文章编号：0253-374X(2025)09-1423-10
DOI：10.11908/j.issn.0253-374x.24095

考虑出行行为偏移的奖励方案优化模型

肖　琳，吴纪奘，孙　剑，田　野
（同济大学 道路与交通工程教育部重点实验室，上海 201804）

摘要：针对基于奖励的交通需求管理(incentive-based travel demand management，IBTDM)方案设计中特有的预算、渗透率约束，采用瓶颈模型分析了出发时间偏移量对出行者的出行成本和IBTDM最优奖励方案的影响；将考虑出发时间偏移量的奖励方案与不考虑原始出行模式的基于出发时间的奖励方案进行对比，分析不同方案的适用性。结果显示，出行者的单位出发时间偏移成本θ和单位行驶时间成本α的相对大小影响了考虑出发时间偏移量的最优奖励方案的形式。当$\theta<\alpha$时，奖励金额随时间先减少后增加；当$\theta>\alpha$时，奖励金额随时间先增加后减少；当$\theta=\alpha$时，奖励金额不变。此外，考虑出发时间偏移量和基于出发时间的奖励方案在有限预算下缓解拥堵的效果优劣，也取决于θ和α的相对大小。因此，管理者需要谨慎评估出行者单位出行成本，选择更有效的奖励方案。一般情况下，$\theta<\alpha$更符合真实出行场景，此时考虑出发时间偏移量的奖励方案对缓解系统拥堵效果更好。

关键词：交通运输经济；奖励方案；瓶颈模型；基于奖励的交通需求管理；出行行为
中图分类号：U491.1^{+}2　　**文献标志码**：A

Optimization Model for Incentive Schemes Considering Travel Behavioral Offsets

XIAO Lin, *WU Jiyan*, *SUN Jian*, *TIAN Ye*
(Key Laboratory of Road and Traffic Engineering of the Ministry of Education, Tongji University, Shanghai 201804, China)

Abstract: Based on the distinctive constraint of budget and penetration rate inherent in incentive-based travel demand management (IBTDM) scheme design, a bottleneck model was employed to analyze the impact of departure time offsets on travelers' travel costs and the optimal IBTDM incentive scheme. Then, the incentive scheme considering departure time offset costs was compared with the scheme based on departure time, which does not consider travelers' original travel patterns, aiming to assess the applicability and effectiveness of different incentive strategies. The results indicate that the relative magnitude of travelers' unit departure time offset cost θ and unit travel time cost α significantly shapes the structure of optimal incentive schemes considering departure time offsets. When $\theta<\alpha$, the incentive amount decreases first and then increases over time; when $\theta>\alpha$, the incentive amount increases first and then decreases; and when $\theta=\alpha$, the incentive amount remains constant. Furthermore, the comparative effectiveness of the incentive scheme considering departure time offsets versus the incentive scheme based on departure time, in mitigating system congestion under budget constraints, also depends on the relative values of θ and α. Therefore, administrations must carefully evaluate travelers' unit travel costs to determine the most efficient incentive schemes. Generally, $\theta<\alpha$ more accurately reflects the real scenario, in which case the incentive scheme considering departure time offsets is more effective in alleviating system-wide congestion.

Keywords: transportation economy; incentive scheme; bottleneck model; incentive-based travel demand management; travel behavior

随着社会进步与经济发展，交通需求不断增大，拥堵日益加剧。交通需求管理(traffic demand management，TDM)在时间或空间上重新调控交通需求，是解决交通拥堵的重要方法。相较于传统的基于惩罚的TDM策略，如限号通行、拥堵收费等，基于奖励的交通需求管理(incentive based traffic demand management，IBTDM)作为一种新型TDM策略，推广阻力小、公众接受度高，近年来得到了广

收稿日期：2024-03-25
基金项目：国家自然科学基金(52002279)
第一作者：肖　琳，博士生，主要研究方向为主动出行需求管理、出行行为分析。E-mail：xiao_lin@tongji.edu.cn
通信作者：田　野，教授，博士生导师，工学博士，主要研究方向为自动驾驶仿真测试、大规模交通路网仿真。
E-mail：tianye@tongji.edu.cn

泛关注[1]。

目前IBTDM方案设计多基于被动反馈的试错法[2],对于小型私有公司或学术项目而言,试错成本过高,不合理奖励极易导致预算超支或用户流失,项目难以持续性发展。通过数学建模设计奖励方案,可在奖励落地实施中发挥先导性作用。然而,理论方案往往依赖于简化假设,难以全面捕捉系统复杂性,导致实施效果偏离预期。

相较于已经有大量研究的基于瓶颈模型的TDM策略优化问题,如拥堵收费方案优化[3-6],IBTDM方案优化问题还需考虑总奖励预算、渗透率、获客成本等特殊市场约束,可行域自由度明显较多,因此需要探索全新的建模求解方法。Rouwendal等[7]基于经典瓶颈模型研究了弹性需求且无约束条件下的最优奖励形式。Sun等[8]额外考虑了预算、渗透率、异质性等问题,得出在预算或渗透率不足情况下最优时变奖励曲线呈"U"型的结论。Xiao等[9]进一步分析了获客成本的影响,探讨了预算在宣传活动和行为激励之间的分配。Wu等[10]考虑了弹性需求对IBTDM方案的影响,以辨析奖励与收费方案的差别。孙剑等[11]着眼于应用方向,求解了针对拼车行为的奖励方案,拓展了IBTDM的应用场景。

然而,上述方案是基于出行者的出发时间分配奖励,导致原本对交通拥堵贡献较小的车主即使不改变出发时间也能获得奖励,从而成为奖励措施中的主要受益者。这意味着该奖励方案难以平衡全体出行者的利益,且部分预算未能有效激励出行者改变出行行为。此外,Tian等[12]开展了实验经济学研究,发现理论奖励方案的实际效果与预测结果存在一定偏差,原因可能在于该方案忽视了出行者在改变出发时间时面临的行为惯性和相应心理成本,即出发时间偏移成本,导致成本预估失准与奖励错位。因此,将出发时间偏移成本纳入出行成本更加符合出行者的决策思维。基于此,设计考虑出发时间偏移量的奖励方案,能够提升激励效果与公平性。荷兰避峰出行项目即采用这种奖励分配思路,为改变出发时间、出行路径或者出行方式的出行者分配不同的奖励[13]。然而,迄今仍鲜有考虑出行行为偏移量的奖励方案研究。

针对现有研究的局限性,采用瓶颈模型,将个人出发时间偏移量纳入出行成本考量范畴,考虑预算、渗透率等约束求解最优奖励方案;对比该奖励方案与基于出发时间的奖励方案在结构形式、缓解拥堵效果等方面的异同,以期为选择合适的奖励方案提供依据。研究提出了更符合出行者决策思维的奖励方案,为提升IBTDM效能和IBTDM落地实施提供理论指导。

1 问题建模

瓶颈模型能够有效建模排队形成与消散,从而动态描述高峰期拥堵情况,广泛应用于时间维度的拥堵研究。本研究旨在基于瓶颈模型,探究早高峰场景下考虑出发时间偏移量的奖励方案。

瓶颈模型规定,每天早上N名出行者驾车从起点(家)出发、到达终点(工作地)上班,即出行者出发时间为从起点的出发时刻,到达时间为到达终点的时刻。在瓶颈模型中,从家到工作地有且仅有一条路径,该路径上存在唯一的单位时间通行能力为c的交通瓶颈。

出发时间为t的出行者所面临的行驶时间共由两部分组成:

$$T(t)=T_{\mathrm{f}}+T_{\mathrm{q}}(t) \tag{1}$$

式中:T_{f}为交通瓶颈以外的自由流行驶时间;$T_{\mathrm{q}}(t)$为出发时间t的出行者在瓶颈处的排队时长。由于T_{f}为常数,不影响结果分析,因此令$T_{\mathrm{f}}=0$,这意味着出行者从家出发即到达瓶颈,离开瓶颈即可到达工作地,某时刻从起点的出发率即为同时刻瓶颈处的到达率。排队时长$T_{\mathrm{q}}(t)$与瓶颈处的排队长度$Q(t)$关系为

$$T_{\mathrm{q}}(t)=Q(t)/c=\int_{t_1}^{t}[D(u)-A(u)]\mathrm{d}u/c \tag{2}$$

式中:t_1为第1个出行者的出发时间;$D(t)$为t时刻出行者从起点的瞬时出发率,以下简称出发率;$A(t)$为t时刻出行者到达终点的瞬时到达率,以下简称到达率。经典瓶颈模型假设车辆不占用道路空间,对上游接近的车辆没有影响,因此即使严重拥堵,交通流量也不会下降[14]。换而言之,在拥堵阶段,瞬时到达率始终保持在瓶颈通行能力,即$A(t)=c$。

经典瓶颈模型规定,出行者个人出行成本包括行驶时间成本和计划延误成本。相较于期望到达时间,早到或者迟到都会有一定的成本损失。出发时间t的出行者个人出行成本为

$$\begin{aligned}\phi(t)=&\alpha T(t)+\beta\max\{t^*-[t+T(t)],0\}+\\&\gamma\max\{[t+T(t)]-t^*,0\}\end{aligned} \tag{3}$$

式中:α为单位行驶时间成本;t^*为期望到达时间;β为早到单位时间成本;γ为晚到单位时间成本。

每个出行者都会权衡出发时间,以最小化个人

出行成本。当无人能通过单方面改变出发时间来降低其出行成本时,系统达到均衡。此时所有出行者出行成本相等,个人出行成本对于出发时间的一阶导数为

$$\dot{\phi}(t)=0, t\in[t_1, t_N] \tag{4}$$

式中,t_N为第N个出行者的出发时间。可计算得到出发率

$$D(t)=\begin{cases}\alpha c/(\alpha-\beta), t\in[t_1, t'] \\ \alpha c/(\alpha+\gamma), t\in(t', t_N]\end{cases} \tag{5}$$

本研究假设均衡状态下排队开始时刻$t_1=0$,根据均衡状态下任意时刻出行成本相等,可以求得排队完全消散时刻$t_N=N/c$,目标到达时间$t^*=\delta N/(c\beta)$。为简化等式,规定$\delta \xlongequal{\text{def}} \beta\gamma/(\beta+\gamma)$。

均衡状态下的出行成本为

$$g=\beta t^* \tag{6}$$

均衡状态下的累计出发曲线和到达曲线如图1所示。其中,累计出发人数为t时刻之前从起点出发的总人数,累计到达人数为t时刻之前到达终点的总人数。高峰期因瓶颈限制,部分已从起点出发的出行者未能到达目的地,累计出发人数大于累计到达人数。

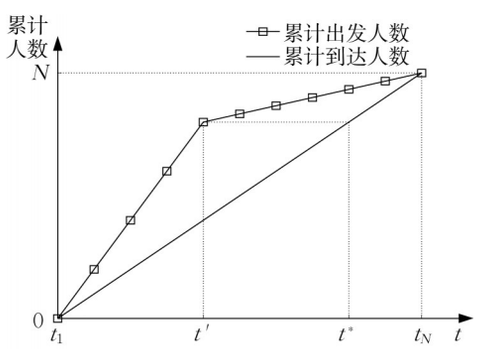


图1　累计出发曲线和到达曲线

Fig.1　Cumulative departure and arrival curves

2　奖励方案优化设计

2.1　考虑出发时间偏移量的奖励方案

为阐明出行者的出发时间偏移量对出行者出行决策及奖励方案的影响,基于瓶颈模型的出行成本量化式(3),进一步将出行者出发时间偏移成本纳入考量范畴,更新了出行者出行成本定义,即:

$$\phi(t)=\alpha T(t)+\beta\max\{t^*-[t+T(t)], 0\}+\gamma\max\{[t+T(t)]-t^*, 0\}+\theta C(t) \tag{7}$$

式中:θ为出行者单位出发时间偏移成本;$C(t)$为出发时间t的出行者较原始状态的出发时间偏移量。在原始状态时,出发时间偏移量$C(t)$为零。

假设在整个拥堵时段施加奖励方案$J(t)$,那么出发时间为t的出行者的广义出行成本$G(t)$等于出行成本减去奖励,可表示为

$$G(t)=\phi(t)-J(t) \tag{8}$$

奖励金额需满足非负约束,即$J(t)\geqslant 0$。无论采用何种奖励方案,均衡状态下任意时刻的出行成本都相等。出行成本用g表示,可得到

$$\phi(t)-J(t)=g \tag{9}$$

瓶颈模型中的系统最优(social optimum,SO)状态为没有排队发生的状态,出行者在整个高峰期内出发率应等于瓶颈处的单位时间通行能力,即$D(t)=c$。此时,出行者出行成本为g^*,则奖励方案可表示为

$$J(t)=\kappa(t)+\theta C(t)-g^* \tag{10}$$

式中,$\kappa(t)$为出发时间t的出行者面临的计划延误成本,取决于出行者到达时间。根据定义可以得到:

$$\kappa(t)=\begin{cases}\beta\left[t^*-\int_{t_1}^{t} D(u)\mathrm{d}u/c-t_1\right], t\in[t_1, t'] \\ \gamma\left[t_1+\int_{t_1}^{t} D(u)\mathrm{d}u/c-t^*\right], t\in(t', t_N]\end{cases} \tag{11}$$

SO状态下的奖励方案如图2所示,奖励金额与出发时间和出发时间偏移量有关。然而,若IBTDM公司盲目采取该方案,则可能无法控制所需总预算,导致预算超支甚至破产。为精准把控预算、便于奖励方案落地实施,需明确固定出发时间偏移模式,即出行者的出发时间和出发时间偏移量关系,从而准确计算出奖励金额及总预算。在该模式下,出行者必须根据原始出发时间调整至指定时刻才能获得奖励。在如图2曲面所示的一般性奖励方案中,存在使系统达到SO状态且预算最小的偏移模式,具有该模式的奖励方案即为最优奖励方案,如图2中黑色实线所示。

根据预算的定义,奖励方案$J(t)$实施所需的总预算M可以表示为

$$M=\int_{t_1}^{t_N} D(u)J(u)\mathrm{d}u \tag{12}$$

将式(10)代入式(12),可以计算得到SO状态下所需的奖励预算

$$M=\int_{t_1}^{t_N} c\kappa(u)\mathrm{d}u+\int_{t_1}^{t_N} c\theta C(u)\mathrm{d}u-Ng^* \tag{13}$$

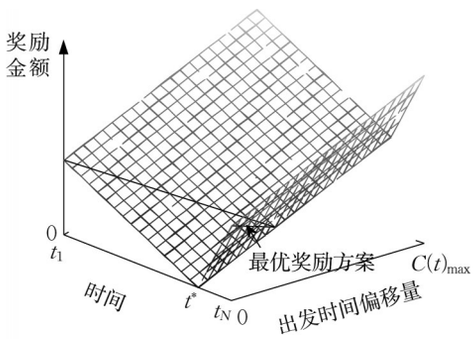


图2 SO状态下的奖励方案示意

Fig.2 Schematic diagram of incentive schemes in SO state

在SO状态中,$D(t)=c$,系统总延误成本固定。因此,根据式(13),为计算达到SO状态所需最小预算M^*,需要寻找使得系统总出发时间偏移量最小的偏移模式。

在SO状态下,出行者的出发模式将从图1中和方形组合的实线模式转变为单一实线模式。此时,存在2种出发时间偏移模式:模式1为全部出行者向后调整;模式2为部分出行者向前调整、其余出行者向后调整。

在模式1中,所有出行者向后调整出发时间。典型的偏移模式为出行者在无奖励和奖励下到达时间相同。假设出发时间t的出行者到达时间为

$$Z(t)=t+T(t)=t_0(t)+T_0(t_0(t)) \quad (14)$$

式中:$t_0(t)$为出发时间t的出行者的原始出发时间;$T_0(t_0(t))$为原始出行状态中所经历的出行时间(排队时间)。在此模式中,出行者的出发时间偏移量为原始状态下的排队时间,出行者的出行顺序在无奖励和有奖励时相同,典型模式如图3所示。图3中,A_{1O}~A_{5O}为无奖励原始出发时间,A_{1J}~A_{5J}为有奖励时调整出发时间。

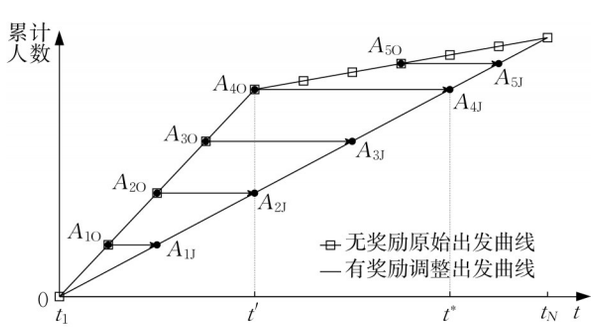


图3 出发时间偏移的典型模式

Fig.3 Typical mode regarding commuters' departure time offsets

除典型模式外,出发时间向后调整模式还包括出行者出发顺序改变的情况,即可能存在2名、3名乃至N名出行者互换顺序。为便于分析上述情况与典型模式的出发时间偏移量相对大小,以2名出行者出发顺序互换进行简化,如图4所示。图4中,A_{1O}、A_{2O}为无奖励原始出发时间,A_{1J}、A_{2J}为有奖励调整出发时间。尽管多名出行者互换顺序情况更为复杂,但总出发时间偏移量比较方式与2人互换相似。

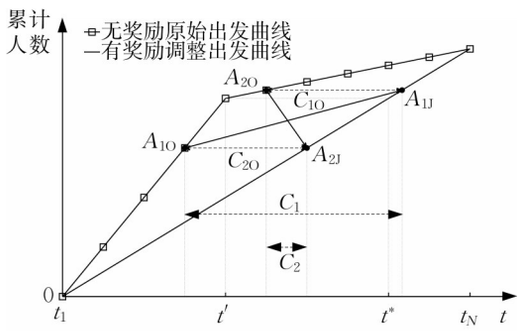


图4 出发时间偏移的向后调整模式

Fig.4 Backward adjustment mode regarding commuters' departure time offsets

在模式1中,若存在一名出行者的出发时间从A_{2O}向后调整到A_{2J},则至少存在另1名出行者调整其出发时间从A_{1O}至A_{1J}以维持均衡状态。假设其余出行者出行顺序不变,由图4可知,与典型模式相比,$C_1+C_2=C_{1O}+C_{2O}$,即向后调整模式下,是否保证出行者到达时间不变均不影响总出发时间偏移量的大小。

在模式2中,部分出行者向后调整出发时间、其余出行者向前调整。相应地,出行者可划分为3类:向前调整的Ⅰ类出行者、受Ⅰ类影响而向后调整的Ⅱ类出行者,以及不受影响向后调整的Ⅲ类出行者。与模式1类似,模式2中可能存在多名Ⅰ类和Ⅱ类出行者。为简化计算,在此讨论1名Ⅰ类和1名Ⅱ类出行者的情况,如图5所示。A_{1O}、A_{2O}、A_{3O}为无奖励原始出发时间,A_{1J}、A_{2J}、A_{3J}为有奖励调整出发时间。

图5中,Ⅰ类出行者将出发时间从A_{1O}调整至A_{1J},Ⅱ类出行者将出发时间从A_{2O}调整至A_{2J}。显然,$C_1+C_2>C_{1O}+C_{2O}$,因此任意出行者向前调整出发时间将导致总出发时间偏移量增加。

综上所述,模式1的总出发时间偏移量相同,且小于模式2,因此模式1所需预算更少。如图3所示的典型模式在实施奖励前后出行者的到达时间不变,能最大程度减少对出行者的影响,且奖励方案易

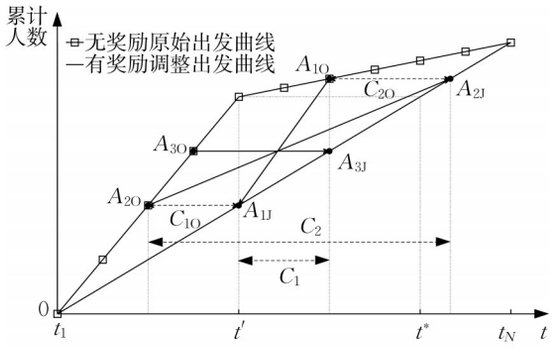


图5　出发时间偏移的“部分人向后调整,其他人向前调整”模式

Fig.5　“Backward adjustment for some, forward adjustment for others” mode regarding commuters’ departure time offsets

于理解,实施难度低,故接受度高。因此,选择“典型”模式,并基于此计算奖励方案。

根据式(2)、(5),可以计算得到

$$T_0(t_0)=\begin{cases}\beta t_0/(\alpha-\beta), t_0\in[t_1, t'] \\ \gamma(N/c-t_0)/(\alpha+\gamma), t_0\in(t', t_N]\end{cases} \tag{15}$$

在SO状态下的“典型”模式中,需满足

$$C(t)=T_0(t_0(t)) \tag{16}$$

则$t_0(t)$与t的关系为

$$t_0(t)=\begin{cases}(\alpha-\beta)t/\alpha, t\in[t_1, t^*] \\ (\alpha+\gamma)t/\alpha-\gamma N/(\alpha c), t\in(t^*, t_N]\end{cases} \tag{17}$$

将式(17)代入式(15),计算得到SO状态下的出行者出发时间偏移量为

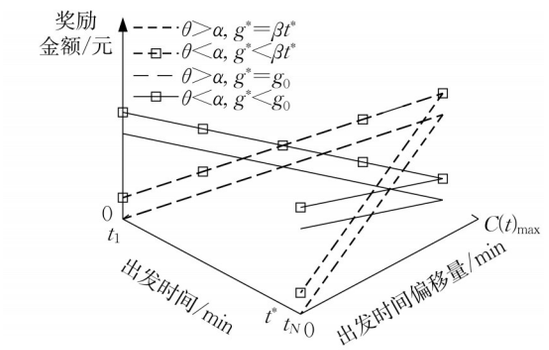
$$C(t)=T_0(t_0(t))=\begin{cases}\beta t/\alpha, t\in[t_1, t^*] \\ -\gamma t/\alpha+\gamma N/(\alpha c), t\in(t^*, t_N]\end{cases} \tag{18}$$

随后,将等式(11)、(18)代入式(10)中,可得达到SO状态下所需的最优时变奖励方案为

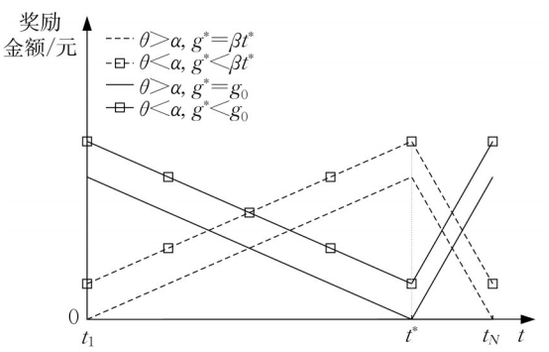
$$J(t)=\begin{cases}-(\alpha-\theta)\beta t/\alpha+\beta t^*-g^*, t\in[t_1, t^*] \\ (\alpha-\theta)\gamma(t-t^*)/\alpha+\theta\beta t^*/\alpha-g^*, t\in(t^*, t_N]\end{cases} \tag{19}$$

$J(t)$中的常数项数值需要保证奖励的非负性。当$\theta<\alpha$时,需满足$g^*\leqslant\theta\beta t^*/\alpha$,假设$g_0=\theta\beta t^*/\alpha$,可得$g^*\leqslant g_0$;当$\theta>\alpha$时,需满足$g^*<\beta t^*$。

最优奖励方案金额与单位行驶时间成本、早到/晚到单位时间成本等成本参数有关。当成本参数的单位为元·min^{-1}时,最优奖励方案的一般形式如图6所示。该形式不涉及成本参数的具体数值,仅用于说明结构特征。注意$\theta=\alpha$时,由式(19)可得,奖励金额恒为常数,具体将在后文讨论。



a 奖励金额与出发时间、出发时间偏移量之间的关系



b 奖励金额与出发时间之间的关系

图6　最优奖励方案示意

Fig.6　Schematic diagram of optimal incentive scheme

根据图6,最优奖励方案的形式与α和θ的相对大小有关。当$\theta<\alpha$时,奖励方案呈“V”型,在高峰期拥堵开始和即将结束的阶段设置高额奖励,引导中间时段出行者向两端分散,实现“错峰填谷”。当$\theta>\alpha$时,最优奖励方案呈倒“V”型,奖励金额在期望到达时间处最高,向两端线性递减。特别地,当$\theta=\alpha$时,奖励金额为常数。因此,可根据预期出发时间偏移量大小设置奖励金额,从而促进出行者调整出发时间至预期状态。

SO状态下$D(t)$恒为c,故达到SO状态所需预算为

$$M^*=|\alpha-\theta|\delta N^2/(2c\alpha) \tag{20}$$

此时,当$\theta<\alpha$时,均衡出行成本$g^*=g_0$;当$\theta>\alpha$时,均衡出行成本$g^*=\beta t^*$。

当$\alpha=\theta$时,由式(19)可得,$J(t)$始终为常数,其大小与总预算有关,假设总预算为M,则可得到$J(t)=M/N$,相应地,均衡出行成本$g^*=\beta t^*-M/N$。因此,只要$M>0$,出行者均衡状态的出行成

本g^*小于出行者不改变出发时间的成本βt^*(见式(6)),此时出行者倾向于改变出发时间。因此,当$\alpha=\theta$时,考虑出发时间偏移量的奖励方案不存在预算约束。

2.2 考虑预算约束的奖励方案

中小型出行服务公司难以提供较高预算,无法实施如图6所示的奖励方案。为保证奖励方案的适应性、合理性和IBTDM项目的持续运营,进一步求解预算小于M^*情况下的最优奖励方案。

整体而言,系统总出行成本与预算的差值等于所有出行者的实际出行成本,有

$$\int_{t_1}^{t_N} D(u)\phi(u)\mathrm{d}u-\int_{t_1}^{t_N} D(u)J(u)\mathrm{d}u=Ng \tag{21}$$

因此,系统总出行成本取最小值等价于出行者的均衡广义出行成本取最小值,即g取最小值。

在预算不充足的情况下,仍采用"典型"出发时间调整模式,出行者保持原始到达时间不变。与预算充足情况不同,此时奖励预算无法完全消除排队,$Z(t)=t$不再成立。参考预算充足情况下$T_0(t_0(t))$与t的关系(见式(18)),可以得到预算不充足情况下$T_0(t_0(t))$与$Z(t)$的关系为

$$T_0(t_0(t))=\begin{cases}\beta Z(t)/\alpha, t\in[t_1,t']\\ -\gamma Z(t)/\alpha+\gamma N/(\alpha c), t\in(t',t_N]\end{cases} \tag{22}$$

在预算不充足时,奖励方案$J(t)=\phi(t)-g$可拆分为

$$J(t)=\max\{[\kappa(t)+\theta T_0(t_0(t))-g],0\}+\phi(t)-\max[\kappa(t)+\theta T_0(t_0(t)),g] \tag{23}$$

将式(23)代入式(12)中,即可得到预算M与出发率$D(t)$之间的关系为

$$\int_{t_1}^{t_N} D(u)\max\{[\kappa(u)+\theta T_0(t_0(t))-g],0\}\mathrm{d}u+\int_{t_1}^{t_N} D(u)\{\phi(u)-\max[\kappa(u)+\theta T_0(t_0(t))-g]\}\mathrm{d}u=M \tag{24}$$

等式(24)可以拆分为两部分:

$$\pi_1=\int_{t_1}^{t_N} D(u)\max\{[\kappa(u)+\theta T_0(t_0(t))-g],0\}\mathrm{d}u \tag{25}$$

$$\pi_2=\int_{t_1}^{t_N} D(u)\{\phi(u)-\max[\kappa(u)+\theta T_0(t_0(t))-g]\}\mathrm{d}u \tag{26}$$

π_1、π_2分别非负。其中,π_1随g增加而单调下降,在给定预算M的情况下,当π_2取最小值时g取最小值。因此,根据式(26),满足

$$\phi(t)=\max[\kappa(t)+\theta T_0(t_0(t))-g,0] \tag{27}$$

g可取得最小值。因此,在给定预算M时,使得g取最小值,即系统总出行成本最小的奖励方案应满足

$$J(t)=\max[\kappa(t)+\theta T_0(t_0(t))-g,0] \tag{28}$$

根据$\kappa(t)$的定义式(11)和$T_0(t_0(t))$与$Z(t)$的关系式(22),可知

$$\kappa(t)+\theta T_0(t_0(t))=\begin{cases}-(\alpha-\theta)\beta Z(t)/\alpha+\beta t^*, t\in[t_1,t']\\ (\alpha-\theta)\gamma Z(t)/\alpha-\gamma t^*+\theta\gamma N/(\alpha c), t\in(t',t_N]\end{cases} \tag{29}$$

基于瓶颈模型先进先出原则,$Z(t)$随t单调递增。$\kappa(t)+\theta T_0(t_0(t))$随$t$的单调性与$\alpha$和$\theta$的相对大小有关,相应地,$J(t)$的形式也不相同。由2.1节可知,当$\alpha=\theta$时,考虑出发时间偏移量的奖励方案不存在预算约束,因此本节不再进一步说明。接下来分别讨论$\theta<\alpha$和$\theta>\alpha$ 2种情况。

2.2.1 $\theta<\alpha$

由式(29)可知,$\kappa(t)+\theta T_0(t_0(t))$在定义域$[t_1,t']$随$t$单调递减,在定义域$(t',t_N]$随$t$单调递增,则存在$t_s\in[t_1,t']$和$t_r\in(t',t_N]$,使得

$$\kappa(t_s)+\theta T_0(t_0(t_s))=\kappa(t_r)+\theta T_0(t_0(t_r))=g \tag{30}$$

式中:t_s和t_r分别为奖励结束和再次开始实施的时刻。根据$\kappa(t)+\theta T_0(t_0(t))$单调性及其与奖励的关系式(28),当$t\in[t_s,t_r]$时,奖励为

$$J(t)=0 \tag{31}$$

当$t\in[t_1,t_s)\cup(t_r,t_N]$时,奖励为

$$J(t)=\kappa(t)+\theta T_0(t_0(t))-g>0 \tag{32}$$

根据出行成本的定义式(6)以及出行成本与奖励的关系式(8),可得奖励公式为

$$J(t)=\alpha T(t)+\kappa(t)+\theta T_0(t_0(t))-\theta T(t)-g \tag{33}$$

结合式(32)、(33),当$t\in[t_1,t_s)\cup(t_r,t_N]$时,需满足

$$T(t)=0, Z(t)=t \tag{34}$$

综上所述,考虑$\kappa(t)+\theta T_0(t_0(t))$与$Z(t)$的关系式(29),在给定预算$M$时,可以求得最小化系统总行驶时间(total system travel time,TSTT)的最优奖励方案为

$$J(t)=\begin{cases}-(\alpha-\theta)\beta(t-t_s)/\alpha, t\in[t_1,t_s)\\ 0, t\in[t_s,t_r]\\ (\alpha-\theta)\gamma(t-t_r)/\alpha, t\in(t_r,t_N]\end{cases} \tag{35}$$

其中,系统总行驶时间为系统内所有出行者的出行时间之和。在该奖励方案下,根据均衡状态下广义

出行成本 $G(t)=\kappa(t)+\theta C(t)+\alpha T(t)-J(t)$ 在任意时刻相等,可得出发率为

$$D(t)=\begin{cases}c, t\in[t_1,t_s]\cup[t_r,t_N]\\ \alpha c/(\alpha-\beta), t\in(t_s,t')\\ \alpha c/(\alpha+\gamma), t\in(t',t_r)\end{cases} \tag{36}$$

当 $t_1=0$ 时,根据式(12)、(36)可计算得到

$$t_s=\sqrt{2\alpha\delta M/[c\beta^2(\alpha-\theta)]}$$

$$t_r=N/c-\sqrt{2\alpha\delta M/[c\gamma^2(\alpha-\theta)]}$$

实施奖励方案后,系统总行驶时间可以表示为

$$T_{tatol}=M/(\alpha-\theta)-N\sqrt{2\delta M/[c\alpha(\alpha-\theta)]}+\delta N^2/(2\alpha c) \tag{37}$$

2.2.2　$\theta>\alpha$

$\kappa(t)+\theta T_0(t_0(t_r))$ 在定义域 $[t_1,t']$ 上随 t 单调递增,在定义域 $(t',t_N]$ 上随 t 单调递减,则存在某 $t_s\in[t_1,t']$ 和 $t_r\in(t',t_N]$,满足如下条件:

$$\kappa(t_s)+\theta T_0(t_0(t_s))=\kappa(t_r)+\theta T_0(t_0(t_r))=g \tag{38}$$

t_s 和 t_r 分别为奖励开始和结束实施的时刻。类似于 $\theta<\alpha$,可求得在给定预算 M 时,最小化系统总行驶时间的奖励方案为

$$J(t)=\begin{cases}(\theta-\alpha)\beta(t-t_s)/\alpha, t\in(t_s,t']\\ 0, t\in[t_1,t_s]\cup[t_r,t_N]\\ -(\theta-\alpha)\gamma(t-t_r)/\alpha, t\in(t',t_r)\end{cases} \tag{39}$$

相应出发率为

$$D(t)=\begin{cases}\alpha c/(\alpha-\beta), t\in[t_1,t_s]\\ c, t\in(t_s,t_r)\\ \alpha c/(\alpha+\gamma), t\in[t_r,t_N]\end{cases} \tag{40}$$

当 $t_1=0$ 时,根据式(12)、(40)可计算得到

$$t_s=\gamma(\alpha-\beta)\{N/c-\sqrt{2\alpha M/[c\delta(\theta-\alpha)]}\}\cdot[\alpha(\beta+\gamma)]^{-1}$$

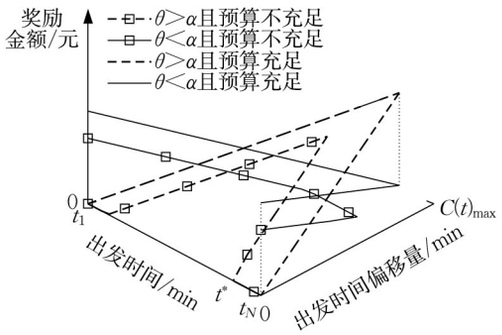
$$t_r=N/c+\{1-\alpha\beta/[\delta(\alpha-\beta)]\}t_s$$

相应的系统总行驶时间可以表示为

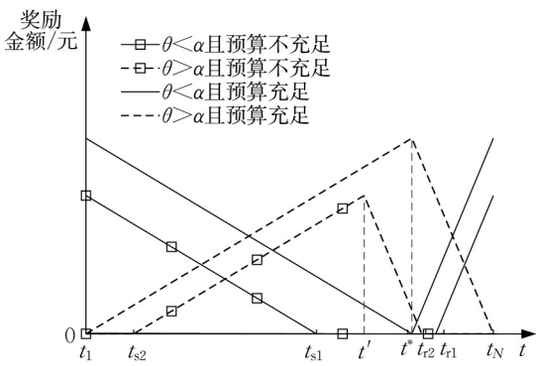
$$T_{tatol}=\delta N^2/(2c\alpha)-M/(\theta-\alpha) \tag{41}$$

上述推导分别得到了 $\theta<\alpha$ 和 $\theta>\alpha$ 情况下考虑出发时间偏移量的最优奖励方案,当成本参数的单位为元·min^{-1}时,主要形式如图7所示。实线和方形实线、虚线和方形虚线分别代表了 $\theta<\alpha$、$\theta>\alpha$ 预算不充足和充足情况下的奖励方案。

根据图7,在预算不充足、$\theta<\alpha$ 时,最优奖励方案呈“U”型,奖励分布在高峰拥堵时段的两端;当



a 奖励金额与出发时间、出发时间偏移量之间的关系



b 奖励金额与出发时间之间的关系

图7　$\theta<\alpha$ 和 $\theta>\alpha$ 情况下考虑预算约束的最优奖励方案示意

Fig.7　Schematic diagram of optimal incentive schemes considering budget in cases of $\theta<\alpha$ and $\theta>\alpha$

$\theta>\alpha$ 时,最优奖励方案呈现为分布在高峰时段中间的倒“V”型。

在考虑预算约束情况下,上述奖励方案实施后排队的形成与消散过程如图8所示。

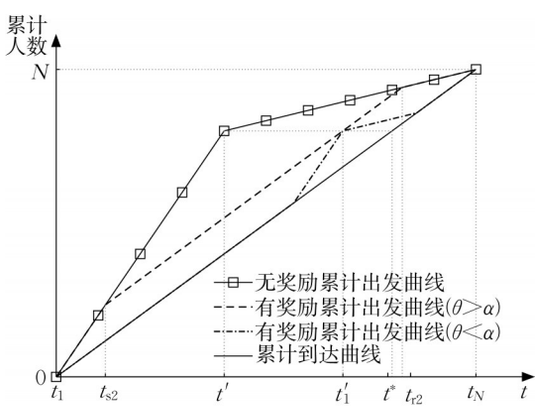


图8　瓶颈模型均衡状态示意

Fig.8　Schematic diagram of equilibrium states in bottleneck model

2.3　考虑渗透率的奖励方案

相较于拥堵收费、停车收费等基于惩罚的交通

需求管理策略,IBTDM的显著特性为出行者自愿参与。受限于宣传渠道、出行者信息获取不匹配、有限的宣传成本和奖励金额等,并非所有出行者都知晓项目并参与。因此,渗透率是设计奖励方案的重要约束。

假设渗透率p为参与IBTDM项目的出行者比例,即IBTDM项目有Np个参与者,基于2.2节中的预算约束奖励方案,求解考虑渗透率和预算双重约束的奖励方案,以提高奖励方案适用性。

2.3.1 $\theta<\alpha$

有限预算时,奖励优先分配在高峰时段两端。在渗透率约束下,这等价于最多激励Np个参与者调整出发时间,因此当预算足以覆盖这部分人群时,渗透率成为限制奖励方案的主要约束。此时奖励方案为

$$J(t)=\begin{cases}-(\alpha-\theta)\beta(t-t_s)/\alpha, t\in[t_1,t_s)\\0, t\in[t_s,t_r]\\(\alpha-\theta)\gamma(t-t_r)/\alpha, t\in(t_r,t_N]\end{cases} \tag{42}$$

非参与者在高峰中段形成新均衡状态,t_s和t_r不再与奖励预算相关,而是与渗透率相关,$t_s=\delta Np/(c\beta)$,$t_r=N/c-\delta Np/(c\gamma)$。

根据式(12),在渗透率p的情况下实施最优奖励方案所需的最小预算为

$$M_{p^*}=(\alpha-\theta)\delta N^2p^2/(2c\alpha) \tag{43}$$

M_{p^*}随着渗透率的增加而单调递增,这意味着渗透率越高出行服务商就应设置更高的预算来缓解拥堵。

当预算不足以将Np个参与者推向高峰时段两端时,即$0<M<M_{p^*}$,限制奖励方案的主要约束依旧为预算,最优奖励方案与2.2.1节中式(35)相同。

在预算M情况下,最优渗透率$p^*=\sqrt{2\alpha cM/[(\alpha-\theta)\delta N^2]}$,即当预算为$M$时,IBTDM公司应该将项目的渗透率控制在$p^*$,以避免预算浪费。

2.3.2 $\theta>\alpha$

当$\theta>\alpha$时,有限预算下优先在高峰中间设置奖励,鼓励该时段出行者更多地调整出发时间。在渗透率约束下,这等价于最多鼓励Np个参与者调整出发时间。因此,当预算足以激励这部分人群时,渗透率成为限制奖励方案的主要约束。奖励方案可表示为:

$$J(t)=\begin{cases}(\alpha-\theta)\beta(t-t_s)/\alpha, t\in(t_s,t']\\0, t\in[t_1,t_s]\cup[t_r,t_N]\\-(\alpha-\theta)\gamma(t-t_r)/\alpha, t\in[t',t_r)\end{cases} \tag{44}$$

此时,t_s、t_r以及t'受限于渗透率,具体为:

$$t_s=\delta(\alpha-\beta)(N-Np)/(\alpha\beta c)$$
$$t_r=N/c+[1-\alpha\beta/\delta(\alpha-\beta)]t_s$$
$$t'=\delta N/(c\beta)-\beta t_s/(\alpha-\beta)$$

相应地,渗透率p时实施最优奖励方案所需的最小预算为

$$M_{p^*}=(\theta-\alpha)\delta N^2p^2/(2\alpha c) \tag{45}$$

当$0<M<M_{p^*}$时,限制奖励方案的主要约束依旧为预算,最优奖励方案与2.2.2节中式(39)相同。在预算M情况下,最优渗透率$p^*=\sqrt{2\alpha cM/[(\theta-\alpha)\delta N^2]}$。

2.3.3 $\alpha=\theta$

当$\alpha=\theta$时,由2.1节可知,考虑出发时间偏移量的奖励方案不存在预算约束,因此渗透率恒为限制奖励方案的主要约束。若奖励预算为M且存在Np个参与者,则$J(t)=M/(Np)$。此时,奖励金额固定,参考如图8所示奖励作用下的均衡状态,奖励时段设置在高峰期两端,可以完全消除该区间的瓶颈排队,拥堵缓解效果较好。

3 结果分析

Sun等[8]探究了基于出发时间的奖励方案。本研究将出发时间偏移量成本纳入奖励方案设计,求得了考虑出发时间偏移量的奖励方案。接下来,将进一步阐明2种奖励方案在形式、缓解拥堵效果上的区别及适用性。

3.1 考虑出发时间偏移量的奖励方案与基于出发时间的奖励方案形式对比

基于出发时间的奖励方案在预算充足时呈“V”型,在预算不充足时呈“U”型,这与$\theta<\alpha$条件下考虑出发时间偏移量的奖励方案形式相似。上述2类奖励方案对比结果如图9a所示。此外,图9b进一步对比了$\theta>\alpha$时考虑出发时间偏移量的奖励方案与基于出发时间的奖励方案。为便于比较,图9中预算不充足时奖励曲线具有相同总预算。

由图9a可知,当预算充足时,考虑出发时间偏移量的奖励方案($\theta<\alpha$)在t^*时刻的奖励金额为零,其余时刻的奖励金额均少于基于出发时间的奖励方

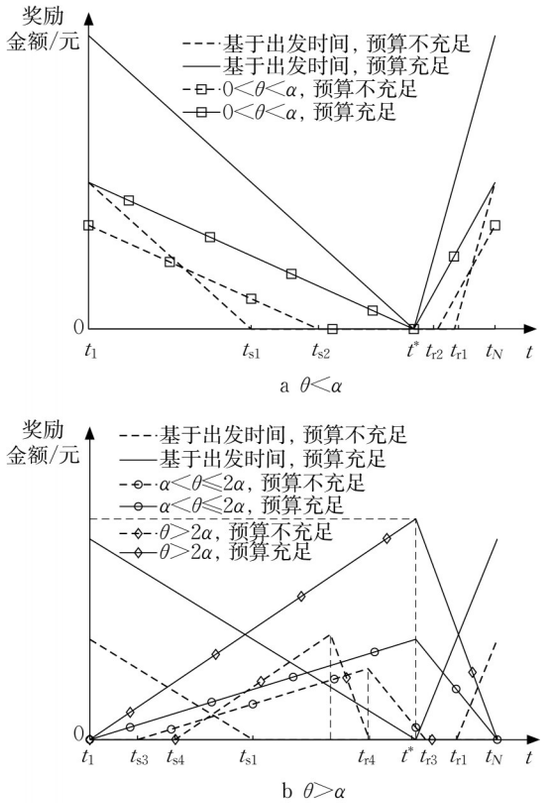


图9　考虑出发时间偏移量与基于出发时间的奖励方案对比

Fig.9　Comparison of incentive schemes considering departure time offset and based on departure time

案,因而所需预算较小。这在一定程度上说明了基于出发时间的奖励方案忽视了原始出行行为的影响,导致部分奖励未能激励出行者改变出行行为,即存在预算浪费。当预算不充足时,相同预算下考虑出发时间偏移量的奖励方案可在更长时段内减少排队拥堵。

如图9b所示,与$\theta<\alpha$情况不同,当$\theta>\alpha$时,考虑出发时间偏移量的最优奖励方案在预算充足和不充足时均呈倒"V"型,任意时刻的奖励金额并不总是小于基于出发时间的最优奖励方案。奖励方案所需预算大小为奖励曲线与横坐标轴(时间)的面积。由图9b可知,当$\theta>2\alpha$时,考虑出发时间偏移量的奖励方案的最优预算大于基于出发时间的奖励方案的最优预算。

3.2　考虑出发时间偏移量的奖励方案与基于出发时间的奖励方案效果对比

为评估2类奖励方案对系统拥堵缓解的有效性,为交通管理部门选择奖励方案提供依据,计算了当α=1 元·min^{-1},β=0.5 元·min^{-1},γ=2 元·min^{-1},c=20 辆·min^{-1}以及N=2 000 辆时,不同θ下奖励方案总预算与实施后系统总行驶时间的关系,如图10所示。上述α、β、γ的取值参考Small提出的关系[15],即$\gamma>\alpha>\beta$。一般而言,若符合$\gamma>\alpha>\beta$关系,α、β、γ具体取值并不影响奖励方案形式及缓解拥堵趋势。根据3.1节分析,考虑出发时间偏移量的奖励方案形式与θ和α的相对大小有关,且主要分为$\theta<\alpha$、$\alpha<\theta\leqslant2\alpha$、$\theta>2\alpha$ 3类情况。本案例中设定α=1 元·min^{-1},θ取值范围为0.2～2.1,以全面考察3类情况下考虑出发时间偏移量的奖励方案效果。

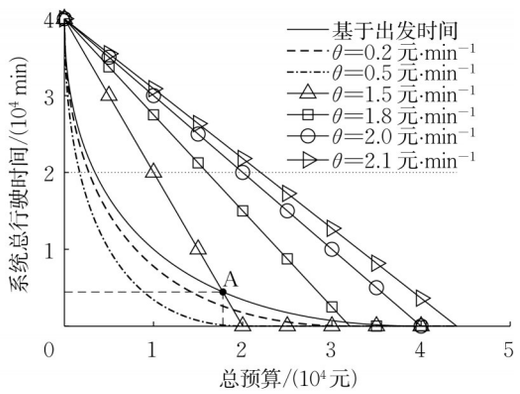


图10　不同单位出发时间偏移成本下系统总行驶时间与预算的关系

Fig.10　Relationship of total system travel time and total budget for different unit departure time offset costs

由图10可见,当$\theta>\alpha$时,系统总行驶时间随着预算线性递减,表明单位预算所带来的边际效应使系统总行驶时间减小量恒定。这说明预算充足的大型公司在缓解排队上具有优势。当$\theta<\alpha$时,系统总行驶时间随着预算递减且边际效应递减,说明在预算较低时,单位预算能够起到更大的管控效果,从而奖励预算低的小型出行服务商,使其更具有优势,抑制垄断。

在相同预算情况下,相较于基于出发时间的奖励方案(见图10中实线):当$\theta<\alpha$时,考虑出发时间偏移量的奖励方案能实现更低的系统总行驶时间,且所需的能够完全消除排队的最优预算较少;当$\alpha<\theta\leqslant2\alpha$时,存在某一预算节点,如图10中$\theta$=1.5 元·$\mathrm{min}^{-1}$时的点A,在预算大于此节点时,考虑出发时间偏移的奖励方案实现的系统总行驶时间较小;当$\theta>2\alpha$时,考虑出发时间偏移量的奖励方案实现的系统总行驶时间更大。

综上所述,单位出发时间偏移成本θ和单位行驶时间成本α的相对大小对考虑出发时间偏移量的

最优奖励方案形式及拥堵缓解效果有影响,因此IBTDM公司的管理者需正确预估出行者的单位出发时间偏移成本以及单位行驶时间成本,以合理利用预算,完成预期目标。

4 结论

(1)考虑出发时间变化的奖励方案的形式,与单位出发时间偏移成本θ和单位行驶时间成本α的相对大小有关。当$\theta<\alpha$时,奖励方案预算充足时呈“V”型,预算不充足时呈“U”型;当$\theta>\alpha$时,奖励方案预算充足时呈分布在整个高峰时段的倒“V”型,预算不充足时呈分布在高峰时段中间的倒“V”型。

(2)在预算充足、渗透率100%情况下,奖励方案可完全消除高峰期排队。当$\theta<\alpha$时,奖励方案减少系统总行驶时间的效果边际递减,低预算下单位预算能够带来更高收益。当$\theta>\alpha$时,边际效果不变。

(3)相对于基于出发时间的奖励方案,考虑出发时间偏移量的奖励方案缓解系统拥堵的效果优劣取决于θ和α的相对大小。在θ较小时,采用考虑出发时间偏移量的奖励方案效果往往较好。当θ处于中等水平时($\alpha<\theta\leqslant 2\alpha$),小型公司采取基于出发时间的奖励方案,大型公司采取考虑出发时间偏移量的奖励方案更为合适。在θ较大($\theta>\alpha$)时,IBTDM公司采取基于出发时间的奖励方案更为明智。一般认为,$\theta<\alpha$符合实际场景,此时考虑出发时间偏移量的奖励方案更加具有应用价值,但该假设仍需进一步验证。

作者贡献声明:

肖 琳:模型构建,论文撰写与修改。

吴纪奘:方法思路指导,模型构建。

孙 剑:选题概念确定,论文审阅。

田 野:方法思路构建,论文审阅与修改。

参考文献:

[1] HU Xianbiao, ZHU Xiaoyu, CHIU Y-C , *et al*. Will information and incentive affect traveler's day-to-day departure time decisions? An empirical study of decision making evolution process [J]. International Journal of Sustainable Transportation, 2020, 14(6): 403.

[2] SRINIVASAN A. Leveraging smartphones to incentivize city-wide, energy efficient transportation [D]. Cambridge: Massachusetts Institute of Technology, 2017.

[3] COHEN Y. Commuter welfare under peak-period congestion tolls: who gains and who loses? [J]. International Journal of Transport Economics, 1987, 14(3): 239.

[4] ARNOTT R, DE PALMA A, LINDSEY R. Economics of a bottleneck [J]. Journal of Urban Economics, 1990, 27(1): 111.

[5] ARNOTT R, DE PALMA A, LINDSEY R. A structural model of peak-period congestion: a traffic bottleneck with elastic demand [J]. The American Economic Review, 1993, 83(1):161.

[6] ARNOTT R, DE PALMA A, LINDSEY R. The welfare effects of congestion tolls with heterogeneous commuters [J]. Journal of Transport Economics and Policy, 1994, 28(2):139.

[7] ROUWENDAL J, VERHOEF E T, KNOCKAERT J. Give or take? Rewards versus charges for a congested bottleneck [J]. Regional Science and Urban Economics, 2012, 42(1/2): 166.

[8] SUN Jian, WU Jiyan, XIAO Feng, *et al*. Managing bottleneck congestion with incentives [J]. Transportation Research, Part B: Methodological, 2020, 134:143.

[9] XIAO Lin, WU Jiyan, TIAN Ye, *et al*. Optimizing budget allocation for incentive-based active travel demand management solutions [J]. Journal of the Transportation Research Record, 2021, 2675(2): 1245.

[10] WU Jiyan, TIAN Ye, SUN Jian, *et al*. Public or private? Optimal organization for incentive-based travel demand management [J]. Transportation Research, Part E: Logistics and Transportation Review, 2023, 174:103137.

[11] 孙剑, 吴纪奘, 李政, 等. 市场渗透率约束下的拼车奖励方案优化模型 [J]. 华南理工大学学报(自然科学版), 2024, 52(6):12.
SUN Jian, WU Jiyan, LI Zheng, *et al*. Optimization of incentive-based ridesharing scheme with the constraint of market penetration [J]. Journal of South China University of Technology (Natural Science), 2024,52(6):12.

[12] TIAN Ye, LI Yudi, SUN Jian. Stick or carrot for traffic demand management? Evidence from experimental economics [J]. Transportation Research, Part A: Policy and Practice, 2022, 160:235.

[13] ETTEMA D, KNOCKAERT J, VERHOEF E. Using incentives as traffic management tool: empirical results of the “peak avoidance” experiment [J]. Transportation Letters, 2010, 2(1): 39.

[14] LI Z C, HUANG H J, YANG H. Fifty years of the bottleneck model: a bibliometric review and future research directions [J]. Transportation Research, Part B: Methodological, 2020, 139:311.

[15] SMALL K A. A discrete choice model for ordered alternatives [J]. *Econometrica*, 1987, 55(2): 409.