{2q})}{\sin\alpha}+\frac{c_4}{\tan\alpha} \tag{33}$$

$$g_x(\beta_1)=c_5=2\beta_1 f_x(\beta_1)-\sin\beta_1 \tag{34}$$

(7)由式(34)得到β_1的显示迭代计算式(35),迭代求解获得满足精度要求的β_1新值,记$\beta_1=\beta_{1q}$。

$$\beta_1=\frac{c_5+\sin\beta_1}{2f_x(\beta_1)} \tag{35}$$

(8)计算偏转角差值$\Delta_{\beta_1}=|\beta_{1q}-\beta_{1p}|$;若$\Delta_{\beta_1}\leqslant\varepsilon_{\Delta_\beta}$,则获得满足精度要求的$\beta_1=\beta_{1q}$及$\beta_2=\beta_{2q}$,计算结束;否则令$\beta_{1p}=\beta_{1q}$,返回步骤(2)进入下一轮迭代计算,直至满足偏转角差值计算精度要求。

上述"改进双迭代法"的迭代计算式(30)、(35)为偏转角β_2、β_1的近似一次式,计算分析表明β_2、β_1可取的初始值范围较大,迭代算法的收敛性、可靠性得以提高。另外还可采用"夹逼+迭代"的综合方法,限于篇幅不再赘述。

4 设计计算示例

4.1 基本资料

图5为对称基本型平曲线"两点法"计算示意图,其中,起点B(100.0,500.0)、终点E(844.0,685.5)、起点方向角α_B=30°。计算得T_S=398.838 6 m、α_0=16°、$\alpha=2\alpha_0$=32°(0.558 505 361 rad)。

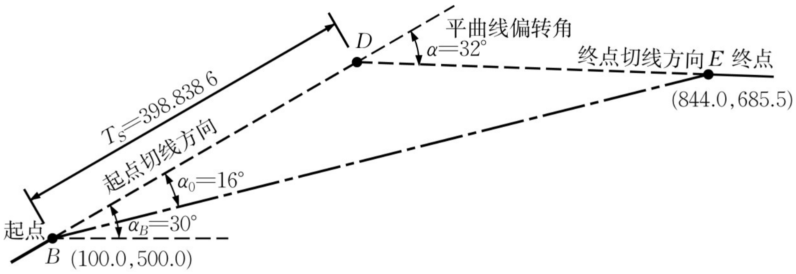

图5 对称基本型平曲线"两点法"设计计算示例

Fig. 5 Example of the "two-point method" design and calculation for symmetric basic horizontal curve

图6为非对称基本型平曲线"两点法"计算示意图,其中,起点B(100.0,500.0)、终点E(844.0,685.5)、起点方向角α_B=30°,拟定终点E的切线方向角α_E=−5°。计算得α_0=16°、α=35°(0.610 865 238 rad)、T_{S_1}=435.230 6 m、T_{S_2}=368.481 5 m;可知$f_{T_S}=T_{S_1}/T_{S_2}$=1.181 1,带入式(19)得$f_{T_S\max}$=1.880 6,显然$f_{T_S}<f_{T_S\max}$,故式(16)有解;注意到$T_{S_1}>T_{S_2}$,则在所有平曲线族中,将有$L_{S_1}>L_{S_2}$。

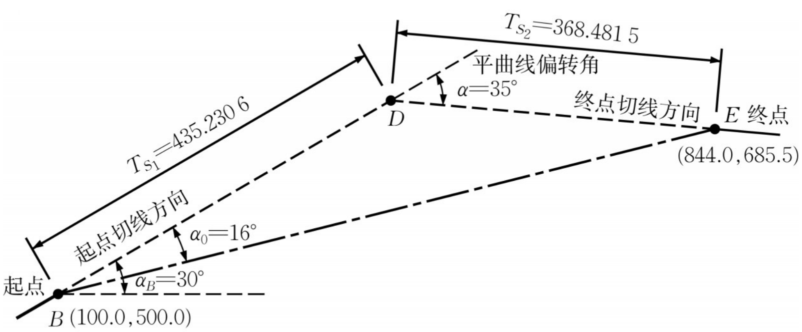

图6 非对称基本型平曲线"两点法"设计计算示例

Fig.6 Example of the "two-point method" design and calculation for asymmetric basic horizontal curve

4.2 对称基本型计算结果

4.2.1 计算结果

由式(12)、(13)分别得到圆曲线的理论最小半径$R_{\min0}$=700.959 m、理论最大半径$R_{\max0}$=1 390.915 m,缓和曲线理论最大偏转角$\beta_{\max0}$=0.5α=0.279 252 680 rad,缓和曲线理论最大长度$L_{S\max0}=2\beta_{\max0}R_{\min0}$=391.489 m。取缓和曲线长$L_S$为20 m倍数,针对$L_S$进行遍历循环,由式(15)迭代计

算获得缓和曲线偏转角β,继而得到其余参数。平曲线族及主要参数如图7所示,L_S遍历及相应参数计算结果如表1所示,其中L_{HA}为平曲线总长的平均值,N_{D}为缓和曲线偏转角迭代计算次数。

为验证式(15)迭代计算的收敛性,以$L_S=200$ m、$c=0.5L_S/T_S=0.250\ 727\ 99$为例,设置$\beta$初始值为$\beta_p=0.1$、4.0 rad两种极端条件,迭代计算过程如表2、表3所示,由表可知迭代计算收敛性很好。

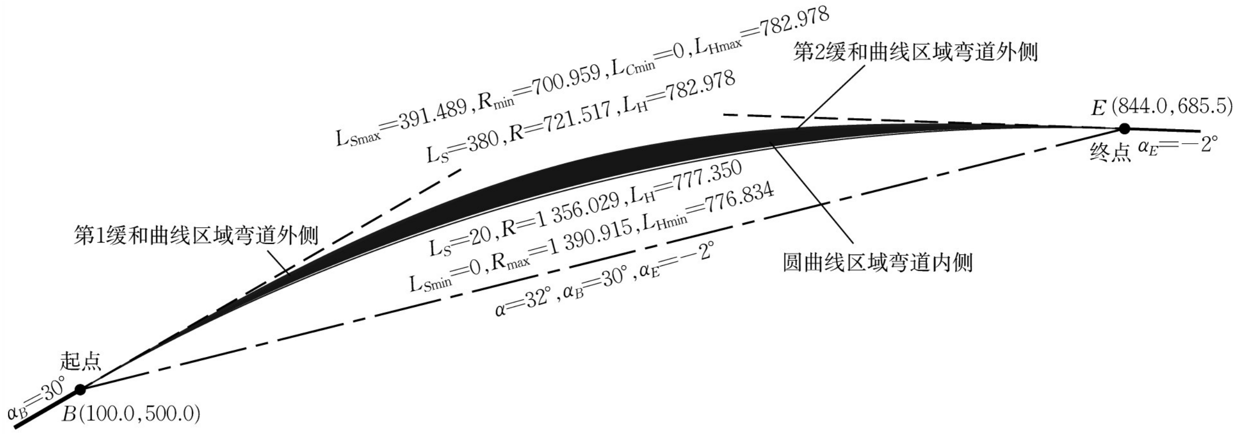

图7　对称基本型平曲线“两点法”设计主要参数及平曲线族

Fig. 7　Main parameters and horizontal curve family of the “two-point method” design for symmetric basic horizontal curve

表1　对称基本型平曲线“两点法”主要参数计算结果

Tab. 1　Results of main parameters of the “two-point method” for symmetrical basic horizontal curve

L_S	β	R	L_C	L_S/L_C	L_{H}	$L_{\mathrm{H}}/L_{\mathrm{HA}}$	N_{D}
0	0	1390.915	776.834	0.00	776.834	0.995 0	
20.000	0.007 374 5	1356.029	737.350	0.03	777.350	0.995 6	6
40.000	0.015 138 7	1321.117	697.851	0.06	777.851	0.996 3	6
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
360.000	0.237 704 0	757.244	62.925	5.72	782.925	1.002 8	21
380.000	0.263 334 1	721.517	22.971	16.54	782.971	1.002 8	22
391.489	0.279 252 5	700.959	0	∞	782.978	1.002 8	29

表2　对称基本型平曲线“两点法”L_S=200 m计算过程(β_p=0.1)

Tab. 2　Calculation process of the “two-point method” for symmetrical basic horizontal curve at L_S=200 m (β_p=0.1)

N_{D}	β_p	$f_x(\beta)$	$f_y(\beta)$	β_q	$\Delta_\beta=\lvert\beta_q-\beta_p\rvert$
1	0.100 000 000	0.999 000 463	0.333 0953 14	0.097 079 331	$2.920\ 67\times10^{-3}$
2	0.097 079 331	0.999 057 971	0.333 109 010	0.096 340 856	$7.384\ 75\times10^{-4}$
3	0.096 340 856	0.999 072243	0.333 112 409	0.096 154 162	$1.866\ 94\times10^{-4}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
7	0.096 092 019	0.999 077 027	0.333 113548	0.096 091 256	$7.624\ 83\times10^{-7}$
8	0.096 091 256	0.999 077 042	0.333 113 552	0.096 091 064	$1.927\ 54\times10^{-7}$
9	0.096 091 064	0.999 077 045	0.333 1135 53	0.096 091 015	$4.872\ 78\times10^{-8}$

4.2.2　线形参数特点

(1)存在规律性分布的含3段线元的对称型平曲线族,各曲线不重叠、不交叉。

(2)圆曲线半径R、缓和曲线长L_S均存在理论最小值及最大值;受α、T_S几何条件限制,L_S与R不能同时取整。

(3)平曲线族仅分布于中间宽、两边窄的特定区域范围,其中圆曲线族位于内侧、缓和曲线族位于外侧,圆曲线族占据绝大部分区域。

(4)L_S增加时,平曲线参数均呈规律性变化,其中R、L_C呈减少趋势,平曲线总长L_{H}呈缓慢增加趋势,迭代计算次数呈增加趋势;L_{H}相对变化值在0.5%以内,即其值近似恒定。

表3 对称基本型平曲线"两点法"L_S =200 m计算过程(β_p =4.0)

Tab. 3 Calculation process of the "two-point method" for symmetrical basic horizontal curve at L_S =200 m (β_p=4.0)

N_D	β_p	$f_x(\beta)$	$f_y(\beta)$	β_q	$\Delta_\beta=\lvert\beta_q-\beta_p\rvert$
1	4.000 000 000	0.230 830 968	0.110 482 307	0.859 944 449	$3.140\,06\times10^{0}$
2	0.85 9944 449	0.928 538 573	0.316 135 071	0.290 930 962	$5.690\,13\times10^{-1}$
3	0.290 9309 62	0.991 569 020	0.331 323 495	0.145 645 470	$1.452\,85\times10^{-1}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
12	0.096 091 827	0.999 077 031	0.333 113 549	0.096 091 208	$6.190\,96\times10^{-7}$
13	0.096 091208	0.999 077 043	0.333 1135 52	0.096 091 051	$1.565\,06\times10^{-7}$
14	0.096 091 051	0.999 077 046	0.333 113 553	0.096 091 012	$3.956\,44\times10^{-8}$

4.3 非对称基本型计算结果

4.3.1 圆曲线半径理论值

依据式(20)~(21),采用"夹逼法"确定圆曲线理论最小半径R_{min0}(见表4)、理论最大半径R_{max0}。β_1初始边界为β_{1min}=0、$\beta_{1max}=\alpha$=0.610 865 238,每次计算均依据R_1与R_2的大小关系(见表4"GL"列)对β_{1min}或β_{1max}进行替换,逐渐缩减"夹逼"范围;本示例分别经过23次、26次逼近计算,获得R_{min0}=643.178 m、R_{max0}=1164.917 m,计算精度$\Delta_R<1.0\times10^{-5}$。

表4 非对称基本型平曲线"两点法"圆曲线理论最小半径R_{min0}计算过程

Tab. 4 Calculation process of the theoretical minimum radius Rmin0 of the "two-point method"" circular curve of asymmetric basic horizontal curve

N_D	β_{1min}	β_{1max}	β_1	β_2	R_1	GL	R_2	$\Delta_R=\lvert R_1-R_2\rvert$	β_1替换
1	0	0.610 865 238	0.305 432 619	0.305 432 619	696.7366 4	>	589.881 71	$1.068\,549\times10^{-2}$	β_{1min}
2	0.305 432 619	0.610 8652 38	0.458 148 929	0.152 716 310	598.301 58	<	704.706 65	$1.064\,051\times10^{2}$	β_{1max}
3	0.305 432 619	0.458 148 929	0.381 790 774	0.229 074 464	643.883 63	>	642.354 75	$1.528\,881\times10^{0}$	β_{1min}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
21	0.382 892 407	0.382 892 990	0.382 892 698	0.227 972 540	643.177 94	<	643.178 23	$2.963\,525\times10^{-4}$	β_{1max}
22	0.382 892 407	0.382 892 698	0.382 892 553	0.227 972 685	643.178 03	<	643.178 12	$9.420\,483\times10^{-5}$	β_{1max}
23	0.382 892 407	0.382 892 553	0.382 892 480	0.227 972 758	643.1780 8	>	643.178 07	$6.868\,999\times10^{-6}$	(结束)

4.3.2 其他参数计算结果

采用"改进双迭代法"的计算结果如表5所示,表中L_{HA}为平曲线总长的平均值。以R=900 m为例,表6列出了"改进双迭代法"的部分计算过程,其中N_D为"双迭代"轮回数,N_{D1}、N_{D2}分别为每个迭代轮回的两次迭代次数。

表5 非对称基本型平曲线"两点法"主要参数计算结果(改进双迭代法)

Tab. 5 Calculation results of main parameters of the "two-point method" for asymmetric basic horizontal curve (improved double iteration method)

R	β_1	β_2	α_C	L_{S1}	L_{S2}	L_C	L_H	L_H/L_{HA}
R_{min0}	0.382 892 4	0.227 972 8	0	492.54	293.25	0	785.790	1.002 4
660	0.363 467 7	0.216 248 6	0.031 148 9	479.78	285.45	20.558	785.784	1.002 4
680	0.341 834 2	0.202 829 0	0.066 202 0	464.89	275.85	45.017	785.759	1.002 4
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
900	0.173 403 1	0.087 230 4	0.350 2318	312.13	157.01	315.209	784.349	1.000 6
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1 140	0.067 566 4	0.006 614 7	0.536 684 1	154.05	15.08	611.820	780.953	0.996 3
1 160	0.0607 86 3	0.001 2845	0.548 794 4	141.02	2.98	636.602	780.602	0.995 8
R_{max}	0.059 155 8	0	0.551 709 4	137.82	0	642.696	780.519	0.995 7

平曲线族及主要参数如图8所示。

4.3.3 线形参数特点

(1) 存在规律性分布的含3段线元的非对称型平曲线族,各曲线不重叠、不交叉。

(2) 仅当比值$f_{T_S}=T_{S_1}/T_{S_2}$在(0.5,2.0)范围内才可设置基本型平曲线,且圆曲线半径R及L_{S_1}、L_{S_2}均存在理论最小值与理论最大值;受T_{S_1}、T_{S_2}及α限制,L_{S_1}、L_{S_2}与R不能同时取整。

(3) 与对称型平曲线相似,非对称型平曲线族亦仅分布在中间宽、两边窄的特定区域范围内,圆曲

表6　非对称基本型平曲线“两点法”R=900 m计算过程(改进双迭代法)

Tab. 6　Calculation process of the “two-point method” for asymmetric basic horizontal curve at R=900 m (improved double iteration method)

N_{D}	β_{1p}、c_1、c_3	N_{D1}	β_{2p}	β_{2q}	Δ_{β_2}	β_{2q}、c_4、c_5	N_{D2}	$\beta_{1\mathrm{m}}$	β_{1q}	$\Delta_{\beta_{1q}}$
1	(令β_{1p}=0.25α)	1	0.152 716 3	0.128 737 8	0.023 978 5	β_{2q}=0.104 790 9	1	0.152 716 3	0.155 692 4	0.002 976 1
	β_{1p}=0.152 716 3	2	0.128 7378	0.116 760 8	0.011 9770	c_4=0.995 403 0	2	0.155 692 4	0.157 180 6	0.001 488 2
	c_1=1.012 182 6	3	0.116 760 8	0.110 775 0	0.005 985 8	c_5= 0.158 536 0	3	0.157 180 6	0.157 924 8	0.000 744 2
	c_3=0.104 752 4	19	0.104 790 9	0.104 790 8	0.000 000 1		16	0.158 668 8	0.158 668 9	0.000 000 1
	第1次双迭代计算结果:β_{1p}= 0.152 716 31、β_{1q}=0.158 668 95,$\Delta_{\beta_1}=\lvert\Delta_{\beta_{1q}}-\Delta_{\beta_{1p}}\rvert$=5.953×$10^{-3}$,需继续迭代计算									
2	($\beta_{1p}=\beta_{1q}$)	1	0.158 668 9	0.129 182 4	0.029 486 4	β_{2q}=0.099 744 3	1	0.158 668 9	0.160 788 4	0.002 119 4
	β_{1p}=0.158 668 9	2	0.129 182 4	0.114 458 2	0.014 724 2	c_4=0.998 153 7	2	0.160 788 4	0.161 848 2	0.001 059 8
	c_1=1.009 029 2	3	0.114 458 2	0.107 100 0	0.007 358 1	c_5= 0.162 7641	3	0.161 848 2	0.162 378 1	0.000 529 9
	c_3=0.099 711 1	19	0.099 744 4	0.099 744 3	0.000 000 1		16	0.162 907 8	0.162 907 9	0.000 000 1
	第2次双迭代计算结果:β_{1p}=0.158 668 90、β_{1q}=0.162 908 09,$\Delta_{\beta_1}=\lvert\Delta_{\beta_{1q}}-\Delta_{\beta_{1p}}\rvert$=4.239×$10^{-3}$,需继续迭代计算									
⋮										
33	($\beta_{1p}=\beta_{1q}$)	1	0.173 403 0	0.130 262 9	0.043 140 1	β_{2q}=0.087 230 4	1	0.173 403 0	0.173 403 0	0.000 000 1
	β_{1p}=0.173 403 0	2	0.130 262 9	0.108 735 9	0.021 527 0	c_4=1.005 005 9	2	0.173 403 0	0.173 403 1	0
	c_1=1.001 268 0	3	0.108 735 9	0.097 980 8	0.010 755 1	c_5=0.173 229 4				
	c_3=0.087 208 2	19	0.087 230 5	0.087 230 4	0.000 000 1					
	第33次双迭代计算结果:β_{1p}=0.173 402 97、β_{1q}=0.173 403 07,$\Delta_{\beta_1}=\lvert\Delta_{\beta_{1q}}-\Delta_{\beta_{1p}}\rvert$=1.002×$10^{-7}$,需继续迭代计算									
34	($\beta_{1p}=\beta_{1q}$)	1	0.173 403 1	0.130 262 9	0.043 140 2	β_{2q}=0.087 230 4	1	0.173 403 1	0.173 403 1	0
	β_{1p}=0.173 403 1	2	0.130 262 9	0.108 735 9	0.021 527 1	c_4=1.005 005 9				
	c_1=1.001 268 0	3	0.108 735 9	0.097 980 7	0.010 755 1	c_5=0.173 229 5				
	c_3=0.087 208 1	19	0.087 230 4	0.087 230 4	0					
	第34次双迭代计算结果:β_{1p}=0.173 403 07、β_{1q}=0.173 403 14,$\Delta_{\beta_1}=\lvert\Delta_{\beta_{1q}}-\Delta_{\beta_{1p}}\rvert$=7.000×$10^{-8}$,满足精度要求,计算结束									

注:限于篇幅,每个“双迭代”轮回中未列出第4步至倒数第2步的中间计算结果。

图8　非对称基本型平曲线“两点法”设计平曲线族及主要参数

Fig. 8　Main parameters and horizontal curve family of the “two-point method” design for asymmetric basic horizontal curve

线族位于内侧、缓和曲线族位于外侧,圆曲线族占据绝大部分区域;但平曲线族分布形状不对称,中间较宽区域偏向于总切线长较短的一侧。

(4) 当R增加时,平曲线参数均呈现规律性变化,其中L_C呈增加趋势,L_{S_1}、L_{S_2}、L_{H}呈减少趋势,L_{H}相对变化在0.5%以内,即其近似为恒定值。

(5) L_{S_1}、L_{S_2}呈现同步变化趋势,即:若L_{S_1}(或L_{S_2})增大,则L_{S_2}(或L_{S_1})亦增加。

(6) 总切线长相对较大的一侧,其缓和曲线长亦较长;反之,总切线长相对较小的一侧,其缓和曲线长相对较短。

5　工程应用对比

图9a为某二级公路K6+959.85~K7+744.434段采用导线法的平面线形设计图,其中JD13为对称基本型、JD14为非对称基本型,两者构成S型平曲线,点A、B、C分别为平曲线ZH点(直缓点)和HZ点

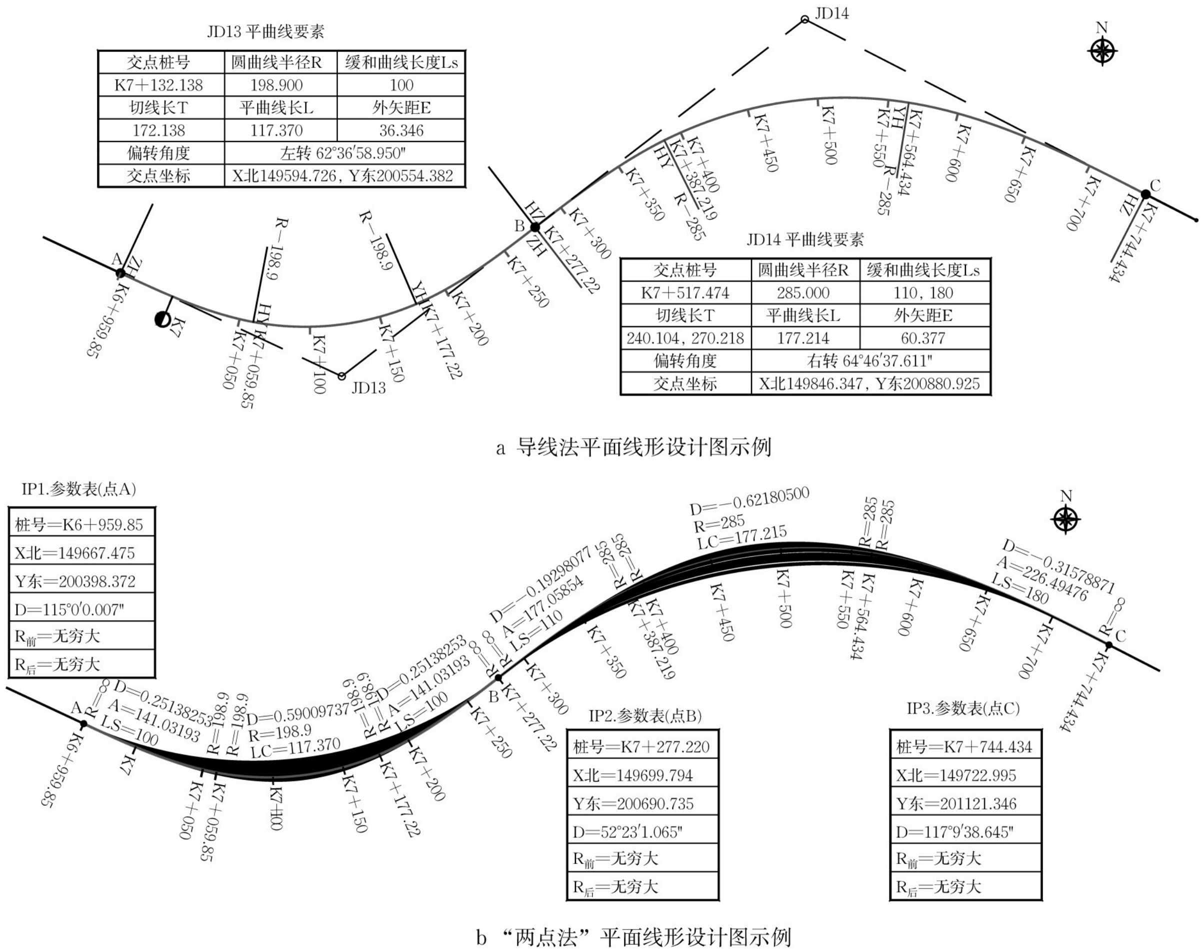

图9 某二级公路平面线形设计对比分析

Fig. 9 Comparison and analysis of horizontal alignment drawing of second-class highway

(缓直点),点B为S型曲线拐点。作为对比,图9b为采用“两点法”进行相应平面线形布设的过程示意图。

由图可知:①由ZH(直缓)、HZ(缓直)两点可构建“缓和曲线+圆曲线+缓和曲线”3段线元组成的系列平曲线族;②平曲线族各曲线参数及几何分布规律,构成两端狭窄、中间宽厚的“特定区域”,线形布设灵活多变、便于比选优选。

6 结论

(1)仅需起点(直缓点)与终点(缓直点)两点即可确定由“第1缓和曲线+圆曲线+第2缓和曲线”3段线元组成的基本型平曲线;在顺次进行平面线形布设时,仅需拟定当前设计段的终点即可。

(2)仅当平曲线总切线长的比值在(0.5,2.0)范围内时,圆曲线半径、缓和曲线长度才有理论解;对称基本型的总切线长比值始终为1,故总有理论解。

(3)线形设计成果为3段线元组成的系列“平曲线族”而非单条曲线,各曲线互不交叉重叠,且分布在两侧狭窄、中间宽厚的“特定区域”内。

(4)圆曲线半径、缓和曲线长度、圆曲线长度及平曲线总长,均存在理论最小值、最大值;平曲线总长的变化值在0.5%以内,其平均值近似为固定值。

(5)当圆曲线半径增加时,圆曲线长呈增加趋势,而缓和曲线长呈减少趋势,平曲线总长亦呈减少趋势但变化很小;第1、第2缓和曲线长度具有同步增减趋势,总切线长较大一侧对应的缓和曲线长亦较长。

(6)“两点法”突显坐标点位的控制作用,呈规律性分布的“平曲线族”和“特定区域”有益于路线优选、线形拟合重构和智能化路线设计。

作者贡献声明:

李玉华:提出两点法设计基本思想、计算原理,设计计算软件编制,论文撰写。

王奥凯:工程应用示例,软件调试。

刘佳音:计算原理验证,设计方法检验。

马洋洋：软件调试，文字校对。

吴树铭：软件调试。

参考文献：

[1] 许金良，程建川，粟志海. 道路勘测设计[M].5版. 北京：人民交通出版社，2018.
XU Jinliang，CHENG Jianchuan，LI Zhihai. Road survey and design [M] 5th ed. Beijing：China Communications Press，2018.

[2] 吴国雄. 公路平面线形曲线型设计方法综述[J]. 公路，1996(9)：21.
WU Guoxiong. A summary of curve design method for highway horizontal alignment[J]. Highway，1996 (9)：21.

[3] 宋文. “附合导线法”设计匝道平面线形[J]. 公路，1991(9)：11
SONG Wen. Design of horizontal alignment for interchange ramps by “connecting traverse method” [J]. Highway，1991(9)：11.

[4] 丁建明，李方. 公路平面线形设计的五单元导线法[J]. 东南大学学报，1998，28(2)：155.
DING Jianming，LI Fang. Five-element traverse method for highway horizontal alignment design [J]. Journal of Southeast University，1998，28(2)：155.

[5] 吴国雄. 一种新的公路平面线形曲线型设计方法—综合法[J]. 重庆交通学院学报，1996，15(增刊)：59.
WU Guoxiong. A new curve method for designing highway horizontal alignment - comprehensive method [J]. Journal of Chongqing Jiaotong Institute，1996，15(S)：59.

[6] 许金良，杨少伟，徐其福. 互通式立交平面线形控制线元法[J]. 西安公路交通大学学报，1997，17(4)：5.
XU Jinliang，YANG Shaowei，XU Qifu. The controlled segmentary element design method of interchange [J]. Journal of Xi'an Highway University，1997，17(4)：5.

[7] 李玉华，孙依人，刘佳音，等. 路线平面线形设计计算的两点线元法原理[J]. 同济大学学报(自然科学版)，2021，49(4)：507.
LI Yuhua，SUN Yiren，LIU Jiayin，*et al*. Principle of two-point segmentary element method for horizontal alignment design and calculation [J]. Journal of Tongji University (Natural Science)，2021，49(4)：507.

[8] LI W，PU H. A method for automatically recreating the horizontal alignment geometry of existing railways [J]. Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering，2019，34 (1)：71.

[9] CAMACHO-TORREGROSA F J，PEREZ-ZURIAGA A M，CAMPOY-UNGRIA J M，*et al*. Use of heading direction for recreating the horizontal alignment of an existing road [J]. Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering，2015，30 (4)：282.

[10] 缪鹍，詹振炎. 基于直线约束的道路线形设计通用方法[J]. 中国公路学报，2002，15(3)：15.
MIU Kun，ZHAN Zhenyan. Universal method for highway's horizontal alignment based on restrictions of straight line [J]. China Journal of Highway and Transport，2002，15(3)：15.

[11] 吴国雄，陈欣斗. 道路立交平面线形圆心连线闭合导线设计法[J]. 重庆交通学院学报，2003，22(4)：20.
WU Guoxiong，CHEN Xindou. Closed-traverse method of center-center lines of circles in horizontal alignment design of road interchange [J]. Journal of Chongqing Jiaotong University，2003，22(4)：20.

[12] 张航，韦金君，张肖磊. 道路平面线形拟合方法比较研究[J]. 武汉理工大学学报(交通科学与工程版)，2018，42(4)：594.
ZHANG Hang，WEI Jinjun，ZHANG Xiaolei. Comparative study on road plane alignment fitting methods [J]. Journal of Wuhan University of Technology (Transportation Science & Engineering)，2018，42(4)：594.

[13] BOSURGI G，D' ANDREA A. A polynomial parametric curve (PPC-CURVE) for the design of horizontal geometry of highways [J]. Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering，2012，27(4)：303.

[14] 徐进，罗庆，毛嘉川，等. 轨迹-速度协同控制的山区公路平面线形设计方法[J]. 中国公路学报，2013，26(4)：43.
XU Jin，LUO Qing，MAO Jiachuan，*et al*. Method for horizontal geometry design of mountainous roads based on trajectory-speed cooperative control [J]. China Journal of Highway and Transport，2013，26(4)：43.

[15] 于玲，秦翔，包龙生. 基于遗传算法的山区高速公路平面线形优化设计方法[J]. 公路交通科技，2018，165(9)：175.
YU Ling，QIN Xiang，BAO Longsheng. Optimization design method for horizontal alignment of mountain expressway based on genetic algorithm [J]. Journal of Highway and Transportation Research and Development，2018，165 (9)：175.

[16] 韩元利，靖仕元，陈燕平. 铁路智能选线过程中平曲线最优配置模型研究[J]. 铁道工程学报，2021，275(8)：1.
HAN Yuanli，JING Shiyuan，CHEN Yanping. Rsearch on the optimal parametric configuration of horizontal curve on railway intelligent design [J]. Journal of Railway Engineering Society，2021，275(8)：1.

[17] 李玉华，赵延庆，周长俊，等. 一种道路路线平面线形设计的“两点”法：ZL201810255466.4 [P].2022-04-08.
LI Yuhua，ZHAO Yanqing，ZHOU Changjun，*et al*. A “two-point method” for designing horizontal alignment of road routes：ZL201810255466.4 [P]. 2022-04-08.

[18] 刘也嘉. 道路平面线形设计计算的两点法[D]. 大连：大连理工大学，2018.
LIU Yejia. Two-point method for design and calculation of road horizontal alignment [D]. Dalian：Dalian University of Technology，2018.