第 53 卷第 2 期
2025 年 2 月

同济大学学报(自然科学版)
JOURNAL OF TONGJI UNIVERSITY(NATURAL SCIENCE)

Vol. 53 No. 2
Feb. 2025

文章编号：0253-374X(2025)02-0306-10 **DOI**：10. 11908/j. issn. 0253-374x. 23170

基于混合变动专家权重的模糊零和博弈多目标规划模型

丁雪枫[1]，杨育豆[1,2]

（1. 上海大学 管理学院，上海 200444；2. 奥克兰大学 商学院，新西兰 奥克兰 1142）

摘要：针对现有模糊零和博弈难以适应环境复杂度变化及忽视收益矩阵构造的不足，提出了一种基于混合动态专家集成权重确定模型的T阶球形模糊零和博弈多目标求解方法，以帮助博弈方在资源总量保持相对恒定且局中各方追求自身利益最大化的情境下选择最优竞争策略。首先，提出了一种同时考虑客观个体和主观评价信息的混合变动专家集成权重计算模型，该机制下得到的专家权重会随专家的主观评价信息而变化，更接近实际情况。其次，利用加权平均法搭建了T阶球形模糊零和博弈多目标规划模型，该方法不受策略数量的影响，且求得的最优混合策略能反映博弈各方竞争策略的具体可行性和分歧程度。最后，通过实例计算和对比分析，验证了所提出方法的实用性和优越性。结果表明，所提出的模型具有决策效率高、计算复杂度低、受方案数量影响小的特点，且得到的概率形式的混合解可以有效地反映策略间的差异程度，当最优策略失效时可提供替代建议，有助于避免重复决策，浪费决策资源。

关键词：零和博弈；T阶球形模糊集；专家可信度量表；Hausdorff距离；混合变动专家集成权重

中图分类号：C934 **文献标志码**：A

Fuzzy Zero-Sum Game Multi-Objective Programming Model Based on Hybrid Variable Expert Integration Weights

DING Xuefeng[1]，*YANG Yudou*[1,2]

（1. School of Management，Shanghai University，Shanghai 200444，China；2. Business School，University of Auckland，Auckland，New Zealand 1142）

Abstract：Existing studies on fuzzy zero-sum games fail to account for variations in environmental complexity and overlook the specific process of construction payoff matrices. To address these limitations，a multi-objective programming model for solving T-spherical fuzzy zero-sum game based on hybrid variable experts integration weights is proposed in this paper，which is able to help players choose the optimal competition strategy when the total amount of resources remains relatively constant and all parties in the game pursue the maximization of their own interests. First，a novel dynamic expert integration weight calculation model，considering objective individual and subjective evaluation information simultaneously，is devised. The expert weights obtained by the above model can vary with subjective evaluation information provided by experts，which are closer to the actual practices. Then，in virtue of the weighted average method，a multi-objective programming framework for T-spherical fuzzy zero-sum game is formulated to determine the optimal mixed strategies for players，which can present the specific feasibility and divergence degree of each competitive strategy and be less impacted by the number of strategies. Finally，an illustrative example and several comparative analyses validate the reasonability and effectiveness of the proposed model. The results demonstrate that the proposed model offer higher decision-making efficiency，lower computational complexity，and reduced sensitivity to the number of alternatives. Additionally，the hybrid solution，expressed as probabilities，can effectively reflect the differences between alternatives. When the optimal strategy fails，alternative suggestions can be provided，helping to avoid redundant decision-making and minimizing resource wastage.

Keywords：zero-sum game；T-spherical fuzzy set；expert credibility scale；Hausdorff distance；hybrid variable expert integration weights

收稿日期：2023-05-26
基金项目：教育部人文社会科学研究规划基金(21YJA630010)
第一作者：丁雪枫，副教授，管理学博士，主要研究方向为不确定性理论与推理，决策理论与方法，商业生态链管理等。E-mail：athena_tju@sina.com
通信作者：杨育豆，硕士生，主要研究方向为碳中和路径优化，模糊决策，竞争决策理论与方法等。E-mail：Prinber@shu.edu.cn

论文拓展介绍

零和博弈是一种在资源总量保持相对恒定、局中各方追求自身利益最大化的情形下,解决主体间利益冲突的完全竞争博弈方法,其结果不但能够反映任意两种竞争策略在实施概率上的具体差异,还具有计算复杂度低的特征。然而,受环境波动干扰、信息传递壁垒等影响,博弈各方很难准确评估出各策略的收益值。因而,如何将策略收益的隐形不确定性融入到零和博弈模型搭建中至关重要。

模糊数论已被证明在显性化不确定性方面具备突出优势[1-2]。Zadeh[3]首先提出了模糊集(fuzzy sets,FSs)的概念。但现实中,语言否定并不总是与逻辑否定相一致,对隶属的支持并不一定被当作1的补集[4],为此,Mahmood 等[5]提出了球形模糊集(spherical fuzzy sets, SFSs)的概念。SFSs可更清晰地表达模糊信息,但在隶属度、中立度和非隶属度平方之和大于1时仍会失效。为解决上述问题,Mahmood 等[5]又提出了 T 阶球形模糊集(T-spherical fuzzy sets,T-SFSs)概念,其基于一个变动的构造参数可实现刻画具备任意隶属度、中立度和非隶属度的复杂模糊环境。当前虽有针对模糊环境下零和博弈的研究[1-2],但其使用的模糊语言主要集中在基础模糊语言,鲜有研究兼顾策略隶属度、中立度和非隶属度的零和博弈框架,这限制了零和博弈的信息表达度及决策结果的有效性。因此,探究 T 阶球形模糊(T-spherical fuzzy,T-SF)环境下零和竞争博弈模型的构建对于丰富模糊零和博弈理论至关重要。

此外,博弈各方收益矩阵的准确度决定了结果的合理与否。现有研究缺少对收益矩阵的构造过程[1-2],降低了结果的可靠性。专家集成评价法从整体角度做出可靠决定[6],既能补充收益矩阵的构造过程,还能得到更贴进现实的收益矩阵。这其中,专家权重确定的准确性对最终结果具有直接影响。本文通过整合专家信度量表来反映专家的评估能力和信度,并定义了可以更有效反映专家间主观评价信息差异程度的T-SF-Hausdorff距离,进而提出了一种混合动态专家权重确定机制。

本文旨在考虑混合变动专家集成权重的同时搭建T-SF零和博弈多目标规划求解模型,主要贡献在于:① 创新性地运用T-SFSs将零和博弈的搭建和求解理论拓宽到三维空间,赋予决策者更大的自由度,能够借助一个可变动的构造参数有效刻画更为复杂的动态模糊零和博弈环境;② 打破经典Hausdorff距离的计算壁垒,首次提出三维T-SF-Hausdorff距离公式,并将其与所提出的可信度分析量表整合设计了一个混合动态专家集成评价权重确定方法,能够同时反映专家客观个体信息和主观评价信息,所得到的专家权重更加合理和贴近真实;③ 搭建的模糊零和博弈求解机制能够描述各策略的博弈行为特征,受策略数量限制较小,具备高效、低复杂度、低计算负担的良好特性,与简单排序结果相比,概率形式的模糊博弈混合解可以更好地凸显各个策略间的具体差异程度。

1　预备知识

1.1　T阶球形模糊集

定义 1[5]　一个在非空不变集合 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$上的T阶球形模糊集A可表示为

$$A=\{x,\mu_A(x),\sigma_A(x),\upsilon_A(x)|x\in X\}\tag{1}$$

其中,μ,σ,υ: $X\to[0,1]$分别为$x\in X$的隶属度、中立度和非隶属度,受限于$(\mu_A(x))^t+(\sigma_A(x))^t+(\upsilon_A(x))^t\leqslant 1$, t 为正整数。函数 $\pi_A(x)=(1-(\mu_A(x))^t-(\sigma_A(x))^t-(\upsilon_A(x))^t)^{1/t}$ 为 T-SFSA 的犹豫度,则称三元组$a=(\mu_a,\sigma_a,\upsilon_a)$为一个$T$阶球形模糊数(T-spherical fuzzy number,T-SFN)。

定义 2[5]　设 $a=(\mu_a,\sigma_a,\upsilon_a)$为任意一个 T-SFN,则$a$的得分函数$S(a)$为

$$S(a)=(\mu_a)^t-(\upsilon_a)^t\tag{2}$$

a的精确度函数$H(a)$为

$$H(a)=(\mu_a)^t+(\sigma_a)^t+(\upsilon_a)^t\tag{3}$$

定义 3[5]　设 $a_1=(\mu_1,\sigma_1,\upsilon_1)$ 和 $a_2=(\mu_2,\sigma_2,\upsilon_2)$为任意2个T-SFNs,则$a_1$和$a_2$间的比较规则如下:

(1)若$S(a_1)>S(a_2)$,则$a_1>a_2$;

(2)若$S(a_1)=S(a_2)$,$H(a_1)>H(a_2)$,则$a_1>a_2$;

(3)若$S(a_1)=S(a_2)$,$H(a_1)=H(a_2)$,则$a_1=a_2$;

(4)若$S(a_1)=S(a_2)$,$H(a_1)<H(a_2)$,则$a_1<a_2$。

定义 4[7]　设 $a=(\mu,\sigma,\upsilon)$,$a_1=(\mu_1,\sigma_1,\upsilon_1)$和$a_2=(\mu_2,\sigma_2,\upsilon_2)$为任意3个T-SFNs,那么$a$、$a_1$和$a_2$间的运算规则如下:

(1) $a_1\oplus a_2=\langle((\mu_1)^t|+(\mu_2)^t-(\mu_1)^t\times(\mu_2)^t)^{1/t},\sigma_1\sigma_2,\upsilon_1\upsilon_2\rangle$;

(2) $a_1\otimes a_2=\langle\mu_1\mu_2,((\sigma_1)^t+(\sigma_2)^t-(\sigma_1)^t\times(\sigma_2)^t)^{1/t},((\upsilon_1)^t+(\upsilon_2)^t-(\upsilon_1)^t\times(\upsilon_2)^t)^{1/t}\rangle$;

(3) $\lambda a=\langle(1-(1-(\mu)^t)^\lambda)^{1/t},\sigma^\lambda,\upsilon^\lambda\rangle$, $\lambda>0$;

(4) $a^{\lambda}=\langle\mu^{\lambda},(1-(1-(\sigma)^{t})^{\lambda})^{1/t},(1-(1-(\upsilon)^{t})^{\lambda})^{1/t}\rangle,\ \lambda>0$;

(5) $a^{c}=(\upsilon,\ \sigma,\mu)$。

定义5[8] 设$\tilde{a}_k=\langle\mu_k,\sigma_k,\upsilon_k\rangle(k=1,2,\cdots,n)$为具有权重向量$\boldsymbol{w}=(w_1,w_2,\cdots,w_n)^{\mathrm{T}}$的一组T-SFNs,$0\leqslant w_k\leqslant 1$且$\sum_{k=1}^{n}w_k=1$,则$T$阶球形模糊加权平均(T-SFWA)算子为

$$\begin{aligned}&\text{T-SFWA}(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,\cdots,\tilde{a}_n)=\\&w_1\tilde{a}_1\oplus w_2\tilde{a}_2\oplus\cdots\oplus w_n\tilde{a}_n=\\&\left\langle(1-\prod_{k=1}^{t}(1-\mu_k^{t})^{w_k})^{1/t},\ \prod_{k=1}^{t}\sigma_k^{w_k},\ \prod_{k=1}^{t}\upsilon_k^{w_k}\right\rangle\end{aligned}\tag{4}$$

1.2 Hausdorff距离

Nadler[9]首先提出采用Hausdorff距离来度量两个非空紧子集A和B在一个巴拿赫空间S中的位置相似程度。Hausdorff距离是Hamming距离和Euclidean距离的广义形式,能够反映两集合间的最大不匹配度,具有广阔的应用范围。

定义6[9] 设A和B为任意在一个巴拿赫空间S中的两个非空紧子集,则A和B间的Hausdorff距离为 $H(A,B)=\max\{H^{*}(A,B),H^{*}(B,A)\}$, 若$S\in\mathbf{R}$,对于任意两个区间$A=[a_1,a_2]$和$B=[b_1,b_2]$, 有 $H(A,B)=\max\{|a_1-b_1|,|a_2-b_2|\}$。

1.3 零和博弈

零和博弈是由两个博弈方组成的严格竞争系统,其中一位博弈方的损失由另一位博弈方的收益弥补,即两位博弈方的收益之和为零。假设博弈方Ⅰ和博弈方Ⅱ构成了一个零和博弈,博弈方Ⅰ追求最大收益,博弈方Ⅱ追求最小损失,$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$为博弈方Ⅰ的收益矩阵,那么博弈方Ⅱ的收益矩阵为$-A$。

定义7[10] 若在R_{+}^{m}上的向量$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$满足概率条件$\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=1$,则$\boldsymbol{x}$为博弈方Ⅰ的混合策略集,其中,$\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}=(1,1,\cdots,1)$为一个全1向量,$x_1,x_2,\cdots,x_n\in[0,1]$为博弈方Ⅰ选择纯策略$s_i\in S^{m}$的概率,$S^{m}$是博弈方Ⅰ的纯策略空间。

定义8[10] 若在R_{+}^{m}上的向量$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$满足概率条件$\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=1$,则$\boldsymbol{y}$为博弈方Ⅱ的混合策略集,其中,$\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}=(1,1,\cdots,1)$为一个全1向量,$y_1,y_2,\cdots,y_n\in[0,1]$为博弈方Ⅱ选择纯策略$s_j\in S^{n}$的概率,$S^{n}$是博弈方Ⅱ的纯策略空间。

令X和Y分别是所有$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$和$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$的集合。

定义9[10] 若博弈方Ⅰ和博弈方Ⅱ同时选择$\boldsymbol{x}\in X$和$\boldsymbol{y}\in Y$,则博弈方Ⅰ的预期收益为$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_ia_{ij}y_j$。根据二人零和博弈理论,博弈方Ⅱ的预期收益为$-\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$。

定义10[10] 在一个竞争博弈中,若对于任意的混合策略$\boldsymbol{x}$和$\boldsymbol{y}$有$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}^{*}\leqslant\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}*}\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}^{*}$和$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}*}\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}^{*}\leqslant\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$,则$\boldsymbol{x}^{*}\in X$和$\boldsymbol{y}^{*}\in Y$分别为博弈方Ⅰ和博弈方Ⅱ的最优策略。

原始对偶线性规划模型求解博弈方Ⅰ和Ⅱ的最优策略$\boldsymbol{x}^{*}$和$\boldsymbol{y}^{*}$分别为

$$\begin{aligned}&\max\ \omega\\&\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{i=1}^{m}a_{ij}x_i^{*}\geqslant\omega,\ \ j=1,2,\cdots,n\\\sum_{i=1}^{m}x_i^{*}=1\\x_i^{*}\geqslant 0,\ \ i=1,2,\cdots,m\end{cases}\end{aligned}\tag{5}$$

和

$$\begin{aligned}&\min\ \tau\\&\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}y_j^{*}\leqslant\sigma,\ \ i=1,2,\cdots,m\\\sum_{j=1}^{n}y_j^{*}=1\\y_j^{*}\geqslant 0,\ \ j=1,2,\cdots,n\end{cases}\end{aligned}\tag{6}$$

基于冯诺伊曼的最大最小理论和单纯形法求解上述对偶规划模型可求得博弈方Ⅰ的最优策略$\boldsymbol{x}^{*}=(x_1^{*},x_2^{*},\cdots,x_m^{*})$、博弈方Ⅱ的最优策略$\boldsymbol{y}^{*}=(y_1^{*},y_2^{*},\cdots,y_n^{*})$和博弈值$V=\omega=\tau$。

2 基于混合变动专家集成权重的$\boldsymbol{T}$阶球形模糊零和博弈多目标规划模型

2.1 问题描述

对于一个零和博弈竞争问题,假设有限集$\delta=\{\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_n\}$和$\zeta=\{\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n\}$分别是博弈方Ⅰ和博弈方Ⅱ的策略集合。为了求解T-SF环境下博弈方完全竞争策略选择的零和博弈模型,首先邀请q位专家组成一个评价委员会,综合考虑各个策略的成本和效益属性,分别使用T-SFSs语言对博弈方Ⅰ和Ⅱ策略的相对优势进行评价,得到q个评价矩阵,

第k位专家的评价矩阵为

$$A^k=(a_{ij}^k)_{m\times n}=\begin{bmatrix}(s_{11}^k,f_{11}^k,d_{11}^k) & (s_{12}^k,f_{12}^k,d_{12}^k) & \cdots & (s_{1n}^k,f_{1n}^k,d_{1n}^k)\\ (s_{21}^k,f_{21}^k,d_{21}^k) & (s_{22}^k,f_{22}^k,d_{22}^k) & \cdots & (s_{2n}^k,f_{2n}^k,d_{2n}^k)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ (s_{m1}^k,f_{m1}^k,d_{m1}^k) & (s_{m2}^k,f_{m2}^k,d_{m2}^k) & \cdots & (s_{mn}^k,f_{mn}^k,d_{mn}^k)\end{bmatrix};$$

然后,假设$w_k(k=1,2,\cdots,q)$是第k位专家的初始权重,满足$w_k\in[0,1]$,$\sum_{k=1}^{t}w_t=1$。通过提出一种度量T-SFNs间差异程度的Hausdorff距离来计算变动专家权重$\tilde{w}_k(k=1,2,\cdots,q)$,并依此利用T-SFWA算子聚合$q$个评价矩阵求得综合专家评价收益矩阵;最后,利用多目标规划法求得博弈方I和博弈方II组成的零和博弈结果概率值,并得到最优混合策略解。

2.2 模型构建

2.2.1 基于变动专家权重分配方法计算动态专家集成权重

(1)借助可信度分析量表确定初始专家集成权重

参考文献[2],选择客观专家可信度量文献表,并根据式(7)、(8),计算第k位专家的初始权重。

$$G_k=E_1^k+E_2^k+\cdots+E_6^k \tag{7}$$

$$w_k=\frac{G_k}{\sum_{k=1}^{t}G_k} \tag{8}$$

式中:G_k为第k位专家的可信度综合值;E为专家可信度指标赋值。

(2)借助T-SF-Hausdorff距离计算变动专家集成权重

定义11 设$\tilde{A}$和$\tilde{B}$为定义在有限集$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$的任意两个T-SFNs,$I_{\tilde{A}}(x_i)$和$I_{\tilde{B}}(x_i)$为$[0,1]$上的两个子区间,有$I_{\tilde{A}}(x_i)=\left[\mu_{\tilde{A}}^t(x_i),1-\sigma_{\tilde{A}}^t(x_i),1-\upsilon_{\tilde{A}}^t(x_i)\right]$, $I_{\tilde{B}}(x_i)=\left[\mu_{\tilde{B}}^t(x_i),1-\sigma_{\tilde{B}}^t(x_i),1-\upsilon_{\tilde{B}}^t(x_i)\right]$, $i=1,2,\cdots,n$, t为正整数,则$\tilde{A}$和$\tilde{B}$间的T-SF-Hausdorff距离$H(I_{\tilde{A}}(x_i),I_{\tilde{B}}(x_i))$见公式(9),$\tilde{A}$和$\tilde{B}$间的归一化Hausdorff距离见公式(10)。

$$\begin{aligned}d_H(\tilde{A},\tilde{B})=&H(I_{\tilde{A}}(x_i),I_{\tilde{B}}(x_i))=\\&\max\Big\{\left|\mu_{\tilde{A}}^t(x_i)-\mu_{\tilde{B}}^t(x_i)\right|,\\&\left|1-\sigma_{\tilde{A}}^t(x_i)-(1-\sigma_{\tilde{B}}^t(x_i))\right|,\\&\left|1-\upsilon_{\tilde{A}}^t(x_i)-(1-\upsilon_{\tilde{B}}^t(x_i))\right|\Big\}=\\&\max\Big\{\left|\mu_{\tilde{A}}^t(x_i)-\mu_{\tilde{B}}^t(x_i)\right|,\left|\sigma_{\tilde{A}}^t(x_i)-\sigma_{\tilde{B}}^t(x_i)\right|,\\&\left|\upsilon_{\tilde{A}}^t(x_i)-\upsilon_{\tilde{B}}^t(x_i)\right|\Big\}\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}d_{NH}(\tilde{A},\tilde{B})=&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}H(I_{\tilde{A}}(x_i),I_{\tilde{B}}(x_i))=\\&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\max\Big\{\left|\mu_{\tilde{A}}^t(x_i)-\mu_{\tilde{B}}^t(x_i)\right|,\\&\left|\sigma_{\tilde{A}}^t(x_i)-\sigma_{\tilde{B}}^t(x_i)\right|,\left|\upsilon_{\tilde{A}}^t(x_i)-\upsilon_{\tilde{B}}^t(x_i)\right|\Big\}\end{aligned} \tag{10}$$

定理1 设$X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$为一固定集合,则式(10)定义的$\tilde{A}$和$\tilde{B}$间的归一化Hausdorff距离$d_{NH}(\tilde{A},\tilde{B})$具有以下性质:$0\leqslant d_{NH}(\tilde{A},\tilde{B})\leqslant 1$;$d_{NH}(\tilde{A},\tilde{B})$当且仅当$\tilde{A}=\tilde{B}$时;$d_{NH}(\tilde{A},\tilde{B})=d_{NH}(\tilde{B},\tilde{A})$;如果$\tilde{A}\subseteq\tilde{B}\subseteq\tilde{C}$,那么$d_{NH}(\tilde{A},\tilde{B})\leqslant d_{NH}(\tilde{A},\tilde{C})$,$d_{NH}(\tilde{B},\tilde{C})\leqslant d_{NH}(\tilde{A},\tilde{C})$。

证明 显然,$d_{NH}(\tilde{A},\tilde{B})$具有性质(1)~(3),故性质(1)~(3)的证明过程略。

性质(4) 由于$\tilde{A}\subseteq\tilde{B}\subseteq\tilde{C}$,那么对于$\forall x_i\in X$,都有$\mu_{\tilde{A}}^t(x_i)\leqslant\mu_{\tilde{B}}^t(x_i)\leqslant\mu_{\tilde{C}}^t(x_i)$, $\sigma_{\tilde{A}}^t(x_i)\geqslant\sigma_{\tilde{B}}^t(x_i)\geqslant\sigma_{\tilde{C}}^t(x_i)$和$\upsilon_{\tilde{A}}^t(x_i)\geqslant\upsilon_{\tilde{B}}^t(x_i)\geqslant\upsilon_{\tilde{C}}^t(x_i)$成立。由定义11可知:

$$H(I_{\tilde{A}}(x_i),I_{\tilde{B}}(x_i))=\max\Big\{\left|\mu_{\tilde{A}}^t(x_i)-\mu_{\tilde{B}}^t(x_i)\right|,\left|\sigma_{\tilde{A}}^t(x_i)-\sigma_{\tilde{B}}^t(x_i)\right|,\left|\upsilon_{\tilde{A}}^t(x_i)-\upsilon_{\tilde{B}}^t(x_i)\right|\Big\},$$

$$H(I_{\tilde{A}}(x_i),I_{\tilde{C}}(x_i))=\max\Big\{\left|\mu_{\tilde{A}}^t(x_i)-\mu_{\tilde{C}}^t(x_i)\right|,\left|\sigma_{\tilde{A}}^t(x_i)-\sigma_{\tilde{C}}^t(x_i)\right|,\left|\upsilon_{\tilde{A}}^t(x_i)-\upsilon_{\tilde{C}}^t(x_i)\right|\Big\},$$

$$H(I_{\tilde{B}}(x_i),I_{\tilde{C}}(x_i))=\max\Big\{\left|\mu_{\tilde{B}}^t(x_i)-\mu_{\tilde{C}}^t(x_i)\right|,\left|\sigma_{\tilde{B}}^t(x_i)-\sigma_{\tilde{C}}^t(x_i)\right|,\left|\upsilon_{\tilde{B}}^t(x_i)-\upsilon_{\tilde{C}}^t(x_i)\right|\Big\}$$

情形1 当$\left|\mu_{\tilde{A}}^t(x_i)-\mu_{\tilde{C}}^t(x_i)\right|\geqslant\left|\sigma_{\tilde{A}}^t(x_i)-\sigma_{\tilde{C}}^t(x_i)\right|\geqslant\left|\upsilon_{\tilde{A}}^t(x_i)-\upsilon_{\tilde{C}}^t(x_i)\right|$时,根据定义11可知:$H(I_{\tilde{A}}(x_i),I_{\tilde{C}}(x_i))=\left|\mu_{\tilde{A}}^t(x_i)-\mu_{\tilde{C}}^t(x_i)\right|$,且$\left|\sigma_{\tilde{A}}^t(x_i)-\sigma_{\tilde{B}}^t(x_i)\right|\leqslant\left|\sigma_{\tilde{A}}^t(x_i)-\sigma_{\tilde{C}}^t(x_i)\right|\leqslant\left|\mu_{\tilde{A}}^t(x_i)-\mu_{\tilde{C}}^t(x_i)\right|$, $\left|\sigma_{\tilde{B}}^t(x_i)-\sigma_{\tilde{C}}^t(x_i)\right|\leqslant\left|\sigma_{\tilde{A}}^t(x_i)-\sigma_{\tilde{C}}^t(x_i)\right|\leqslant\left|\mu_{\tilde{A}}^t(x_i)-\mu_{\tilde{C}}^t(x_i)\right|$, $\left|\upsilon_{\tilde{A}}^t(x_i)-\upsilon_{\tilde{B}}^t(x_i)\right|\leqslant\left|\upsilon_{\tilde{A}}^t(x_i)-\upsilon_{\tilde{C}}^t(x_i)\right|\leqslant\left|\mu_{\tilde{A}}^t(x_i)-\mu_{\tilde{C}}^t(x_i)\right|$, $\left|\upsilon_{\tilde{B}}^t(x_i)-\upsilon_{\tilde{C}}^t(x_i)\right|\leqslant\left|\upsilon_{\tilde{A}}^t(x_i)-\upsilon_{\tilde{C}}^t(x_i)\right|\leqslant\left|\mu_{\tilde{A}}^t(x_i)-\mu_{\tilde{C}}^t(x_i)\right|$。

因此,基于前述不等式可知,$H(I_{\tilde{A}}(x_i),I_{\tilde{B}}(x_i))\leqslant H(I_{\tilde{A}}(x_i),I_{\tilde{C}}(x_i))$, $H(I_{\tilde{B}}(x_i),I_{\tilde{C}}(x_i))\leqslant H(I_{\tilde{A}}(x_i),I_{\tilde{C}}(x_i))$,也即$d_{NH}(\tilde{A},\tilde{B})\leqslant d_{NH}(\tilde{A},\tilde{C})$,$d_{NH}(\tilde{B},\tilde{C})\leqslant d_{NH}(\tilde{A},\tilde{C})$。

情形2 当 $\left|\mu_{\tilde{A}}^t(x_i)-\mu_{\tilde{C}}^t(x_i)\right|\geqslant\left|\upsilon_{\tilde{A}}^t(x_i)-\upsilon_{\tilde{C}}^t(x_i)\right|\geqslant\left|\sigma_{\tilde{A}}^t(x_i)-\sigma_{\tilde{C}}^t(x_i)\right|$，$\left|\sigma_{\tilde{A}}^t(x_i)-\sigma_{\tilde{C}}^t(x_i)\right|\geqslant\left|\mu_{\tilde{A}}^t(x_i)-\mu_{\tilde{C}}^t(x_i)\right|\geqslant\left|\upsilon_{\tilde{A}}^t(x_i)-\upsilon_{\tilde{C}}^t(x_i)\right|$，$\left|\sigma_{\tilde{A}}^t(x_i)-\sigma_{\tilde{C}}^t(x_i)\right|\geqslant\left|\upsilon_{\tilde{A}}^t(x_i)-\upsilon_{\tilde{C}}^t(x_i)\right|\geqslant\left|\mu_{\tilde{A}}^t(x_i)-\mu_{\tilde{C}}^t(x_i)\right|$，$\left|\upsilon_{\tilde{A}}^t(x_i)-\upsilon_{\tilde{C}}^t(x_i)\right|\geqslant\left|\mu_{\tilde{A}}^t(x_i)-\mu_{\tilde{C}}^t(x_i)\right|\geqslant\left|\sigma_{\tilde{A}}^t(x_i)-\sigma_{\tilde{C}}^t(x_i)\right|$，$\left|\upsilon_{\tilde{A}}^t(x_i)-\upsilon_{\tilde{C}}^t(x_i)\right|\geqslant\left|\sigma_{\tilde{A}}^t(x_i)-\sigma_{\tilde{C}}^t(x_i)\right|\geqslant\left|\mu_{\tilde{A}}^t(x_i)-\mu_{\tilde{C}}^t(x_i)\right|$时，证明过程类似于情形1，故略。证明成立。

定理2 $\tilde{A}$ 和 $\tilde{B}$ 间的归一化Hausdorff距离 $d_{NH}(\tilde{A},\tilde{B})$会随着参数$t$值的增大而增大。

证明 情形1：如果 $\left|\mu_{\tilde{A}}^t(x_i)-\mu_{\tilde{B}}^t(x_i)\right|\geqslant\left|\sigma_{\tilde{A}}^t(x_i)-\sigma_{\tilde{B}}^t(x_i)\right|\geqslant\left|\upsilon_{\tilde{A}}^t(x_i)-\upsilon_{\tilde{B}}^t(x_i)\right|$ 且 $\mu_{\tilde{A}}^t(x_i)\geqslant\mu_{\tilde{B}}^t(x_i)$，那么 $H(I_{\tilde{A}}(x_i),I_{\tilde{B}}(x_i))=\mu_{\tilde{A}}^t(x_i)-\mu_{\tilde{B}}^t(x_i)$，则 $\dfrac{\partial H(I_{\tilde{A}}(x_i),I_{\tilde{B}}(x_i))}{\partial t}=t(\mu_{\tilde{A}}^{t-1}(x_i)-\mu_{\tilde{B}}^{t-1}(x_i))\geqslant 0$，这说明$H(I_{\tilde{A}}(x_i),I_{\tilde{B}}(x_i))$与参数$t$值为正相关关系。因而，$\tilde{A}$ 和 $\tilde{B}$ 间的归一化Hausdorff距离 $d_{NH}(\tilde{A},\tilde{B})$会随参数$t$值的增大而增大，即证。

情形2：如果 $\left|\mu_{\tilde{A}}^t(x_i)-\mu_{\tilde{B}}^t(x_i)\right|\geqslant\left|\sigma_{\tilde{A}}^t(x_i)-\sigma_{\tilde{B}}^t(x_i)\right|\geqslant\left|\upsilon_{\tilde{A}}^t(x_i)-\upsilon_{\tilde{B}}^t(x_i)\right|$ 且 $\mu_{\tilde{A}}^t(x_i)<\mu_{\tilde{B}}^t(x_i)$，那么 $H(I_{\tilde{A}}(x_i),I_{\tilde{B}}(x_i))=\mu_{\tilde{B}}^t(x_i)-\mu_{\tilde{A}}^t(x_i)$，则 $\dfrac{\partial H(I_{\tilde{A}}(x_i),I_{\tilde{B}}(x_i))}{\partial t}=t(\mu_{\tilde{B}}^{t-1}(x_i)-\mu_{\tilde{A}}^{t-1}(x_i))\geqslant 0$，这说明$H(I_{\tilde{A}}(x_i),I_{\tilde{B}}(x_i))$与参数$t$值为正相关关系。因而，$\tilde{A}$ 和 $\tilde{B}$ 间的归一化Hausdorff距离 $d_{NH}(\tilde{A},\tilde{B})$会随参数$t$值的增大而增大，即证。

其他10种情形证明过程类似于情形1和情形2，故略。证明成立。

定理2说明基于同样的评价信息，增大的参数t值会导致计算得到的$\tilde{A}$ 和 $\tilde{B}$ 间的归一化Hausdorff距离 $d_{NH}(\tilde{A},\tilde{B})$与实际值产生偏误，也即，给予专家过度的评价自由度并不总是一个明智的决策。

变动专家权重 $\tilde{w}_k(k=1,2,\cdots,q)$可由式(10)求得

$$\tilde{w}_k=\frac{w_k\sum_{l=1}^{t}(1-d_{NH}(A^k,A^l))}{\sum_{k=1}^{t}w_k\sum_{l=1}^{t}(1-d_{NH}(A^k,A^l))}$$
$$k=1,2,\cdots,q;\ l=1,2,\cdots,q;\ l\neq k \tag{11}$$

2.2.2 借助T-SFWA算子求得综合收益矩阵

利用式(12)计算综合偏好值$\bar{a}_{ij}$。

$$\bar{a}_{ij}=(\bar{s}_{ij},\bar{f}_{ij},\bar{d}_{ij})=\text{T-SFWA}(\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,\cdots,\tilde{a}_n)=\left\langle(1-\prod_{k=1}^{t}(1-s_{ij}^t)^{\tilde{w}_k})^{1/t},\ \prod_{k=1}^{t}f_{ij}^{w_k},\ \prod_{k=1}^{t}d_{ij}^{w_k}\right\rangle \tag{12}$$

2.2.3 基于零和竞争博弈理论选择最优竞争策略

(1)构建博弈方I和博弈方II的策略预期收益

博弈方I的预期收益为

$$\tilde{E}=x^TRy=\left(\left(1-\prod_{j=1}^{m}\prod_{i=1}^{n}(1-s_{ij}^t)^{x_iy_j}\right)^{1/t},\ \prod_{j=1}^{m}\prod_{i=1}^{n}f_{ij}^{\ x_iy_j},\ \prod_{j=1}^{m}\prod_{i=1}^{n}d_{ij}^{\ x_iy_j}\right) \tag{13}$$

同理，博弈方II的预期收益为

$$-\tilde{E}=x^T(-R)y=\left(\left(1-\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}(1-d_{ij}^t)^{x_iy_j}\right)^{1/t},\ \left(1-\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}(1-f_{ij}^t)^{x_iy_j}\right)^{1/t},\ \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}s_{ij}^{\ x_iy_j}\right) \tag{14}$$

设博弈方I的最小收益为v_G，博弈方II的最大损失为ρ_G，则有

$$v_G=(\tilde{s},\tilde{f},\tilde{d})=\left(\min_{y\in Y}\left(1-\prod_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{m}(1-s_{ij}^t)^{x_iy_j}\right)^{1/t},\ \max_{y\in Y}\left(\prod_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{m}f_{ij}^{\ x_iy_j}\right),\ \max_{y\in Y}\left(\prod_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{m}d_{ij}^{\ x_iy_j}\right)\right)$$

$$\tau_G=(\tilde{\Xi},\tilde{\Psi},\tilde{Z})=\left(\max_{x\in X}\left(1-\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}(1-d_{ij}^t)^{x_iy_j}\right)^{1/t},\ \min_{x\in X}\left(\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}f_{ij}^{\ x_iy_j}\right),\ \min_{x\in X}\left(\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}s_{ij}^{\ x_iy_j}\right)\right)$$

若 $V_G=v_G=\tau_G$，则 V_G是零和博弈模型的均衡模糊博弈值。

(2) 求解博弈方I和博弈方II的最优竞争策略

利用式(15)计算博弈方I的最大收益值和最优混合策略集。

$$\max\{v_G\}=\left\{\max(\tilde{s}),\min(\tilde{f}),\min(\tilde{d})\right\}$$
$$\text{s.t.}\ (1-\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}(1-s_{ij}^t)^{x_iy_j})^{1/t}\geqslant\tilde{s}\quad j=1,2,\cdots,n,$$
$$\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}f_{ij}^{\ x_iy_j}\leqslant\tilde{f}\quad j=1,2,\cdots,n,$$
$$\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}d_{ij}^{\ x_iy_j}\leqslant\tilde{d}\quad j=1,2,\cdots,n,$$

$$e^{\mathrm{T}}x=1,\tilde{s}\geqslant 0,\ \tilde{f}\geqslant 0,\ \tilde{d}\geqslant 0,\ x_i\geqslant 0$$
$$i=1,2,\cdots,m \tag{15}$$

显然,上述规划模型是非线性的,尚未有求解方法能够直接求得结果。这里,基于加权平均理论提出了一个将式(15)转化为T阶球形模糊线性规划模型的方法。

若 $0\leqslant\tilde{s}\leqslant 1$, $\max\{\tilde{s}\}$ 与 $\min\{1-\tilde{s}\}$ 同解, $\min\{1-\tilde{s}\}$ 与 $\min\{\ln(1-\tilde{s}^t)\}$ 同解。因而,当 $0\leqslant\tilde{s}\leqslant 1$ 时, $\max\{\tilde{s}\}$ 与 $\min\{\ln(1-\tilde{s}^t)\}$ 同解。同理, $\min\{\tilde{f}\}$、$\min\{\tilde{d}\}$ 分别与 $\min\{\ln(\tilde{f})\}$、$\min\{\ln(\tilde{d})\}$ 同解。因此,当 $s_{ij}\neq 1$, $\tilde{s}\neq 1$, $f_{ij}\neq 0$, $\tilde{f}\neq 0$, $d_{ij}\neq 0$, $\tilde{d}\neq 0$时,式(15)可以被转化为下列规划模型:

$$\min\left\{\lambda\ln(1-\tilde{s}^t)+\theta\ln(\tilde{f})+(1-\lambda-\theta)\ln(\tilde{d})\right\}$$
$$\begin{aligned}\text{s.t. }&\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_iy_j(\lambda\ln(1-s_{ij}^t)+\theta\ln(f_{ij})+\\&(1-\lambda-\theta)\ln d_{ij}),\\&\leqslant\lambda\ln(1-\tilde{s}^t)+\theta\ln(\tilde{f})+\\&(1-\lambda-\theta)\ln(\tilde{d})\quad j=1,2,\cdots,n,\\&e^{\mathrm{T}}x=1,\tilde{s}\geqslant 0,\ \tilde{f}\geqslant 0,\ \tilde{d}\geqslant 0,\ x_i\geqslant 0\\&i=1,2,\cdots,m\end{aligned}\tag{16}$$

其中,λ、θ用于刻画目标优先程度的权重,由博弈方I决定。

鉴于Y是连续集合,式(16)可被转化为下列线性规划模型:

$$\min\left\{\lambda\ln(1-\tilde{s}^t)+\theta\ln(\tilde{f})+(1-\lambda-\theta)\ln(\tilde{d})\right\}$$
$$\begin{aligned}\text{s.t. }&\sum_{i=1}^{m}(x_i(\lambda\ln(1-s_{ij}^t)+\theta\ln(f_{ij})+\\&(1-\lambda-\theta)\ln d_{ij}),\\&\leqslant\lambda\ln(1-\tilde{s}^t)+\theta\ln(\tilde{f})+\\&(1-\lambda-\theta)\ln(\tilde{d})\quad j=1,2,\cdots,n,\\&e^{T}x=1,\tilde{s}\geqslant 0,\ \tilde{f}\geqslant 0,\ \tilde{d}\geqslant 0,\ x_i\geqslant 0\\&i=1,2,\cdots,m\end{aligned}\tag{17}$$

同理,利用式(18),可求得博弈方II的最小损失值和最优混合策略集:

$$\min\{\rho_G\}=\left\{\min(\tilde{\Xi}),\max(\tilde{\Psi}),\max(\tilde{Z})\right\}$$
$$\begin{aligned}\text{s.t. }&(1-\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}(1-s_{ij}^t)^{x_iy_j})^{1/t}\leqslant\tilde{\Xi}\quad j=1,2,\cdots,n,\\&\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}f_{ij}{}^{x_iy_j}\geqslant\tilde{\Psi}\quad j=1,2,\cdots,n,\\&\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}d_{ij}{}^{x_iy_j}\geqslant\tilde{Z}\quad j=1,2,\cdots,n,\\&e^{\mathrm{T}}y=1,\tilde{\Xi}\geqslant 0,\ \tilde{\Psi}\geqslant 0,\ \tilde{Z}\geqslant 0,\ y_j\geqslant 0\\&j=1,2,\cdots,n\end{aligned}\tag{18}$$

显然,当 $\tilde{d}\in[0,1)$ 时, $\min(\tilde{\Xi})$ 与 $\max\left\{\ln(1-\tilde{\Xi})\right\}$ 同解。因此,当 $s_{ij}\neq 1$, $\tilde{\Xi}\neq 1$, $f_{ij}\neq 0$, $\tilde{\Psi}\neq 0$, $d_{ij}\neq 0$, $\tilde{Z}\neq 0$时,式(18)可转化为下列规划模型:

$$\max\left\{\lambda\ln(1-\tilde{\Xi}^t)+\theta\ln(\tilde{\Psi})+(1-\lambda-\theta)\ln(\tilde{Z})\right\}$$
$$\begin{aligned}\text{s.t. }&\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_iy_j(\lambda\ln(1-s_{ij}^t)+\theta\ln(f_{ij})+\\&(1-\lambda-\theta)\ln d_{ij}),\\&\geqslant\lambda\ln(1-\tilde{\Xi}^t)+\theta\ln(\tilde{\Psi})+\\&(1-\lambda-\theta)\ln(\tilde{Z})\quad i=1,2,\cdots,m,\\&e^{\mathrm{T}}y=1,\tilde{\Xi}\geqslant 0,\ \tilde{\Psi}\geqslant 0,\ \tilde{Z}\geqslant 0,\ y_j\geqslant 0\\&j=1,2,\cdots,n\end{aligned}\tag{19}$$

其中,λ、θ为目标优先程度权重,由博弈方II决定。

鉴于X是连续集合,式(19)可被转化为下列线性规划模型:

$$\max\left\{\lambda\ln(1-\tilde{\Xi}^t)+\theta\ln(\tilde{\Psi})+(1-\lambda-\theta)\ln(\tilde{Z})\right\}$$
$$\begin{aligned}\text{s.t. }&\sum_{j=1}^{n}(y_j(\lambda\ln(1-s_{ij}^t)+\theta\ln(f_{ij})+\\&(1-\lambda-\theta)\ln d_{ij}),\\&\leqslant\lambda\ln(1-\tilde{\Xi}^t)+\theta\ln(\tilde{\Psi})+\\&(1-\lambda-\theta)\ln(\tilde{Z})\quad i=1,2,\cdots,m,\\&e^{\mathrm{T}}y=1,\tilde{\Xi}\geqslant 0,\ \tilde{\Psi}\geqslant 0,\ \tilde{Z}\geqslant 0,\ y_j\geqslant 0\\&j=1,2,\cdots,n\end{aligned}\tag{20}$$

然而,当 $s_{ij}=1$ 时, $\ln(1-s_{ij}^t)\to-\infty$;当$f_{ij}=0$时, $\ln(f_{ij})\to-\infty$;当 $d_{ij}=0$, $\ln(d_{ij})\to-\infty$。在这些情形下,式(17)和(20)无效。为了扩大所提出模型的适用范围,构建下列非线性规划模型组:

$$\min\left\{(1-\tilde{s}^t)^{\lambda}(\tilde{f})^{\theta}(\tilde{d})^{1-\lambda-\theta}\right\}$$
$$\begin{aligned}\text{s.t. }&\prod_{i=1}^{m}\left[(1-s_{ij}^t)^{\lambda}(f_{ij})^{\theta}(d_{ij})^{1-\lambda-\theta}\right]^{x_i},\\&\leqslant(1-\tilde{s}^t)^{\lambda}(\tilde{f})^{\theta}(\tilde{d})^{1-\lambda-\theta}\quad j=1,2,\cdots,n,\\&e^{\mathrm{T}}x=1,\tilde{s}\geqslant 0,\ \tilde{f}\geqslant 0,\ \tilde{d}\geqslant 0,\ x_i\geqslant 0\\&i=1,2,\cdots,m\end{aligned}\tag{21}$$

和

$$\max\left\{(1-\tilde{\Xi}^t)^\lambda(\tilde{\Psi})^\theta(\tilde{Z})^{1-\lambda-\theta}\right\}$$

$$\begin{aligned}\text{s. t. }&\prod_{j=1}^{n}\left[(1-s_{sj}^t)^\lambda(f_{ij})^\theta(d_{ij})^{1-\lambda-\theta}\right]^{y_i},\\&\leqslant(1-\tilde{\Xi}^t)^\lambda(\tilde{\Psi})^\theta(\tilde{Z})^{1-\lambda-\theta}\\&\quad i=1,2,\cdots,m,\\&\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=1,\tilde{\Xi}\geqslant0,\ \tilde{\Psi}\geqslant0,\ \tilde{Z}\geqslant0,\ y_j\geqslant0\\&\quad j=1,2,\cdots,n\end{aligned}\tag{22}$$

根据对偶理论，式(21)和(22)构成了博弈方Ⅰ和博弈方Ⅱ间的原始对偶线性规划问题，$\min\left\{(1-\tilde{s}^t)^\lambda(\tilde{f})^\theta(\tilde{d})^{1-\lambda-\theta}\right\}$应等于$\max\left\{(1-\tilde{\Xi}^t)^\lambda(\tilde{\Psi})^\theta(\tilde{Z})^{1-\lambda-\theta}\right\}$。借助单纯形法求解式(21)和(22)可分别求得博弈方Ⅰ和博弈方Ⅱ的最优策略集和均衡模糊博弈值。

3 案例计算与分析

3.1 实例描述

这里，借鉴文献[2]，运用两家新能源共享电动汽车公司A和B在上海争夺市场份额的案例来展示本文所提出模型的应用过程。A公司在公司规模、网点数量、可用性等方面具有优势；B公司拥有位于上海全国知名高校智能电网中心提供的后台大数据处理技术，且只使用纯电动汽车，在提高绿色消费者满意度方面具有明显优势。虽不同车型的单价不同，但两家公司相似产品的单价相差无几。

现A公司和B公司考虑以下3种备选竞争策略来最大限度地扩大市场份额：提高用户质量(η_1)、投资广告(η_2)和工艺改进(η_3)。为了提高专家评价的有效性，采取产学研合作的评价模式，邀请5位专家e_1～e_5组成一个评价委员会，其中，e_1为来自高校运营管理领域的专家，e_2为博弈论领域的专家，e_3为某共享电动汽车公司的研发部门主管，e_4为某共享电动汽车公司的市场营销部门主管，e_5为某营销咨询公司的CEO。专家们综合考虑资金需求、劳动力成本、时间成本、执行难度系数和可持续性等因素，对博弈方间的相对竞争优势进行综合评价，给出博弈方A的收益矩阵。专家提供的公司A的T-SF收益矩阵，见表1。由于$\max\left\{(s_{ij})^2+(f_{ij})^2+(d_{ij})^2\right\}=0.5^2+0.75^2+0.5^2=1.0625\geqslant1$且$\max\left\{(s_{ij})^3+(f_{ij})^3+(d_{ij})^3\right\}=0.5^2+0.75^2+0.5^3=0.6719<1$，因此，将T-SFSs中的变量$t$赋值为3。

表1 A公司的T-SF收益矩阵

Tab. 1 T-SF payoff matrix of Company A

专家	A公司策略集	B公司策略集		
		η_1	η_2	η_3
e_1	η_1	(0.65,0.50,0.40)	(0.80,0.20,0.35)	(0.45,0.50,0.60)
	η_2	(0.40,0.50,0.60)	(0.60,0.50,0.30)	(0.35,0.30,0.65)
	η_3	(0.85,0.20,0.05)	(0.95,0.05,0.10)	(0.60,0.50,0.45)
e_2	η_1	(0.70,0.30,0.30)	(0.60,0.30,0.70)	(0.60,0.20,0.80)
	η_2	(0.60,0.50,0.40)	(0.60,0.65,0.50)	(0.50,0.65,0.60)
	η_3	(0.90,0.10,0.30)	(0.60,0.30,0.70)	(0.50,0.75,0.50)
e_3	η_1	(0.80,0.20,0.30)	(0.70,0.30,0.40)	(0.70,0.30,0.40)
	η_2	(0.60,0.50,0.50)	(0.80,0.20,0.20)	(0.70,0.30,0.50)
	η_3	(0.50,0.75,0.50)	(0.70,0.35,0.50)	(0.80,0.15,0.30)
e_4	η_1	(0.81,0.15,0.29)	(0.59,0.50,0.45)	(0.61,0.50,0.32)
	η_2	(0.82,0.15,0.23)	(0.60,0.55,0.43)	(0.71,0.30,0.29)
	η_3	(0.81,0.20,0.30)	(0.79,0.20,0.25)	(0.76,0.35,0.48)
e_5	η_1	(0.60,0.60,0.50)	(0.40,0.35,0.70)	(0.60,0.55,0.40)
	η_2	(0.60,0.55,0.40)	(0.60,0.60,0.50)	(0.70,0.30,0.30)
	η_3	(0.30,0.30,0.70)	(0.30,0.30,0.70)	(0.50,0.75,0.50)

3.2 决策过程与计算结果

3.2.1 计算动态专家集成权重

(1)借助可信度分析量表确定初始专家集成权重

基于5位专家提供的个人信息，利用式(7)和式(8)求得初始专家权重向量为$w_k=(0.2177,0.2177,0.2016,0.1774,0.1855)$，具体计算结果如表2所示。显然，专家们的总可信度指数的排序为$G_1=G_2>G_3>G_5>G_4$，与专家的评价信度排序一致。

(2)计算变动专家集成权重

表2　基于可信度信息求得的初始专家集成权重

Tab. 2　Initial expert integrated weights obtained based on credibility information

可信度指数	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
教育背景(I_1)	8	10	8	8	8
职业与研究问题的关联度(I_2)	10	10	8	8	8
评价依据(I_3)	10	6	10	6	6
问题熟悉度(I_4)	10	10	8	8	8
自信水平(I_5)	8	10	8	8	8
经验水平(I_6)	8	8	8	6	8
G_k	54	54	50	44	46
w_k	0.217 7	0.217 7	0.201 6	0.177 4	0.185 5

首先,运用T-SF-Hausdorff距离计算公式求得专家间的距离,利用式(11)计算得到专家权重$\tilde{w}_k=(0.154\,9, 0.211\,7, 0.220\,4, 0.228\,3, 0.184\,7)$(表3)。与步骤(1)求得的初始专家权重相比,各位专家经过调整后的动态评价权重随着他们与其他专家的差异度的变化而变化。具体来看,考虑到部分影响评价结果正确性的关键因素的存在,专家e_1和e_2对本实例的评价结果与其他专家给出的评价信息差异较大,说明专家e_1和e_2提供的评价信息可能存在较大的偏误,因而他们的评价权重有所降低。相反,由于与其他专家的评价差异度相对较小,专家e_3和e_4的评价权重次序前移。虽然专家e_5的权重值略微降低,但其排序并未改变。次序经过调整后的专家权重次序为$w_4>w_3>w_2>w_5>w_1$,印证了本章提出的混合动态专家权重确定模型不仅考虑了客观个人信息,还能够根据主观评价信息的改变对专家客观初始权重做出有效的调整。

表3　基于T-SF-Hausdorff距离求得的动态专家集成权重

Tab. 3　Dynamic expert ensemble weights derived based on T-SF Hassdorff distance

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	$\sum_{l=1}^{t} d_{NH}(A^k, A^l)$	$\tilde{w}_k$
e_1	0	0.765 5	0.902 0	0.757 2	0.985 2	3.409 8	0.154 9
e_2	0.765 5	0	0.913 7	0.838 2	0.675 9	3.193 3	0.211 7
e_3	0.902 0	0.913 7	0	0.550 9	0.726 7	3.093 2	0.220 4
e_4	0.757 2	0.838 2	0.550 9	0	0.786 0	2.932 3	0.228 3
e_5	0.985 2	0.675 9	0.726 7	0.786 0	0	3.172 7	0.184 7

3.2.2　求取综合收益矩阵

基于5位专家提供的A公司主观收益信息和步骤求得的变动专家权重,利用式(12)聚合得到A公司综合收益矩阵,如表4所示。

表4　A公司综合收益矩阵

Tab. 4　Comprehensive payoff matrix of Company A

A公司策略集	B公司策略集		
	η_1	η_2	η_3
η_1	(0.738 3, 0.288 1, 0.342 1)	(0.649 3, 0.325 7, 0.502 5)	(0.613 5, 0.374 5, 0.468 7)
η_2	(0.662 4, 0.386 6, 0.394 3)	(0.664 8, 0.456 5, 0.364 7)	(0.641 4, 0.353 4, 0.434 9)
η_3	(0.776 5, 0.249 1, 0.297 5)	(0.768 8, 0.214 4, 0.380 1)	(0.524 1, 0.415 1, 0.435 5)

3.2.3　基于零和竞争博弈理论选择最优竞争策略

令$\lambda=0.4$,$\theta=0.3$,依据式(21)和(22)建立下列对偶规划模型求解A公司和B公司的混合策略集和模糊均衡博弈值:

$$\min\ \{L\}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}(0.406\,1)^{x_1^*}\cdot(0.495\,8)^{x_2^*}\cdot(0.355\,8)^{x_3^*}\leqslant L\\(0.511\,2)^{x_1^*}\cdot(0.508\,2)^{x_2^*}\cdot(0.369\,9)^{x_3^*}\leqslant L\\(0.534\,2)^{x_1^*}\cdot(0.504\,4)^{x_2^*}\cdot(0.562\,5)^{x_3^*}\leqslant L\\x_1^*+x_2^*+x_3^*=1\\x_1^*,x_2^*,x_3^*\geqslant 0\end{cases}$$

和

$$\max\ \{T\}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}(0.406\,1)^{y_1^*}\cdot(0.512\,2)^{y_2^*}\cdot(0.534\,2)^{y_3^*}\geqslant T\\(0.495\,8)^{y_1^*}\cdot(0.508\,2)^{y_2^*}\cdot(0.504\,4)^{y_3^*}\geqslant T\\(0.355\,8)^{y_1^*}\cdot(0.369\,9)^{y_2^*}\cdot(0.562\,5)^{y_3^*}\geqslant T\\y_1^*+y_2^*+y_3^*=1\\y_1^*,y_2^*,y_3^*\geqslant 0\end{cases}$$

借助单纯形法计算上述模型,求得A公司最优混合策略为$x^*=(0, 0.924\,1, 0.075\,9)$,B公司最优混合策略为$y^*=(0, 0.182\,8, 0.817\,2)$,T-SF均衡博弈值为$E(x^*, y^*)=(0.642\,5, 0.370\,1, 0.334\,0)$。博弈均衡结果表明:① A公司有0.924 1的概率用策略

η_2与B公司竞争新能源共享电动汽车市场份额,有0.075 9的概率用策略η_3与B公司竞争新能源共享电动汽车市场份额;② B公司有0.182 8的概率用策略η_2与A公司竞争新能源共享电动汽车市场份额,有0.817 2的概率用策略η_3与A公司竞争新能源共享电动汽车市场份额。

3.3 对比分析

3.3.1 模糊语言对比

为了突出T-SFSs在显性化阐释复杂问题上的优势,这里将其与模糊集[3]、直觉模糊集[11]、毕达哥拉斯模糊集[12]、q阶正交模糊集[2]、双极软集[13]、图像模糊集[14]、球形模糊集[5]、双极图像模糊集[15]等各类代表性模糊集进行对比,分析如下:① 模糊集仅依靠隶属度函数来描述问题,导致其可应用的场景大大受限;② 直觉模糊集、毕达哥拉斯模糊集、q阶正交模糊集考虑了隶属度和非隶属度,但忽视了中立度可以保持决策理性的重要作用;③ 双极软集没有考虑中立度,且对问题复杂度有严格要求,极易失去效力;④ 图像模糊集、球形模糊集、双极图像模糊集同时考虑了隶属度、中立度和非隶属度,一定程度上弥补了前述模糊集的缺陷,但三者在$\mu_A(x)$、$\sigma_A(x)$、$\upsilon_A(x)$之和或平方之和大于1时会失去效力,具有应用局限性。由分析可见,作为上述模糊语言的泛式,T-STSs不仅可以同时反映隶属度、中立度和非隶属度,还能够借助变动参数t来实现根据复杂度灵活描述问题。

3.3.2 模糊零和博弈求解模型对比

除了本文所整合的加权平均方法,理想点法[16]和分层优化法[17]也是求解模糊零和博弈的经典方法。虽然Yang等[2]通过对比分析验证了加权平均方法在q阶正交模糊零和博弈环境下的优势,但由于本文所运用的T-SFSs相较q阶正交模糊语言额外考虑了专家信息的中立度,增加了模糊博弈环境的复杂性,深入证明本文方法的可用性和优越性是有必要的。这里使用这3种方法求解前述案例,对比结果如表5所示,可以发现本文所采用的加权平均法由于时间复杂度低和无需中间变量使其计算负担显著低于其他两种方法。根据表5,理想点法和分层优化法时间复杂度与本文算法时间复杂度的比值大于等于2(以本文算法的时间复杂度为基准值),表明新构建的T-SF零和博弈多目标规划求解模型具有决策效率更高、计算复杂度更低的优良特性。此外,本文所提出方法和分层优化法的计算结果没有本质区别,但与理想点法求得的A公司的最优混合策略结果有明显差异。理想点法得出的结果显示,A公司有71.13%的概率采取策略η_1与B公司竞争新能源共享电动汽车市场份额,结合公司A的T-SF收益矩阵可知这一结论显然不合理,因为虽然A公司采取策略η_1成功抢占市场份额的概率不比其他两种策略低,但其失败的概率却是最大的,因此,A公司不会采取策略η_1与B公司竞争市场份额。这证明了本文所提出的加权平均方法即使在T-SFTs复杂模糊零和博弈环境下的计算准确性和有效性。

表5 模糊零和博弈求解模型对比结果

Tab. 5 Comparison of fuzzy zero-sum game solving models

方法	是否需要中间变量	时间复杂度比值	最优策略		
			x^*	y^*	$E(x^*,y^*)$
本文方法	×	1	(0,0.924 1,0.075 9)	(0,0.828 0,0.817 2)	(0.642 5,0.370 1,0.334 0)
理想点法	√	≥2	(0.711 3,0.288 7,0)	(0,0.211 3,0.788 7)	(0.632 1,0.537 3,0.443 5)
分层优化法	√	≥2	(0,1,0)	(0,0,1)	(0.641 4,0.353 4,0.434 9)

前述两种对比强调了本文所搭建模型在求解复杂模糊决策问题的优越性,不论备选策略的数量多少,其都能高效、简便地计算出直观的概率形式的最优混合策略排序结果。

4 结论

本文提出了一种T-SF环境下的零和竞争博弈多目标规划求解方法。首先,借助T-STFs刻画博弈环境的不确定性,可更全面地反映专家主观评价信息,且可变动参数的设置赋予了决策者较大的自由度。然后,通过定义一种新的T-SF-Hausdorff距离,构建了混合专家变动集成评价权重模型,将主客观评价信息纳入到权重求解中以获得更接近决策者的真实权重,且能自发响应评价信息的动态变化,保证了集成收益矩阵结果可靠性。接着,构建了T-SF零和博弈非线性多目标规划决策模型,并设计了一种非线性多目标规划模型的求解机制。与现有方法相比,本文模型能适应博弈环境的动态变化,策略数量受限小,计算复杂度较低,得到的混合策略解可清

晰显示策略间的具体差异,且能在最优方案失效时提供替代建议。

作者贡献声明:

丁雪枫:研究选题,提供研究思路和技术指导,论文审定,论文整体结构指导,论文修改并完善。

杨育豆:确定整体研究思路和方法,撰写论文初稿并修改完善,采集和处理原始数据。

参考文献:

[1] DING X F, LIU H C. A new approach for emergency decision-making based on zero-sum game with Pythagorean fuzzy uncertain linguistic variables [J]. International Journal of Intelligent Systems, 2019, 34(7): 57.

[2] YANG Y D, DING X F. A q-rung orthopair fuzzy non-cooperative game method for competitive strategy group decision-making problems based on a hybrid dynamic experts' weight determining model[J]. Complex & Intelligent Systems, 2021, 7: 3077.

[3] ZADEH L A. Fuzzy sets[J]. Information & Control, 1965, 8(3): 338.

[4] GRZEGORZEWSKI P. Distances between intuitionistic fuzzy sets and/or interval-valued fuzzy sets based on the Hausdorff metric[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2004, 148(2): 319.

[5] MAHMOOD T, ULLAH K, KHAN Q, *et al*. An approach toward decision-making and medical diagnosis problems using the concept of spherical fuzzy sets [J]. Neural Computing & Applications, 2019, 31: 7041.

[6] CHAI J H, SU Y, LU S C. Linguistic Z-number preference relation for group decision making and its application in digital transformation assessment of SMEs [J]. Expert Systems with Applications, 2023, 213: 118749.

[7] LIU P D, KHAN Q, MAHMOOD T, *et al*. T-Spherical fuzzy power Muirhead mean operator based on novel operational laws and their application in multi-attribute group decision making [J]. IEEE Access, 2019, 7: 22613.

[8] JU Y B, LIANG Y Y, LUO C, *et al*. T-spherical fuzzy TODIM method for multi-criteria group decision-making problem with incomplete weight information [J]. Soft Computing, 2021, 25: 2981.

[9] NADLER S B. Hyperspaces of sets[M]. New York: Marcel Dekker Incorporation, 1978.

[10] CHEN Y W, LARBANI M. Two-person zero-sum game approach for fuzzy multiple attribute decision making problems [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2006, 157(1): 34.

[11] ATANASSOV K T. Intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 20(1): 87.

[12] YAGER R R. Pythagorean fuzzy subsets [J].2013 Joint IFSA World Congress and NAFIPS Annual Meeting (IFSA/NAFIPS).[S.l.]:IFSA/NAFIPS, 2013: 57-61.

[13] MAHMOOD T. A novel approach towards bipolar soft sets and their applications[J]. Journal of Mathematics, 2020, 2020(1): 4690808.

[14] CUONG B C, KREINOVICH V. Picture fuzzy sets-a new concept for computational intelligence problems[C].2013 Third World Congress on Information and Communication Technologies (WICT 2013). Hanoi:WITC, 2013: 1-6.

[15] RIAZ M, GARG H, FARID H, *et al*. Multi-criteria decision making based on bipolar picture fuzzy operators and new distance measures [J]. Computer Modeling in Engineering & Sciences, 2021, 127(2): 771.

[16] 南江霞,汪亭,王冠雄,等. 异类值多目标二人零和约束矩阵对策及求解方法[J]. 模糊系统与数学, 2016, 30(4): 121.
NAN Jiangxia, WANG Ting, WANG Guanxiong, *et al*. The method for solving multi-objective zero-sum and constrained matrix games with heterogeneous values [J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2016, 30(4): 121.

[17] NAN J X, LI D F, ZHANG M J. A lexicographic method for matrix games with payoffs of triangular intuitionistic fuzzy numbers [J]. International Journal of Computational Intelligence Systems, 2010, 3(3): 280.