文章编号：0253-374X(2025)10-1518-09 **DOI**：10.11908/j.issn.0253-374x.24168

正交各向异性岩体热–力耦合行为的半解析解

赵勇智，石振明，彭　铭，周　洁
（同济大学 土木工程学院，上海 200092）

摘要：针对能源桩、地热发电等工程中普遍存在的岩体热–力耦合行为，引入涵盖模量各向异性、线性热膨胀系数各向异性及导热各向异性的控制方程；再根据变换微分求积法（TDQM）离散规则，在深度方向和时间维度上离散偏微分方程；考虑多种力荷载、热源及温度荷载形式，并引入内部连续条件和边界条件，得到层状正交各向异性岩体的热–力耦合解；通过算例验证理论正确性，并进行参数敏感性分析，为层状正交各向异性岩体热–力耦合行为分析提供依据。

关键词：变换微分求积法；正交各向异性；导热各向异性；热–力耦合；敏感性分析
中图分类号：TU443　　**文献标志码**：A

A Semi-Analytical Solution for Coupled Thermo-Mechanical Behaviors of Cross-Anisotropic Geotechnical Media

ZHAO Yongzhi, *SHI Zhenming*, *PENG Ming*, *ZHOU Jie*
(College of Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: To address the thermal-mechanical behaviors of geotechnical media in engineering including energy piles and geothermal power generation, the governing equations covering the anisotropy of moduli, linear thermal expansion coefficients and thermal conductivity are introduced. Then, the partial differential equations are discretized along depth and time domain based on the discretization rules of the transformed differential quadrature method (TDQM). Various load forms of mechanical loads, heat sources and temperature loads are considered, and the coupled thermal-mechanical solution is obtained after introducing the internal continuity conditions and boundary conditions. The proposed theory is verified through case studies. Finally, a sensitivity analysis is performed to provide a basis for the analysis of thermal-mechanical coupling behavior of layered cross-anisotropic media.

Keywords: transformed differential quadrature method (TDQM); cross-anisotropy; anisotropy of thermal conductivity; thermal-mechanical coupling; sensitivity analysis

随着核废料处置库、能源桩基、地热发电等工程的逐步发展和深入，越来越多的实际工程需考虑岩体内部温度场–应力场之间的相互作用[1-2]。Small和Booker[3]利用有限层法得到了埋置热源岩体的半耦合热弹性解。Smith和Booker[4]采用边界元法分析了内部有圆形孔洞的无限半空间的瞬态热–力耦合行为。Carter和Booker[5]考虑应变场和温度场的完全耦合，通过有限元法求解了热弹性控制方程，并指出半耦合理论在大多数岩土问题中已能提供足够的精度。Zhong和Geng[6]考虑材料性质随温度变化，应用传递矩阵法对层状热弹性介质进行了应力分析。王路君和艾智勇[7]采用解析层元法，得到了笛卡尔坐标下弹性半空间中埋置热源时热–力耦合响应的解析解答。Zhao和Ai[8]针对层状弹性介质热–力耦合问题，考虑多种热–力荷载形式，获得了其变换微分求积解答。

以上研究均基于各向同性假设，而自然界中，岩体因形成过程往往表现出正交各向异性的性质，这一性质会影响荷载作用下岩体的时变行为。Hayati等[9]应用势函数法研究了横观各向同性弹性半空间的瞬态热响应。Ai等[10]应用扩展的精细积分法对横观各向同性介质的瞬态热响应进行了分析，并研究了松弛时间对瞬态热弹性响应的影响。

纵观既有研究，正交各向异性介质热–力耦合行为研究相对较少，且多针对瞬态动力响应，而非探讨长期温度荷载、热流和衰变热源下的热–力耦合行

收稿日期：2024-05-16
基金项目：国家资助博士后研究人员计划(GZB20240534)，上海市超级博士后计划(2023620)，国家重点研发计划(2023YFC3008300)，国家自然科学基金–联合基金重点项目(U23A2044)
第一作者：赵勇智，工学博士，博士后，主要研究方向为能源地下结构和多孔介质力学。E-mail：zyz@tongji.edu.cn
通信作者：石振明，教授，工学博士，博士生导师，主要研究方向为岩体力学和工程地质。
E-mail：94026@tongji.edu.cn

论文拓展介绍

为。这将导致难以对能源桩基、核废料处置库等实际工程中岩体的长期温度及位移变化进行快速准确的评估，从而制约了能源地质工程的发展和相关技术的应用。另一方面，微分求积法自提出以来已被用于热传导、结构动力学等领域[11-12]，是一种高效的数值计算方法。然而，也有学者指出其局限性，即随离散节点增加，代数方程数目迅速增加，导致求解矩阵易出现病态[13]。针对此局限，本文提出变换微分求积法，大大减少代数方程数目和求解矩阵维数。

本文应用变换微分求积法，考虑介质热学和力学性质水平和竖直方向的差异，对层状正交各向异性介质的热–力耦合行为进行研究。在验证本文理论正确性后，探讨所提出方法的收敛性，并利用两种敏感性指标对相关参数敏感性进行分析，为核废料处置库、能源桩基、地热发电等工程中的岩体热–力耦合行为计算提供理论依据。

1　介质热–力耦合的变换微分求积解

1.1　基本控制方程

对于正交各向异性介质（如图1所示，介质可受到任意集中力F_N，均布荷载q_0，热通量Q及温度增量θ_0作用），柱坐标系中轴对称问题的平衡方程为

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r}+\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z}+\frac{\sigma_r-\sigma_\alpha}{r}=0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}+\frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r}+\frac{\sigma_{rz}}{r}=0 \tag{2}$$

式中：σ_r和σ_α分别为柱坐标系下的径向应力和环向应力；σ_{rz}为$r-z$平面上的切应力。

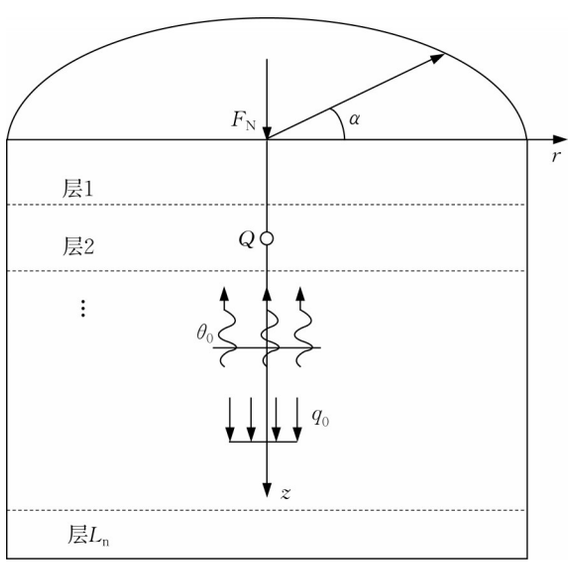

图1　多种荷载下正交各向异性介质

Fig. 1　Cross-anisotropic media subjected under various loads

考虑温度的影响，介质中各应力分量可以由位移和温度增量表示为

$$\sigma_r=c_{11}\frac{\partial u_r}{\partial r}+c_{12}\frac{u_r}{r}+c_{13}\frac{\partial u_z}{\partial z}-\beta_1\theta \tag{3}$$

$$\sigma_\alpha=c_{12}\frac{\partial u_r}{\partial r}+c_{11}\frac{u_r}{r}+c_{13}\frac{\partial u_z}{\partial z}-\beta_1\theta \tag{4}$$

$$\sigma_z=c_{13}\frac{\partial u_r}{\partial r}+c_{13}\frac{u_r}{r}+c_{33}\frac{\partial u_z}{\partial z}-\beta_3\theta \tag{5}$$

$$\sigma_{rz}=c_{44}\left(\frac{\partial u_r}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial r}\right) \tag{6}$$

式中：正交各向异性岩土材料的弹性参数包括$c_{11}=\lambda\varsigma(1-\varsigma\mu_{vh}^2)$，$c_{12}=\lambda\varsigma(\mu_h+\varsigma\mu_{vh}^2)$，$c_{13}=\lambda\varsigma\mu_{vh}(1+\mu_h)$，$c_{33}=\lambda(1-\mu_h^2)$，$c_{44}=G_v$，$\lambda=E_v/[(1+\mu_h)(1-\mu_h-2\varsigma\mu_{vh}^2)]$，$\varsigma=E_h/E_v$；$\beta_1=(c_{11}+c_{12})\alpha_1+c_{13}\alpha_3$，$\beta_3=2c_{13}\alpha_1+c_{33}\alpha_3$；$\alpha_1$和$\alpha_3$分别为水平向和竖向的线性热膨胀系数；$\theta$为温度增量。

介质竖直方向上的Fourier定律可以表示为

$$h_z=-K_z\frac{\partial \theta}{\partial z} \tag{7}$$

式中：h_z为竖直方向上某一截面单位时间内的热流量；K_z为竖直方向上的热传导系数。

根据能量守恒定律和Fourier定律，考虑介质在径向和竖直方向上导热性的差异，可将热传导定律表示为

$$\frac{\partial \theta}{\partial t}=\kappa_r\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial \theta}{\partial r}\right)+\kappa_z\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} \tag{8}$$

式中：$\kappa_r=K_r/C_0$，$\kappa_z=K_z/C_0$，它们分别为水平和竖向的热扩散系数；K_r为径向热传导系数；$C_0=\rho C$为

介质的体积比热,它是密度和比热容的乘积。

以位移为基本未知函数,将式(3)—(6)代入式(1)—(2)中,可得层状正交各向异性介质考虑温度效应时用位移表示的平衡方程:

$$c_{11}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{r^2}\right)u_r+c_{44}\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2}+(c_{13}+c_{44})\frac{\partial^2 u_z}{\partial r\partial z}-\beta_1\frac{\partial\theta}{\partial r}=0 \tag{9}$$

$$(c_{13}+c_{44})\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\right)\frac{\partial}{\partial z}u_r+c_{44}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)u_z+c_{33}\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}-\beta_3\frac{\partial\theta}{\partial z}=0 \tag{10}$$

1.2 层间矩阵求解

若应用传统微分求积法求解控制方程式(8)—(10),需在三个基本维度r、z和t进行离散。相应地,这会使得离散后的代数方程数量巨大。这也是诸多学者大多应用微分求积法求解一维问题的原因。在此,为减少代数方程数目,并提高计算效率,应用作者提出的变换微分求积法(transformed differential quadrature method,TDQM)求解该轴对称热-力耦合问题。为简化推导并减少离散后的代数方程数目,引入积分变换定理对控制方程进行初步处理。对于物理域内的函数$g(r,z,t)$,定义关于r的Hankel积分变换及逆变换分别为

$$\bar{g}^{(m)}(\xi,z,t)=\int_0^\infty g(r,z,t)J_m(\xi r)r\mathrm{d}r \tag{11}$$

$$g(r,z,t)=\int_0^\infty \bar{g}^{(m)}(\xi,z,t)J_m(\xi r)\xi\mathrm{d}\xi \tag{12}$$

式中:$\bar{g}^{(m)}(\xi,z,t)$是Hankel变换域中的对应函数,顶标"-"表示该函数在Hankel变换域中;ξ是关于r的Hankel变换参数;$J_m(\cdot)$是m阶Bessel函数。

对控制方程进行关于r的Hankel积分变换,可得如下偏微分方程:

$$-c_{11}\xi^2\bar{u}_r^{(1)}+c_{44}\frac{\partial^2\bar{u}_r^{(1)}}{\partial z^2}-(c_{13}+c_{44})\xi\frac{\partial\bar{u}_z^{(0)}}{\partial z}+\beta_1\xi\bar{\theta}^{(0)}=0 \tag{13}$$

$$(c_{13}+c_{44})\xi\frac{\partial\bar{u}_r^{(1)}}{\partial z}-c_{44}\xi^2\bar{u}_z^{(0)}+c_{33}\frac{\partial^2\bar{u}_z^{(0)}}{\partial z^2}-\beta_3\frac{\partial\bar{\theta}^{(0)}}{\partial z}=0 \tag{14}$$

$$\kappa_z\frac{\partial^2\bar{\theta}^{(0)}}{\partial z^2}-\kappa_r\xi^2\bar{\theta}^{(0)}-\frac{\partial\bar{\theta}^{(0)}}{\partial t}=0 \tag{15}$$

式中:各个因变量上标"(0)"和"(1)"分别代表该物理量经过了0阶和1阶Hankel变换。在以下推导中,为方便起见,将$\bar{u}_r^{(1)}$,$\bar{u}_z^{(0)}$和$\bar{\theta}^{(0)}$统一表示为$\bar{u}_r$,$\bar{u}_z$和$\bar{\theta}$。

将介质沿深度方向划分为L_n层,每层沿深度离散为N_z个采样点。将时间域离散为若干个时间增量步,每个增量步离散为N_t个节点,初始时刻的状态量已知。

根据TDQM离散规则[13],函数的一阶与二阶偏导可以用各个离散点上的函数值表示为

$$\left.\frac{\partial\bar{F}(\xi,z,t)}{\partial z}\right|_{z=z_i}=\sum_{k=1}^{N_z}A_{ik}\bar{F}(\xi,z_k,t),\quad i=1,2,\cdots,N_z \tag{16}$$

$$\left.\frac{\partial^2\bar{F}(\xi,z,t)}{\partial z^2}\right|_{z=z_i}=\sum_{k=1}^{N_z}A_{ik}^{(2)}\bar{F}(\xi,z_k,t),\quad i=1,2,\cdots,N_z \tag{17}$$

$$\left.\frac{\partial\bar{F}(\xi,z,t)}{\partial t}\right|_{t=t_j}=\sum_{k=1}^{N_t}B_{jk}\bar{F}(\xi,z,t_k),\ j=1,2,\cdots,N_t \tag{18}$$

$$\left.\frac{\partial^2\bar{F}(\xi,z,t)}{\partial t^2}\right|_{t=t_j}=\sum_{k=1}^{N_t}B_{jk}^{(2)}\bar{F}(\xi,z,t_k),\ j=1,2,\cdots,N_t \tag{19}$$

式中:A_{ik}和B_{jk}为一阶加权系数;$A_{ik}^{(2)}$和$B_{jk}^{(2)}$为二阶加权系数。加权系数可以由以下显式公式得到[14]:

$$A_{ij}=\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=1,k\neq i}^{N_z}\frac{1}{z_i-z_k}, & i=j\\ \displaystyle\frac{1}{z_i-z_j}\frac{\prod_{k=1,k\neq i}^{N_z}(z_i-z_k)}{\prod_{k=1,k\neq j}^{N_z}(z_j-z_k)}, & i\neq j\end{cases};\ A_{ij}^{(2)}=\sum_{k=1}^{N_z}A_{ik}A_{kj} \tag{20}$$

$$B_{ij}=\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=1,k\neq i}^{N_t}\frac{1}{t_i-t_k}, & i=j\\ \displaystyle\frac{1}{t_i-t_j}\frac{\prod_{k=1,k\neq i}^{N_t}(t_i-t_k)}{\prod_{k=1,k\neq j}^{N_t}(t_j-t_k)}, & i\neq j\end{cases};\ B_{ij}^{(2)}=\sum_{k=1}^{N_t}B_{ik}B_{kj} \tag{21}$$

于是,第n层介质任意深度z_i处在任意时刻t_j($j\neq1$)的广义状态量可以用该层内所有变量表示为

$$\sum_{k=1}^{N_z}A_{ik}^{(2)}\bar{u}_r\big|_{k,j,n}-\frac{c_{11,n}}{c_{44,n}}\xi^2\bar{u}_r\big|_{i,j,n}-\frac{c_{13,n}+c_{44,n}}{c_{44,n}}\xi\sum_{k=1}^{N_z}A_{ik}\bar{u}_z\big|_{k,j,n}+\frac{\beta_{1,n}}{c_{44,n}}\xi\bar{\theta}\big|_{i,j,n}=0 \tag{22}$$

$$\frac{c_{13,n}+c_{44,n}}{c_{44,n}}\xi\sum_{k=1}^{N_z}A_{ik}\bar{u}_r|_{k,j,n}-\xi^2\bar{u}_z|_{i,j,n}+\frac{c_{33,n}}{c_{44,n}}\sum_{k=1}^{N_z}A_{ik}^{(2)}\bar{u}_z|_{k,j,n}-\frac{\beta_{3,n}}{c_{44,n}}\sum_{k=1}^{N_z}A_{ik}\bar{\theta}|_{k,j,n}=0 \tag{23}$$

$$\kappa_{z,n}\sum_{k=1}^{N_z}A_{ik}^{(2)}\bar{\theta}|_{k,j,n}-\kappa_{r,n}\xi^2\bar{\theta}|_{i,j,n}-(B_{j1}\bar{\theta}|_{i,1,n}+\sum_{k=2}^{N_t}B_{jk}\bar{\theta}|_{i,k,n})=0 \tag{24}$$

式中：下标n表示参数值为第n层的介质参数。

将式(22)—(24)写成矩阵的形式：

$$\boldsymbol{K}_n\boldsymbol{W}_n=\boldsymbol{F}_n \tag{25}$$

$$\boldsymbol{K}_n=\begin{bmatrix}\widehat{\boldsymbol{A}}^{(2)}-\frac{c_{11,n}}{c_{44,n}}\xi^2\boldsymbol{I} & -\frac{c_{13,n}+c_{44,n}}{c_{44,n}}\xi\widehat{\boldsymbol{A}} & \frac{\beta_{1,n}}{c_{44,n}}\xi\boldsymbol{I}\\ \frac{c_{13,n}+c_{44,n}}{c_{44,n}}\xi\widehat{\boldsymbol{A}} & \frac{c_{33,n}}{c_{44,n}}\widehat{\boldsymbol{A}}^{(2)}-\xi^2\boldsymbol{I} & -\frac{\beta_{3,n}}{c_{44,n}}\widehat{\boldsymbol{A}}\\ 0 & 0 & \kappa_{z,n}\widehat{\boldsymbol{A}}^{(2)}-\kappa_{r,n}\xi^2\boldsymbol{I}-\widehat{\boldsymbol{B}}\end{bmatrix} \tag{26}$$

$$\boldsymbol{F}_n=\begin{bmatrix}0 & 0 & \hat{\boldsymbol{B}}\hat{\boldsymbol{\theta}}_n\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{27}$$

式中：$\boldsymbol{W}_n=[\boldsymbol{U}_{nr}\quad\boldsymbol{U}_{nz}\quad\boldsymbol{\theta}_n]^{\mathrm{T}}$为第$n$层介质待求的未知向量；$\hat{\boldsymbol{\theta}}_n=\left[\bar{\theta}|_{1,1,n},\bar{\theta}|_{2,1,n},\cdots,\bar{\theta}|_{N_z,1,n}\right]^{\mathrm{T}}$为第$n$层介质已知的初始时刻变量；各权系数矩阵由第$n$层的权系数构成，且与该层节点数目、深度坐标有关，矩阵上标“∩”和“∧”用于区分不同的权系数矩阵。各权系数矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1N_z}\\ A_{21} & A_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ A_{N_z1} & \cdots & & A_{N_zN_z}\end{bmatrix} \tag{28}$$

$$\boldsymbol{A}^{(2)}=\begin{bmatrix}A^2{}_{11} & A_{12}^2 & \cdots & A_{1N_z}^2\\ A^2{}_{21} & A_{22}^2 & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ A_{N_z1} & \cdots & & A_{N_zN_z}^2\end{bmatrix} \tag{29}$$

$$\widehat{\boldsymbol{A}}=\mathrm{diag}(\boldsymbol{A},\cdots,\boldsymbol{A})_{N_t-1} \tag{30}$$

$$\widehat{\boldsymbol{A}}^{(2)}=\mathrm{diag}(\boldsymbol{A}^{(2)},\cdots,\boldsymbol{A}^{(2)})_{N_t-1} \tag{31}$$

$$\boldsymbol{B}_{ij}=\mathrm{diag}(B_{ij},\cdots,B_{ij})_{N_z} \tag{32}$$

$$\widehat{\boldsymbol{B}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_{22} & \boldsymbol{B}_{23} & \cdots & \boldsymbol{B}_{2N_t}\\ \boldsymbol{B}_{32} & \boldsymbol{B}_{33} & & \\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{B}_{N_t2} & \cdots & & \boldsymbol{B}_{N_tN_t}\end{bmatrix} \tag{33}$$

$$\hat{\boldsymbol{B}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{31} & \cdots & \boldsymbol{B}_{N_t1}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{34}$$

随后，将所有层的矩阵方程进行组装，可以得到整个介质的求解矩阵：

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{K}_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \boldsymbol{K}_2 & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & \boldsymbol{K}_{L_n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{W}_1\\ \boldsymbol{W}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{W}_{L_n}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{F}_1\\ \boldsymbol{F}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{F}_{L_n}\end{bmatrix} \tag{35}$$

1.3　边界条件及内部连续条件

为求解层状介质正交各向异性热–力耦合问题，除对控制方程的离散外，还应引入特定的初始条件和边界条件。初始时刻的位移与温度增量均为零，故初始条件可表示如下：

$$u_r|_{t=0}=0,u_z|_{t=0}=0,\theta|_{t=0}=0 \tag{36}$$

介质表面应力自由且温度始终与环境温度一致，因此顶部边界条件为

$$\sigma_z|_{1,j,1}=0,\sigma_{rz}|_{1,j,1}=0,\theta|_{1,j,1}=0,\ j=2\sim N_t \tag{37}$$

底部边界隔热且固定，于是有：

$$u_z|_{N_z,j,L_n}=0,u_r|_{N_z,j,L_n}=0,\frac{\partial\theta}{\partial z}|_{N_z,j,L_n}=0,\ j=2\sim N_t \tag{38}$$

处理后的两端边界条件为

$$\begin{cases}c_{13,1}\xi\bar{u}_r|_{1,i,1}+c_{33,1}\sum_{k=1}^{N_z}A_{1k}\bar{u}_z|_{k,i,1}-\beta_{3,1}\bar{\theta}|_{1,i,1}=0,\\ -c_{44,1}\xi\bar{u}_z|_{1,i,1}+c_{44,1}\sum_{k=1}^{N_z}A_{1k}\bar{u}_r|_{k,i,1}=0,\\ \bar{\theta}|_{1,i,1}=0,\\ \bar{u}_z|_{N_z,i,L_n}=0,\\ \bar{u}_r|_{N_z,i,L_n}=0,\\ \sum_{k=1}^{N_z}A_{N_zk}\bar{\theta}|_{k,i,L_n}=0\end{cases} \tag{39}$$

介质内部相邻层之间的状态量是相互联系的，从而形成一个整体。在介质内部，第n与第$n+1$层之间的连续条件可表示为

$$\begin{cases}\bar{u}_r|_{N_z,j,n}-\bar{u}_r|_{1,j,n+1}=0,\\ \bar{u}_z|_{N_z,j,n}-\bar{u}_z|_{1,j,n+1}=0,\\ \bar{\theta}|_{N_z,j,n}-\bar{\theta}|_{1,j,n+1}=0,\\ c_{13,n}\xi\bar{u}_r|_{N_z,j,n}+c_{33,n}\sum_{k=1}^{N_z}A_{N_zk}\bar{u}_z|_{k,j,n}-\beta_{3,n}\bar{\theta}|_{N_z,j,n}-\\ \quad c_{13,n+1}\xi\bar{u}_r|_{1,j,n+1}-c_{33,n+1}\sum_{k=1}^{N_z}A_{1k}\bar{u}_z|_{k,j,n+1}+\beta_{3,n+1}\bar{\theta}|_{1,j,n+1}=0,\\ -\xi c_{44,n}\bar{u}_z|_{N_z,j,n}+c_{44,n}\sum_{k=1}^{N_z}A_{Nzk}\bar{u}_r|_{k,j,n}+\\ \quad \xi c_{44,n+1}\bar{u}_z|_{1,j,n+1}-c_{44,n+1}\sum_{k=1}^{N_z}A_{1k}\bar{u}_r|_{k,j,n+1}=0,\\ -K_{z,n}\sum_{k=1}^{N_z}A_{N_zk}\bar{\theta}|_{k,j,n}+K_{z,n+1}\sum_{k=1}^{N_z}A_{1k}\bar{\theta}|_{k,j,n+1}=0\end{cases}\tag{40}$$

随后,根据实际工程中的工况,替换相应的顶部边界条件和内部连续性条件,引入荷载及温度条件。在引入边界条件、内部连续性条件和荷载条件后,可将矩阵方程式(35)扩充为整体求解矩阵方程:

$$\boldsymbol{K}_{\mathrm{g}}\boldsymbol{W}_{\mathrm{g}}=\boldsymbol{F}_{\mathrm{g}}\tag{41}$$

式中:$\boldsymbol{K}_{\mathrm{g}}$和$\boldsymbol{F}_{\mathrm{g}}$为全局刚度矩阵和全局荷载向量。

直接求解该矩阵方程式(41)即可得到所有未知状态量$\boldsymbol{W}_{\mathrm{g}}$。需注意的是,求解在积分变换域中进行,所以还需通过数值逆变换得到物理域中的解,Hankel变换的数值逆变换方法与文献[8]中相同。在求得第一个时间增量步Δt的状态量后,需保存t_{N_t}时刻的状态量,并更新为下一时间增量步的初始条件,再进行下一时间增量步的求解。

2 敏感性分析

正交各向异性介质参数较多,因此,本文选取两种敏感性分析方法,探讨最为关键的影响参数,从减少分析变量,简化分析过程。结合摄动法和微分法,Liou和Yeh[15]定义了第k个参数P_k对输出结果R的敏感性评估标准X_k:

$$X_k=\frac{\mathrm{d}R/R}{\mathrm{d}P_k/P_k}=\frac{\partial R}{\partial P_k}\frac{P_k}{R}\tag{42}$$

式中:$\partial R/\partial P_k$代表了变量P_k的敏感性。

式(42)可用一个差分形式近似表示为[15]

$$X_k\approx\frac{P_k}{R}\frac{\Delta R}{\Delta P_k}=\frac{P_k}{R(P_k)}\frac{R(P_k+\Delta P_k)-R(P_k)}{\Delta P_k}\tag{43}$$

显然,ΔP_k越小,则近似程度越高,参照Liou和Yeh的研究成果[15],本章中取$\Delta P_k=0.001P_k$。

除该敏感性指标外,Borgonovo和Apostolakis[16]提供了另一个评价指标(differential importance measure,DIM)来评估各个参数在整个响应周期内的影响权重。参数P_k的影响权重可以用以下差分形式表示:

$$\mathrm{DIM}_k\approx\frac{\dfrac{R(P_k+\Delta P_k)-R(P_k)}{\Delta P_k}P_k}{\displaystyle\sum_j\frac{R(P_j+\Delta P_j)-R(P_j)}{\Delta P_j}P_j}=\frac{R(P_k+\Delta P_k)-R(P_k)}{\displaystyle\sum_j[R(P_j+\Delta P_j)-R(P_j)]}\tag{44}$$

3 验证

3.1 力荷载验证

为验证理论正确性,首先计算正交各向异性弹性介质内部作用圆形均布力时的位移响应,并将本文计算结果与精细积分法(PIM)[17]得到的结果进行对比(图2)。幅值为p_0的均布圆形荷载作用于厚度为$4h$的介质内部,荷载作用深度为h,荷载半径$r_0=h$。在本算例中,$E_{\mathrm{h}}/E_{\mathrm{v}}=0.5$,$G_{\mathrm{v}}/E_{\mathrm{v}}=0.35$,$\mu_{\mathrm{h}}=\mu_{\mathrm{vh}}$。分别计算荷载中心与$r=r_0$处沿深度方向的竖向位移,计算结果如图2所示。为方便表示,定义量纲一位移$u_z^*=u_zE_{\mathrm{v}}(1-\mu_{\mathrm{h}})h/(1+\mu_{\mathrm{h}})p_0r_0^2$。

由图2可知,在荷载作用深度处,介质竖向位移达到峰值,随后沿深度逐渐减小并趋于零;另外,本理论计算结果和精细积分法得到的解答几乎完全相同,这表明了本理论在计算有限厚度正交各向异性介质在力荷载作用下的位移响应的正确性。相较精细积分法,本文理论对荷载及边界条件具有良好的适应性。具体而言,精细积分法求解需已知顶部广义应力条件和底部广义位移条件,且必须变换获得

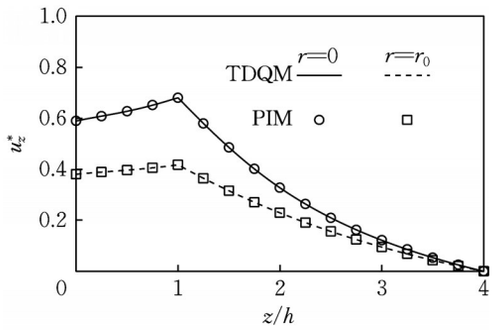

图2　圆形荷载作用下正交各向异性介质的位移响应

Fig. 2　Displacements of cross-anisotropic medium under circular loads

常微分方程，而本文理论可对一般边界及偏微分方程离散求解。

3.2　温度荷载验证

随后，利用大型商用有限元计算软件ABAQUS建模，计算得到温度荷载下介质的位移及温度响应，并与理论计算得到的结果进行对比。正交各向异性介质深度为10 m，介质表面作用一大小为$\Delta\theta=10$ ℃的温度增量，半径$a=1$ m。采用ABAQUS自带的轴对称部件建模，从而提高计算效率。为避免边界效应的影响，经试算将模型宽度设置为$10a$，此时温度和位移响应不受模型宽度的影响。模型参数取值如下：水平弹性模量$E_h=5$ MPa，竖向弹性模量$E_v=10$ MPa，剪切模量$G_v=3.5$ MPa，泊松比$\mu_h=0.25$，$\mu_{vh}=0.3$，热传导系数$K_r=K_z=5\ \mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$，介质密度为$\rho=2\ 000\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$，介质比热容$C=2\ 500\ \mathrm{J\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}}$，线性热膨胀系数$\alpha_1=\alpha_3=1\times10^{-5}\ \mathrm{K^{-1}}$。采用瞬态温度-位移耦合分析步，分别计算时间为1 d和10 d时的介质响应。单元类型选用Standard单元库中的温度-位移耦合四边形单元CAX4T；单元数目为10 000个。图3和图4展示了时间1 d时正交各向异性介质轴对称切面上的温度T和位移U分布云图。由图可知，温度等值线是规则的椭圆锋面，等温线在图中清晰可见；相较而言，位移等值线在荷载附近较为规则，在远离荷载的地方不再是规则的椭圆。

本文计算结果与ABAQUS建模所得计算结果对比见图5和图6。为方便展示，定义归一化温度增量$\theta^*=\theta/\Delta\theta$，和位移$u_z^*=u_z(1-\mu_h)/\Delta\theta\alpha_1(1+\mu_h)$。由图可知，变换微分求积法的计算结果与有限元软件计算结果基本一致。特别地，当计算时间为10 d时，TDQM得到收敛结果的所需计算时间为16.3 s，而有限元模型所需计算时间为89.4 s，从而体现了

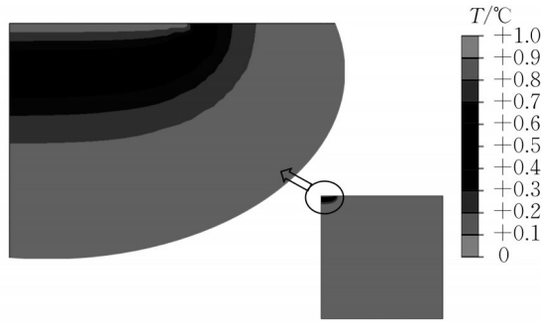

图3　温度荷载下正交各向异性介质的温度云图

Fig. 3　Temperature cloud of cross-anisotropic medium under temperature loads

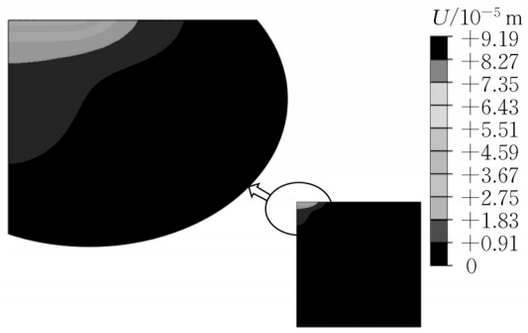

图4　温度荷载下正交各向异性介质的位移云图

Fig. 4　Displacements cloud of cross-anisotropic medium under temperature loads

本方法计算效率上的优越性（计算所用计算机处理器为AMD Ryzen5 4600H@3.00GHz X8）。

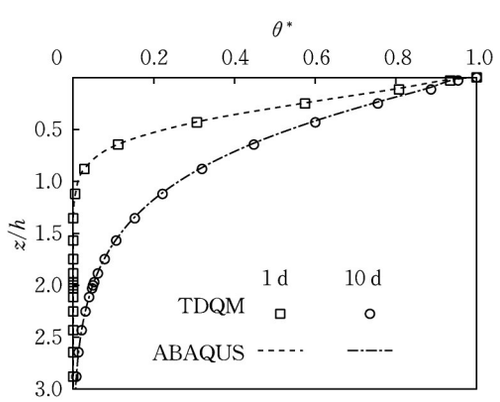

图5　表面温度荷载作用下荷载中心线上的温度增量

Fig. 5　Temperature increments along the centerline under surface temperature loads

4　讨论

正交各向同性介质参数较多，通过敏感性分析，可确定参数的影响权重，从而减少分析变量，简化分析过程。需分析的参数有：水平方向的杨氏模量E_h，竖直方

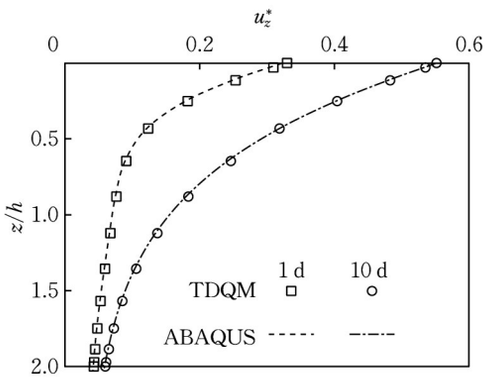

图6 表面温度荷载作用下荷载中心线上的位移

Fig. 6 Displacements along the centerline under surface temperature loads

向的杨氏模量E_v,介质竖直方向的剪切模量G_v,水平向应力引起的正交水平向应变的泊松比μ_h,竖直向应力引起的水平向应变的泊松比μ_{vh},水平向和竖向的线性热膨胀系数α_1和α_3,水平向和竖向的导热系数K_r和K_z。在分析中取表面温度增量$\Delta\theta$=10 K,温度荷载的半径a=2 m;表面力荷载p_0=20 kPa,力荷载半径为2 m;介质深度h=10 m;水平弹性模量E_h=20 MPa,竖向弹性模量E_v=30 MPa,剪切模量G_v=10 MPa,泊松比μ_h=0.25,μ_{vh}=0.3,热传导系数K_r=K_z=2 W·m^{-1}·K^{-1},介质密度为ρ=2 000 kg·m^{-3},介质比热容C=1 200 J·kg^{-1}·K^{-1},水平和竖向线性热膨胀系数α_1=1×10^{-5} K^{-1},α_3=1.5×10^{-5} K^{-1}。

经计算,时间为10 d荷载中心线沿深度方向的温度增量值及其参数的敏感性指标X_k如图7所示。可以看到,最高温度处为荷载作用位置,随着深度增加,温度增量逐渐归零。在影响参数中,只有水平向和竖向的导热系数K_r和K_z对深度方向上的温度增量值影响明显,且竖向导热系数的影响远超水平导热系数,而其余参数的影响则几乎可以忽略不计。另外,K_z的影响系数为正值,这意味着增大K_z会使得深度方向上的温度增量增加,因为增大K_z会使得热量更容易向深度方向传播;与之相对,K_r的影响系数为负值,这意味着增大K_r会使得深度方向上的温度增量减少,这是因为增大K_r会使得热量更容易向径向传播,而同等条件下深度方向上的热量传递相对减少,从而令深度方向上温度增量值有所减小。而且,随着深度的增加,竖向和水平导热系数的敏感性逐渐增大,即远离热源位置的温度增量变化会愈发受到介质导热系数的影响,这是热量传递的距离增加导致的。

图8展示了深度方向上温度增量敏感性的另一个评价指标(DIM),该指标定量评估了各个参数在

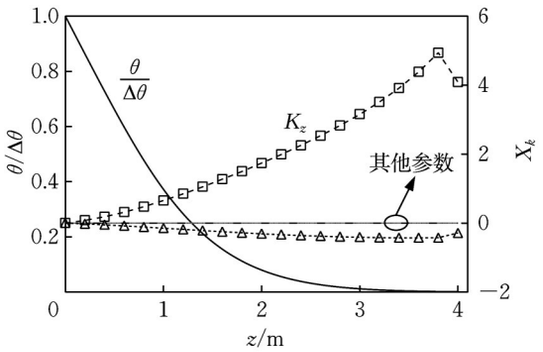

图7 深度方向的温度增量及其敏感性指标X_k

Fig. 7 Temperature increments along depth and the sensitivity parameter X_k

深度方向上的影响权重。可以看到,在温度荷载作用位置附近,竖向导热系数的DIM值大概为80 %,水平导热系数的影响权重大概为20 %。随着深度增加,竖向导热系数的敏感性逐渐提高,水平导热系数的敏感性则逐渐下降。其余参数的敏感性权重基本为0,这意味着在温度分析中可以忽略其余参数的影响。这与参数X_k的分析结果是一致的。

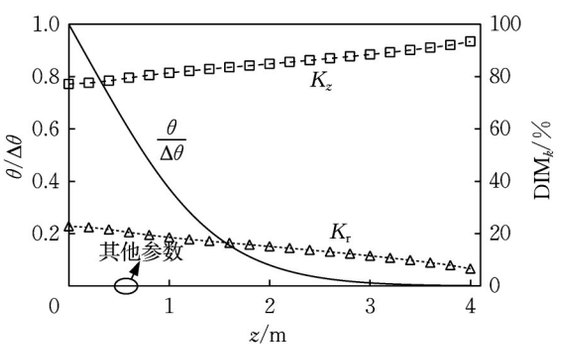

图8 深度方向的温度增量及其敏感性指标DIM_k

Fig. 8 Temperature increments along depth and the sensitivity parameter DIM_k

随后,计算荷载中心线上的竖向位移及其敏感性指标。由图9可以看到,对位移而言,主要的影响参数有4个:水平方向的杨氏模量E_h,竖直方向的杨氏模量E_v,介质竖直方向的剪切模量G_v,以及竖直向应力引起的水平向应变的泊松比μ_{vh}。在荷载位置附近,竖向位移主要受到竖向弹性模量E_v的影响,随着深度增加,剪切模量G_v的影响逐渐增大,并最终占据主导位置。在整个深度范围内,杨氏模量E_h和泊松比μ_{vh}的敏感性指标X_k基本稳定,这表明它们的影响程度基本保持不变。而4个主要影响参数的敏感性指标X_k均为负值,这意味着增加这些参数均会令竖向位移减小。其余5个影响参数的X_k值

在−0.05～0左右，对竖向位移结果影响较小。

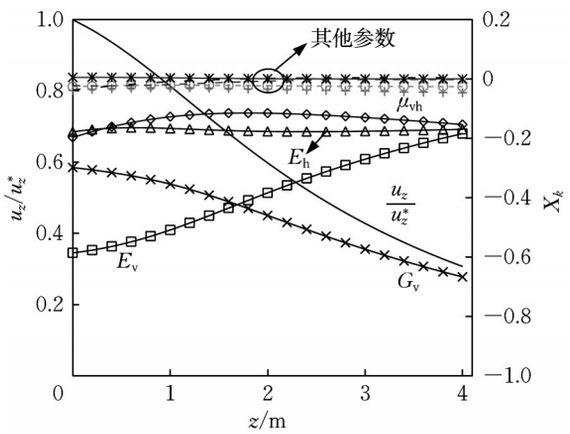

图 9　深度方向的位移及其敏感性指标 X_k

Fig. 9　Displacements along depth and the sensitivity parameter X_k

图 10 展示了深度方向的竖向位移及各参数的敏感性定量评价指标 DIM_k。

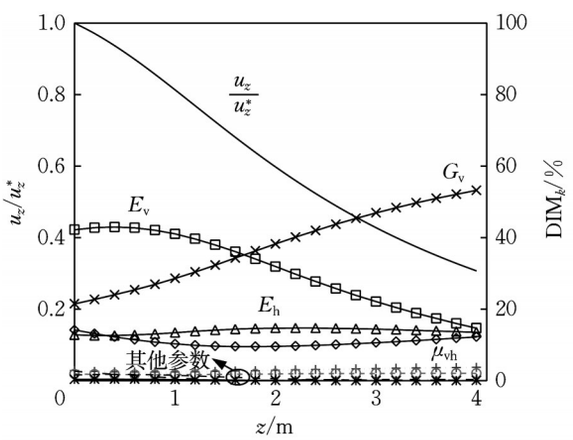

图 10　深度方向的位移及其敏感性指标 DIM_k

Fig. 10　Displacements along depth and the sensitivity parameter DIM_k

与图 9 得到的结论一致，在荷载作用位置附近，竖向弹性模量 E_v 占据主导影响，其 DIM 指标值约为 40 %，剪切模量 G_v 的 DIM 值约为 20 %，影响仅次于 E_v。随着深度的增大，剪切模量 G_v 的 DIM 值逐渐增大，竖向弹性模量 E_v 的 DIM 值逐渐减小，且剪切模量最终占据主导位置。杨氏模量 E_h 和泊松比 μ_{vh} 的敏感性指标 DIM 基本稳定在 10 %～15 %。而其余参数的影响较小，均在 5 %以下。

5　结论及展望

本文综合考虑力学及热学性质水平和竖直方向上的差异，给出了正交各向异性介质热–力耦合问题的半解析解。当用于地热工程中时，可根据具体应用场景，如能源桩，以本文解答为地基基本解，引入地基–桩基相互作用理论，获得能源桩的热传递效率及力学响应。在通过算例验证解答的精确性和高效性后，对复杂参数敏感性进行了分析，并得出以下结论：

(1)本文所提供的微分求积解答能精准高效地求解正交各向异性介质热–力耦合问题。

(2)通过参数敏感性分析可知，在正交各向异性介质热–力耦合问题中，若专注于温度响应，应重点关注介质的竖向和水平导热系数。在温度荷载作用位置附近，竖向导热系数的影响权重大概为 80 %，水平导热系数的影响权重大概为 20 %。随着深度的增加，竖向导热系数的敏感性逐渐提高，水平导热系数的敏感性逐渐下降。其余参数的影响在温度分析中可以忽略。

(3)分析正交各向异性介质的位移行为时，介质模量的影响占据主导地位。在荷载作用位置附近，竖向杨氏模量对位移影响最大(约 40 %)，远离荷载处则剪切模量的影响最为显著。E_h 和 μ_{vh} 的敏感性指标 DIM 基本稳定在 10 %～15 %。而其余参数的影响较小，均在 5 %以下，计算时可忽略其影响。

作者贡献声明：

赵勇智：提出理论分析方法，参与理论求解及修改工作，参与算例设计及分析工作，参与完成文章初稿。

石振明：指导理论求解及修改，指导后续分析工作，指导文章撰写及修改工作。

彭　铭：参与算例设计及分析工作。

周　洁：参与理论求解及修改工作。

参考文献：

[1]　方鹏飞，高翔，娄扬，等. 夏季工况下正常服役地热能源桩承载性能原位试验研究[J]. 岩石力学与工程学报，2021，40(5)：1032.
FANG Pengfei，GAO Xiang，LOU Yang，*et al*. Field test on the bearing behaviors of geothermal energy piles in natural service under the summer condition[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering，2021，40(5)：1032.

[2]　方金城，孔纲强，孟永东，等. 低承台2×2能量桩基础单桩运行热力耦合特性研究[J]. 岩土工程学报，2020，42(2)：317.
FANG Jincheng，KONG Gangqiang，MENG Yongdong，*et al*. Thermo-mechanical coupling characteristics of single energy pile operation in 2×2 pile-cap foundation[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering，2020，42(2)：317.

[3] SMALL J C, BOOKER J R. The behaviour of layered soil or rock containing a decaying heat source[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 1986, 10(5): 501.

[4] SMITH D W, BOOKER J R. Boundary integral analysis of transient thermoelasticity [J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 1989, 13(3): 283.

[5] CARTER J P, BOOKER J R. Finite element analysis of coupled thermoelasticity[J]. Computers & Structures, 1989, 31(1): 73.

[6] ZHONG Y, GENG L. Thermal stresses of asphalt pavement under dependence of material characteristics on reference temperature [J]. Mechanics of Time-Dependent Materials, 2009, 13: 81.

[7] 王路君, 艾智勇. 地埋点热源作用下层状半空间的热-力耦合响应[J]. 岩土力学, 2018, 39(6): 2052.
WANG Lujun, AI Zhiyong. Thermo-mechanical coupling response of layered half-space with a buried point heat source [J]. Rock and Soil Mechanics, 2018, 39(6): 2052.

[8] ZHAO Y Z, AI Z Y. A novel coupled thermo-mechanical solution for layered isotropic media under various time-dependent loadings[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2023, 47: 817.

[9] HAYATI Y, ESKANDARI-GHADI M, RAOOFIAN M, *et al*. Frequency domain analysis of an axisymmetric thermoelastic transversely isotropic half-space [J]. Journal of Engineering Mechanics, 2013, 139: 1407.

[10] AI Z Y, YE Z K, CHU Z H. Transient disturbance of multilayered transversely isotropic media under buried thermal/mechanical sources [J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2020, 187: 105928.

[11] 董宇, 杨翊仁, 鲁丽. 基于微分求积法的轴向流作用下二维板复杂响应研究[J]. 振动与冲击, 2015, 34(6): 46.
DONG Yu, YANG Yiren, LU Li. Complicated responses of a two-dimensional plate under action of an axial liquid flow with differential quadrature method [J]. Journal of Vibration and Shock, 2015, 34(6): 46.

[12] 孙广俊, 李鸿晶, 王通, 等. 基于DQM的曲梁平面外固有振动特性及参数分析[J]. 工程力学, 2013, 30(12): 220.
SUN Guangjun, LI Hongjing, WANG Tong, *et al*. Out-of-plane natural vibration characteristic and parameter analysis of curved girders based on DQM [J]. Engineering Mechanics, 2013, 30(12): 220.

[13] BERT C W, MALIK M. Differential quadrature method in computational mechanics: A review [J]. Applied Mechanics Reviews, 1996, 49(1): 1.

[14] QUAN J R, CHANG C T. New insights in solving distributed system equations by the quadrature method-Ⅰ. Analysis[J]. Computers & Chemical Engineering, 1989, 13: 779.

[15] LIOU T S, YEH H D. Conditional expectation for evaluation of risk groundwater flow and solute transport: one-dimensional analysis[J]. Journal of Hydrology, 1997, 199(3/4): 378.

[16] BORGONOVO E, APOSTOLAKIS G E. A new importance measure for risk-informed decision making [J]. Reliability Engineering & System Safety, 2001, 72(2): 193.

[17] AI Z Y, CHENG Y C. Extended precise integration method for consolidation of transversely isotropic poroelastic layered media [J]. Computers and Mathematics with Applications, 2014, 68(12): 1806.