文章编号：0253-374X(2025)10-1616-08

DOI：10. 11908/j. issn. 0253-374x. 24143

基于损失比例的一类巨灾债券定价

徐承龙，张繁红

（上海财经大学 数学学院，上海 200433）

摘要：传统保险市场难以应对由于巨灾带来的巨额索赔，而保险公司可以通过发行巨灾债券，从而将部分巨灾风险转移至资本市场以达到分散索赔压力的目的。考虑一类按损失程度支付的巨灾债券定价问题，利用非齐次复合泊松分布作为巨灾累计损失分布，得到了票息支付过程和到期本金的支付比例，并且得到了风险中性下巨灾债券定价问题的表达式，最后对结果进行了数值模拟分析。结果表明预设的触发索赔门限值越高，触发概率越小，同时支付比例越小，但是巨灾债券贴现价值越大。

关键词：巨灾债券；非齐次复合泊松过程；损失比例；随机利率；无套利定价

中图分类号：O29；F832. 5　　**文献标志码**：A

Pricing a Class of Catastrophe Bond Based on Loss Ratio

XU Chenglong, *ZHANG Fanhong*

(School of Mathematics, Shanghai University of Finance and Economics, Shanghai 200433, China)

Abstract: The traditional insurance market finds it difficult to cover the loss caused by massive claims resulting from catastrophe. Insurance companies can issue catastrophe bonds to transfer part of the catastrophe risk to the capital market thereby alleviating claims pressure through risk diversification. This paper considers the pricing of a class of catastrophe bond that makes payments based on the degree of loss. Using a nonhomogeneous compound Poisson distribution to model the cumulative catastrophic losses, it derives the coupon payment process and the proportion of principal repaid at maturity. It obtains an expression for the catastrophe bond pricing under the risk-neutral measure, and conducts numerical simulations to analyze the results. The findings show that the higher the preset loss threshold for triggering claims, the lower the probability of triggering and the smaller the payment ratio. However, the discounted value of the catastrophe bond increases..

Keywords: catastrophe bonds; compound nonhomogeneous Poisson process; loss ratio; stochastic rate; non-arbitrage pricing

近年来地震、洪水和干旱等自然灾害所造成的损失要远超普通财产索赔，国内发生的巨灾事件例如2008年四川汶川大地震造成的保险损失达6 500亿元人民币，死亡人数近7万[1]。国外保险市场也遭受着巨灾的冲击，例如1992年美国发生的安德鲁飓风(Hurricane Andrew)造成的损失达到30亿美元；2005年卡特丽娜飓风(Hurricane Katrina)造成了约40～60亿美元的损失[2]。为了恢复社会稳定，保险市场的作用至关重要。但是传统的保险市场难以面对突发的大规模赔付。据 Sigma 的研究报告《2021年自然灾害：关注洪灾风险》，全球自然灾害总计造成2 700亿美元的经济损失，其中保险损失约为1 110亿美元，是Sigma有记录以来损失第四高的年份，延续了全球保险损失年均5％到7％增长的趋势。在保险市场亟需找到新的方法以应对巨灾风险的同时，保险公司注意到全球金融资本市场每年可能有数亿美元的波动，那么保险公司可以将巨灾风险证券化，通过在金融市场发行巨灾连接证券以减轻极端事件带来的冲击[3]。

巨灾债券是一类典型的巨灾保险连结证券(catastrophe insurance linked securities，CILS)，此类产品依托金融资本市场转移保险公司的巨灾风险损失。1993年芝加哥期货交易所引入巨灾衍生品，以反映保险和再保险公司报告的自然灾害造成的保险财产损失的基础指数，发行这些巨灾连接证券，例如巨灾债券，

收稿日期：2024-04-15
基金项目：国家自然科学基金(12571389)，上海财经大学创新团队支持计划资助
第一作者：徐承龙，教授，博士生导师，理学博士，主要研究方向为金融数学与供应链风险管理。E-mail：clxu@tongji. edu. cn
通信作者：张繁红，博士生，主要研究方向为概率论与数理金融. E-mail：zhangfh@stu. sufe. edu. cn

论文拓展介绍

巨灾期货，行业损失担保等[2]。巨灾债券的发行需要三个主体：保险公司，特殊目的机构（special purpose vehicle，SPV），投资者。保险公司通过特殊目的机构在金融市场发行巨灾债券，将巨灾风险分散至金融资本市场，降低了保险公司的留存资本。另一方面巨灾风险属于非系统风险，巨灾债券为投资者提供了不受金融市场波动的投资选择，投资者获得巨灾债券的收益主要取决于发行期内巨灾触发事件的严重程度，如果在规定时间内巨灾累计损失超过预设值，特殊目的公司将停止对投资者支付票息，并且将部分甚至全部本金用以弥补保险公司的损失，故巨灾债券可以按照债券本金的损失可以分为本金保障型和本金无保障型。再由于投资者间接承担了巨灾风险，故巨灾债券的票息往往高于同等评级的公司融资债券。

虽然巨灾债券早已经应用于资本市场，但是由于对它的理论研究较少。在不完全市场下，Cox 和 Pedersen[4]假设金融市场变量和巨灾风险变量相互独立，将期限利率结构和巨灾风险变量纳入定价框架中，构造了乘积空间下的巨灾债券均衡模型，但并未给出巨灾变量的分布函数。Lee 和 Yu[5]考虑了保险公司道德风险和基差风险，构建了可违约的巨灾债券或有索赔模型。Ma 和 Ma[6]在 Lee 和 Yu[5]的或有索赔模型基础上，利用逼近方法模拟累计巨灾损失分布，并在随机利率环境下给出了计算巨灾债券的混合方法，其中票息使用了与巨灾损失无关的一次性支付方式。Vaugirard[7]利用跳扩散模型刻画巨灾风险指数，得到了巨灾债券无套利定价，但现实中损失模型更多使用复合泊松过程来刻画。Nowak 和 Romaniuk[2]利用复合泊松过程来刻画巨灾损失，并且计算了多种随机利率结构下巨灾债券定价。由于巨灾债券的定价也具备金融衍生定价的特质，Jarrow[8]按照信用衍生品的约化模型（reduced-form model）推导了无套利巨灾债券定价，并给出了巨灾债券的解析解，但对损失变量和债券触发机制等做了简化处理。Shao 等[9]假设巨灾损失索赔存在相依性，并构建了一个马尔可夫相依模型的巨灾债券的显示价格公式。国内学者也对巨灾债券定价做了研究，Wu 和 Zhou[1]使用三种随机过程模拟拟合国内地震数据，结果发现双指数跳扩散模拟拟合最优，但是没有考虑巨灾债券触发的影响。翁成峰等[10]利用单因子期限利率树方法研究了中国巨灾债券定价问题。李永等[11]利用 Copula 函数拟合联合分布研究了多触发事件巨灾债券的定价问题。以国内沿海风暴潮数据为样本，马宗刚等[12]利用了门限峰值法重构了损失数据，并且得到了零票息巨灾债券的定价。通过以上文献分析，巨灾债券定价的主要难点在于巨灾损失风险属于非系统风险，无法使用常规的市场组合对冲方法进行定价。

经过对以上文献分析，大部分巨灾债券定价模型中考虑到了巨灾损失分布，随机利率，支付方式等因素，但是关于巨灾债券保费和票息率研究较少。本文考虑了一类票息支付过程，与文献[5]的或有索赔模型不同，通过巨灾债券和信用违约互换的对比分析，构建起了票息率和巨灾债券保费之间的相关关系，并且得到票息率的半解析解。另外，使用非齐次复合泊松分布对巨灾损失的特征进行刻画，并且与文献[6]不同的是使用了与巨灾损失相关的巨灾债券本金到期支付比例，最后得到了对应的半解析解。相比现有工作，本文工作如下：①首先在均衡定价框架下，与文献[2,5-6]中使用的固定支付比例不同，使用了与巨灾累计损失相关的支付比例函数，并给出了巨灾债券定价表达式；②给出了巨灾债券票息的连续支付形式，相比于 Jarrow[8]的简化模型，本文在付息点的处都计算了巨灾累计损失超过门限的可能性，并给出了票息支付的预期值；③与文献[4]的非概率框架不同，使用概率模型对巨灾累计风险进行刻画，并纳入一般的均衡框架进行建模，并得到了一般的巨灾债券定价表达式。

1　模型假设与价值理论

首先定义带流概率空间 $(\Omega^{(1)},\mathcal{F}^{(1)},\{\mathcal{F}_t^{(1)}\}_{t\geqslant 0},P^{(1)})$，其中 $\Omega^{(1)}$ 表示金融市场信息的集合，$\mathcal{F}^{(1)}$ 是 $\Omega^{(1)}$ 子集的 σ-代数，$P^{(1)}$ 是 $\mathcal{F}^{(1)}$ 上的概率测度，域流 $\mathcal{F}_t^{(1)}$ 表示 t 时刻市场投资和利率组成的信息流。同样定义带流概率空间 $(\Omega^{(2)},\mathcal{F}^{(2)},\{\mathcal{F}_t^{(2)}\}_{t\geqslant 0},P^{(2)})$，其中 $\mathcal{F}_t^{(2)}$ 包含了 t 时刻损失过程所产生的信息流。巨灾累计损失过程 $\{L_t:t>0\}$ 为非齐次复合泊松过程：

$$L_t=\sum_{j=1}^{N_t}X_j \tag{1}$$

其中 $\{X_j:j\geqslant 1\}$ 为独立同分布的非负随机变量，并且分布函数为 $F(x)=P(X_j<x)$。泊松过程 $\{N_t,t\geqslant 0\}$ 描述了合同中设置的巨灾事件信息，泊松过程的强度 $\lambda_t>0$。最后构造了乘积概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0},P)$，其中 $\Omega=\Omega^{(1)}\times\Omega^{(2)}$，$\mathcal{F}=\mathcal{F}^{(1)}\times\mathcal{F}^{(2)}$，$\mathcal{F}_t=\mathcal{F}_t^{(1)}\times\mathcal{F}_t^{(2)}$，$P=P^{(1)}\times P^{(2)}$. 假设两个随机变量 ω_1 和 ω_2 分别属于空间 $(\Omega^{(1)},\mathcal{F}^{(1)})$ 和 $(\Omega^{(2)},\mathcal{F}^{(2)})$，那么根据独立性原则对于乘积事件 $\omega=$

(ω_1,ω_2)的概率$P(\omega)=P^{(1)}(\omega_1)P^{(2)}(\omega_2)$。下面都将在乘积空间下对巨灾债券进行定价,假设市场风险中性测度Q与P一致,本文的定价规范都是在Q测度下进行,对应的条件期望$E_t[\cdot]=E_t[\cdot|\mathcal{F}_t]$。在任意时刻$t$的未定权益支付$\{U_T\colon T\geqslant t\}$的贴现价格$\{V_t\colon t\in[0,T]\}$可以表示为

$$\begin{aligned}V_t&=E_t\left[\mathrm{e}^{-\int_t^T r_s\mathrm{d}s}U_T|\mathcal{F}_t^{(1)}\times\mathcal{F}_t^{(2)}\right]\\&=E_t\left[\mathrm{e}^{-\int_t^T r_s\mathrm{d}s}U_T|\mathcal{F}_t\right]\end{aligned}\tag{2}$$

其中随机利率过程$\{r_t\colon t\geqslant 0\}$,这里使用均值回复平方根模型(简称CIR随机利率模型,见文献[13])$\mathrm{d}r_t=\kappa(\theta-r_t)\mathrm{d}t+\sigma\sqrt{r_t}\,\mathrm{d}B_t$,其中$\{B_t\colon t\geqslant 0\}$表示标准布朗运动,$\kappa,\theta,\sigma>0$分别是利率的平均回复速度、利率的长期平均水平和波动率,且$2\kappa\theta>\sigma^2$以确保随机利率大于零。则在风险中性下,零息债券价格的贴现具有仿射结构[14] $B_{\mathrm{CIR}}(t,T)=A(t,T)\mathrm{e}^{-B(t,T)r}$,其中表达式

$$A(t,T)=\left(\frac{2\gamma\mathrm{e}^{(\kappa+\gamma)(T-t)/2}}{(\kappa+\gamma)\left(\mathrm{e}^{\gamma(T-t)}-1\right)+2\gamma}\right)^{\frac{2\kappa\theta}{\sigma^2}}$$

$$B(t,T)=\frac{2\left(\mathrm{e}^{\gamma(T-t)}-1\right)}{(\gamma+\kappa)\left(\mathrm{e}^{\gamma(T-t)}-1\right)+2\gamma}$$

$$\gamma=\sqrt{\kappa^2+2\sigma^2}。$$

2 巨灾债券价格模型

巨灾债券的结构如图1所示。

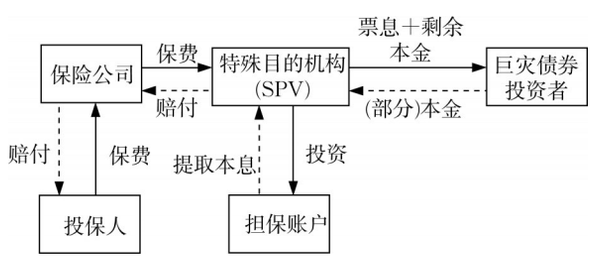

图1 巨灾债券基本结构

Fig. 1 Structure of catastrophe bonds

巨灾债券价格由两部分组成:票息过程和剩余本金。在合同期限内巨灾造成的保险累计损失超过预先门限值时,特殊目的机构立刻停止对投资者支付票息,并且根据到期时的累计损失超过门限值的大小,从债券本金中补偿给保险公司。由于巨灾损失发生的时间点和损失严重程度的不确定性,考虑到巨灾可能多次发生使得损失在年内超过阈值,故采用式(1)对巨灾累计损失进行建模。考虑不同于市场中可交易的资产,由于资本市场中很难找到合适的投资组合去对冲巨灾发生的突然损失,在这样的不完全市场环境,根据Merton[15]的假设,资本市场受到局部冲击的边际影响很小,故非系统风险溢价为零。假设市场存在风险中性测度Q,按照债券定价规范,巨灾债券到期偿还的总面值为A,市场投资者承担了部分巨灾损失风险,巨灾累计损失未达到触发条件之前,巨灾债券为投资者提供高收益票息,与文献[16]的浮动票息不同,为了简化分析,在巨灾到期时间T之前,假定付息时间点$t<t_1<t_2<\cdots<t_n=T$,巨灾债券每次支付的票息为Aq,其中q为票息率。债券发行时间$[t,T]$内产生n次利息支付,根据第1节定义的乘积概率空间和式(2),由于巨灾损失变量与随机利率相互独立则整体票息的贴现值为

$$\begin{aligned}C_t&=E_t\left[\sum_{i=1}^{n}Aq\,\mathrm{e}^{-\int_t^{t_i}r_s\mathrm{d}s}I_{L_{t_i}\leqslant D}|\mathcal{F}_t\right]\\&=\sum_{i=1}^{n}Aq\,E_t\left[\mathrm{e}^{-\int_t^{t_i}r_s\mathrm{d}s}|\mathcal{F}_t\right]E_t\left[I_{L_{t_i}\leqslant D}|\mathcal{F}_t\right]\\&=\sum_{i=1}^{n}Aq\,E_t\left[\mathrm{e}^{-\int_t^{t_i}r_s\mathrm{d}s}|\mathcal{F}_t^{(1)}\right]E_t\left[I_{L_{t_i}\leqslant D}|\mathcal{F}_t^{(2)}\right]\\&=\sum_{i=1}^{n}Aq\,B_{\mathrm{CIR}}(t,t_i)\sum_{j=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda_i t_i}\frac{(\lambda_i t_i)^j}{j!}G_j(D)\end{aligned}\tag{3}$$

其中$G_j(D)=P(x_1+x_2+\cdots+x_j\leqslant D)$,表示在时间$[t,t_i]$时间内发生$j$次巨灾损失不超过门限$D$的概率。$B_{\mathrm{CIR}}(t,t_i)$表示无违约风险的单位面值票息贴现价值。当巨灾累计损失在付息点t_i前超过预定的门限D时,投资者将不再收到票息支付直至巨灾债券到期。与文献[2,6]不同,本文考虑了票息现金流过程C_t,并且在每个付息时间点都考虑了停止付息的可能性$G_j(D)$。图2显示巨灾累计损失在τ时突破门限D,投资者得到剩余部分$A\cdot\rho(L_T)$。

若巨灾累计损失突破第二个门限值M,则投资者收到到期巨灾债券本金清零,并且一般$D<M\leqslant A$。巨灾债券合同预设的触发区间为$[D,M]$,当巨灾债券到期后,根据巨灾累计损失是否在损失区间上到期投资者的本金支付函数为$U_T=A\cdot\rho(L_T)$,其中支付比例$\rho(L_T)$具体定义为

$$\rho(L_T)=\begin{cases}1 & L_T\leqslant D\\ \dfrac{M-L_T}{M-D} & D<L_T\leqslant M\\ 0 & M\leqslant L_T\end{cases}\tag{4}$$

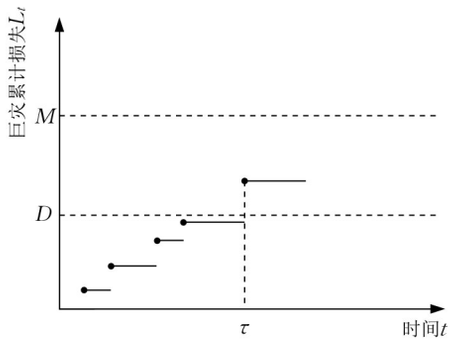

图2　巨灾累计损失在τ时刻超过门限D，并停止付息

Fig. 2　Cumulative loss of catastrophe breaks through the threshold D at τ

支付比例的不确定代表了此类巨灾债券是本金无保障的，相比较文献[2,6]更加复杂。根据第2节定义的乘积概率空间和式(1)，由于巨灾损失变量与随机利率相互独立

$$E_t[L_T]=E_t[X]\lambda_T T=\lambda_T T\int_0^{\infty}xf(x)\mathrm{d}x$$

因此巨灾债券的到期本金的贴现价值为

$$\begin{aligned}V_t&=E_t\left[\mathrm{e}^{-\int_t^T r_s\mathrm{d}s}U_T|F_T\right]\\&=B_{\mathrm{CIR}}(t,T)FE(\rho(L_T)I_{L_T\leqslant D}\\&\quad+\rho(L_T)I_{D<L_T\leqslant M}+\rho(L_T)I_{M\leqslant L_T})\\&=B_{\mathrm{CIR}}(t,T)F(\rho_1+\rho_2)\end{aligned}\tag{5}$$

其中：

$$\rho_1=\sum_{j=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda_T T}\frac{(\lambda_T T)^j}{j!}G_j(D),$$

$$\rho_2=\frac{M-\lambda_T T\int_0^{\infty}xf(x)\mathrm{d}s}{M-D}\cdot\sum_{j=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda_T T}\frac{(\lambda_T T)^j}{j!}(G_j(M)-G_j(D))$$

$G_j(M)=P(x_1+x_2+\cdots+x_j\leqslant M)$表示在$T$时间点上巨灾累计损失$M$的概率。支付比例的分段属性受到巨灾损失分布的影响，并且直观上，投资者也以从巨灾债券的触发机制来对巨灾风险做出基本判断。因此根据式(2)—(5)在风险中性Q测度下巨灾债券的定价为

$$Z_t=C_t+V_t=\sum_{i=1}^{n}A\,qB_{\mathrm{CIR}}(t,t_i)\cdot\sum_{j=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda_{t_i}t_i}\frac{(\lambda_{t_i}t_i)^j}{j!}G_j(D)+B_{\mathrm{CIR}}(t,T)F(\rho_1+\rho_2)$$

另一方面，巨灾保险公司需要对SPV(特殊目的机构)支付保险费用，根据公允原则，支付的保险费用的贴现价值等于可能获得的补偿。假设保险费用的价值过程为$\{W_t:t>0\}$，在风险中性Q测度下，保险公司支付的费用价格为

$$\begin{aligned}W_t&=E_t\left[\mathrm{e}^{-\int_t^T r_s\mathrm{d}s}F\left(I_{L_T>M}+(1-\rho(L_T))I_{D<L_T\leqslant M}\right)\right]\\&=B_{\mathrm{CIR}}(t,T)F\left(1-\sum_j^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda_T T}\frac{(\lambda_T T)^j}{j!}G_j(M)\right.\\&\quad+\frac{\lambda_T T\int_0^{\infty}xf(x)\mathrm{d}s-D}{M-D}\cdot\\&\quad\left.\sum_{j=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda_T T}\frac{(\lambda_T T)^j}{j!}(G_j(M)-G_j(D))\right)\end{aligned}$$

3　巨灾累计损失设置

根据以往的文献[5-6,9]，巨灾累计损失的真实分布很难被准确估计。根据历史数据去对巨灾累计损失分布进行估计。从中国国家地震科学中心找到了1995—2016年共89次的巨灾损失数据，并通过中国统计年鉴中的全国居民消费价格指数归结到2016年的水平。从直观上可以根据图3，地震损失数据非正态分布特征，其中2008年主要由于四川汶川地震导致的损失巨大。图4统计了1995—2016年发生的地震次数。

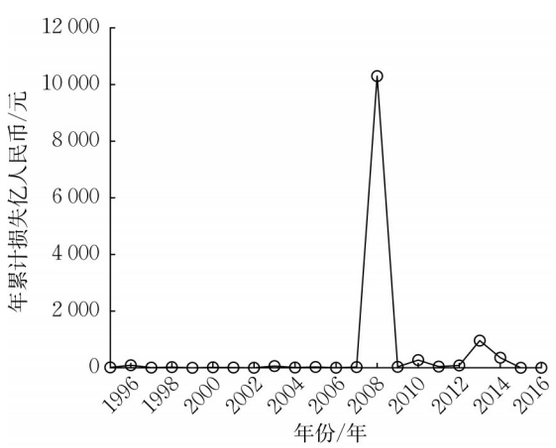

图 3　中国地震年累计损失数据(1995—2016)

Fig. 3　Cumulative earthquake losses in China (1995—2016)

以4种常用的巨灾损失分布作为参考，并通过参数估计的方法得到对应分布参数的值。

(1) 对数正态分布及其概率分布密度函数

$$f_X(x;\mu,\sigma)=\frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}},\ x>0,\ \sigma>0,\ \mu\in R_+$$

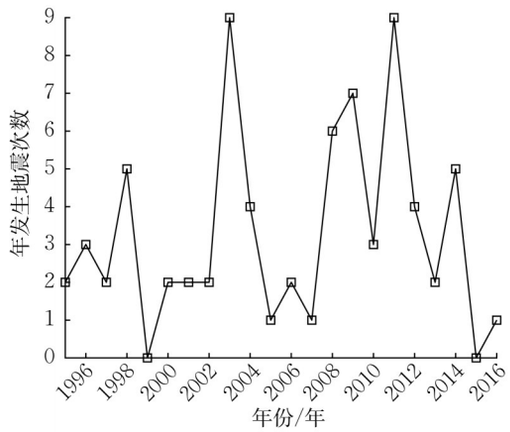

图4 中国地震年发生次数(1995—2016)

Fig. 4 Annual frequency of earthquakes in China (1995—2016)

(2) 伽马分布及其概率分布密度函数

$$f_X(x;\alpha,\beta)=\frac{x^{\alpha-1}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}e^{-\frac{x}{\beta}},\ x>0,\ \alpha>0,\ \beta>0$$

(3) 帕累托分布及其概率分布函数

$$f_X(x;\alpha,\beta)=\frac{\alpha\beta^{\alpha}}{x^{\alpha+1}},\ x>\beta,\ \alpha>0,\ \beta>0$$

(4) 逆高斯分布及其概率密度函数

$$f_X(x;\mu,\lambda)=\sqrt{\frac{\lambda}{2\pi x^3}}e^{-\frac{\lambda(x-\mu)^2}{2\mu^2 x}},\ x>0,\ \mu>0,\ \lambda>0$$

采用了AD(Anderson-Darling test)方法[17]检验分布拟合程度。AD方法通过计算样本数据和特定分布之间的差距来判断检验的样本是否来源于特定的分布。假设随机变量 $x_1,x_2,\ldots x_n, n=1,2,\cdots$,样本来自于累计分布函数 $F_X(x)$。采用拒绝假设方法,H_0:随机变量服从累计分布 $F_X(x)$; H_a:以显著水平 α 拒绝 H_0。对于 n 个样本数据其AD统计量

$$A^2=-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(2i-1)\left[\ln F(x_i)+\ln\left(1-F(x_{n-i+1})\right)\right]-n$$

如果 A^2 大于临界值 C_a,拒绝假设 H_0。通过对地震历史数据计算得到了表1,其中AD取5%的显著性水平,临界值为 $C_a=2.492$。可以看出只有对数正态分布和帕累托分布符合巨灾损失分布。

文献中对泊松点过程的强度进行建模,例如文献[18]根据风暴巨灾的季节性和指数增长的特性给出强度模型,但是从图4可以看出巨灾的年发生的次数并不均匀,且直观上地震的发生次数并不随着季节变化而变化。本文使用非齐次复合泊松过程 $\{N_t: t>0\}$ 来模拟巨灾的年累计发生次数,其中强度为 λ_t。通过分析地震年发生次数,提出了以下替代模型,该模型以年为单位可以捕捉到地震发生的趋势

$$\lambda_t=(a+bt)t$$

其中参数 $a,b>0$。使用最小二乘方法,得到累计发生次数与时间的关系,继而反应强度的变化,得到参数 $a=2.244$, $b=0.058$。从图5可以看出自1995年逐年巨灾累计发生的次数是随着时间呈现增长趋势。

表1 参数估计和AD统计量

Tab. 1 Estimation of each distribution parameter and corresponding AD statistics

损失分布	参数取值	AD统计量
对数正态分布	$\mu=1.157$, $\sigma=2.333$	0.339
逆高斯分布	$\mu=141.649$, $\lambda=0.324$	11.760
伽马分布	$\alpha=0.194$, $\beta=727.499$	10.389
帕累托分布	$\alpha=1.706$, $\beta=1.993$	0.143

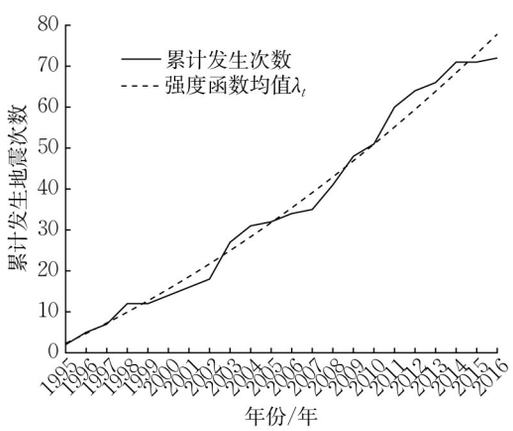

图5 强度函数拟合中国地震年累计损失次数(1995—2016)

Fig. 5 Mean value for fitted intensity and aggregate number of earthquake-related losses in China (1995–2016)

4 数值模拟

本文利用蒙特卡洛方法对巨灾债券模型进行数据分析。首先根据第3节的数据处理结果,利用对数正态分布模拟地震损失;其次,与文献[5-6]的近似方法不同,使用蒙特卡洛方法计算巨灾累计损失,即分别计算当巨灾发生次数为 $j=1,2,3,\ldots$ 时式(3)和式(5)—(7)中 $G_j(D)$ 和 $G_j(M)$ 的概率,代入到定价表达式中以计算巨灾债券本金和票息,最后对触发索赔门限值,触发概率和支付比例对巨灾债券的影响。债券与权益参数设置如下:$T=2.5, A=1, D=30, M=80, q=0.06$,损失分布以对数正态分布为例,参数 $\mu=1.157$, $\sigma=2.333$。与文献[5-6]设置的固定的支

付不同，使用巨灾损失相关的支付比例进行定价。图6表明当巨灾发生 j 次时 $G_j(D)=P(x_1+x_2+\ldots+x_j\leqslant D)$ 的取值范围。当 $j=1$ 时，说明巨灾发生1次时损失不超过门限 D 的概率随着门限值的增加而增加。而随着巨灾发生次数增加，损失不超过门限值 D 的概率会越来越小，这是因为多次巨灾发生损失累计超过门限值 D 几乎是必然事件，对应的发生多次巨灾的概率也会比发生1次巨灾的概率要小。在后面的巨灾累计损失分布计算中，对前4次损失进行蒙特卡洛模拟。

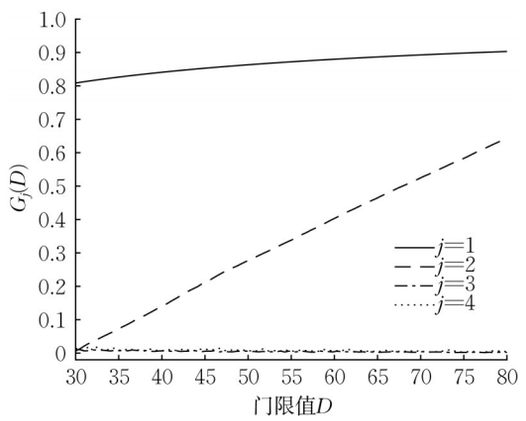

图 6　$G_j(D)$的不同取值

Fig. 6　Values of $G_j(D)$ for different j

图7、图8分别讨论了触发概率：

$$E_t\left[I_{L_T>D}\right]=1-E_t\left[I_{L_T\leqslant D}\right]$$

$$=1-\sum_{j=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda_T T}\frac{(\lambda_T T)^j}{j!}\left(G_j(D)\right)$$

与时间，门限值的关系。从图7可以看出当门限值分别为20，40，80时，随着到期时间的增加，巨灾债券触发赔偿的概率也在增加，这是因为直观上到期时间越长，巨灾损失发生的可能性越大，从而累计损失越大，导致了触发概率增加。但对于图8，当巨灾债券到期时间确定时，设置的门限值 D 越大，那么在到期前巨灾累计损失超过门限的可能性越小，从而触发概率会减小，从而使得保险公司获得赔偿的概率变小。

根据式(4)绘制了图9和图10，给出了支付比例 $\rho(L_T)$ 随着门限值和时间的关系。图9中显示支付比例随着到期时间增加逐渐较小，这是因为巨灾累计损失超过门限值 D 的可能性增加，并且门限值越大，支付比例相对较大。图10表明到期时间越小，支付比例能更快趋于1，这是因为在较短时间内巨灾累计损失超过阈值的可能性较小，从而投资者越可能得到完整的本金回报。

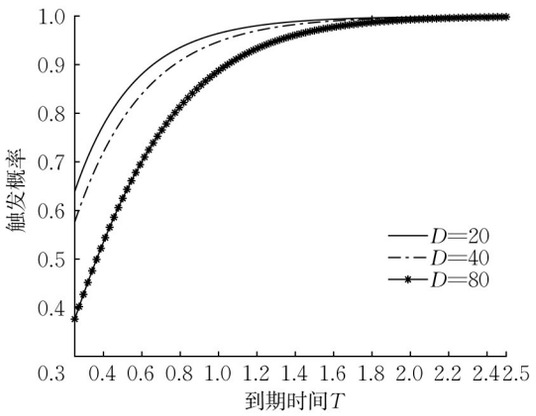

图 7　触发概率和到期时间的关系

Fig. 7　Relationship between trigger probability and payoff time

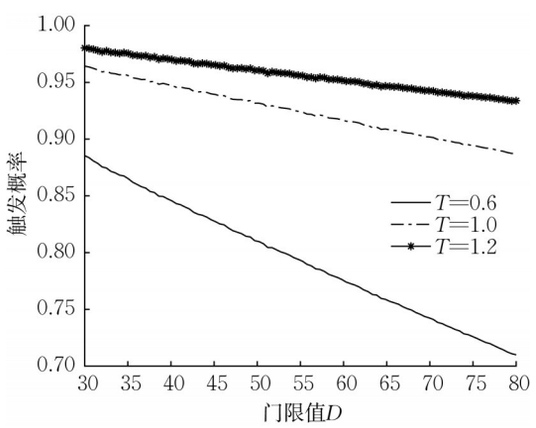

图 8　触发概率与门限的关系

Fig. 8　Relationship between trigger probability and threshold

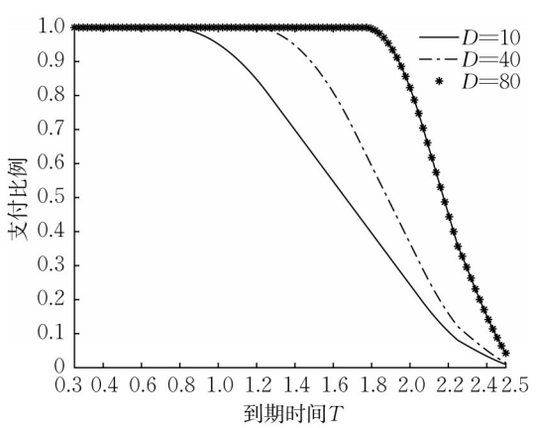

图 9　支付比例与到期时间 T 的关系

Fig. 9　Relationship between payoff ratio and T

根据式(5)给出图11和图12，当巨灾债券到期时间分别为0.6，1，1.2时，巨灾债券本金随门限值 D 的增加变价较小。这是因为在较短时间内，巨灾

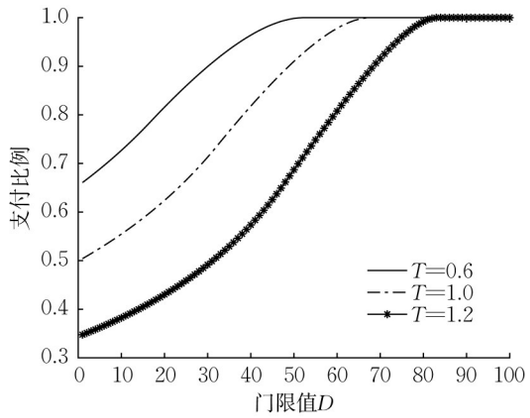

图 10 支付比例与门限值 *D* 的关系

Fig. 10 Relationship between payoff ratio and *D*

损失超过门限值 D 的概率较低,所以巨灾债券本金损失的可能性较小,从而投资者到期获得大部分本金。图12中选取门限值 $D=50$ 时巨灾债券本金随到期时间的关系,直观上巨灾到期时间越长,巨灾累计损失超过门限值的概率就越大,那么特殊目的机构赔偿保险公司的可能性就越大,从而投资者到期的获得本金就越少。

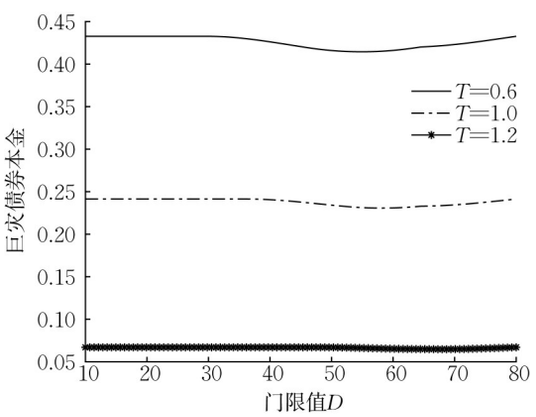

图 11 巨灾债券本金和门限值 *D* 的关系

Fig. 11 Relationship between principal of catastrophe bond and *D*

5 结论

保险和再保险市场难以承担巨灾风险可能带来的巨额赔付,但是保险公司或再保险公司可以将巨灾风险转移到资本市场,发行巨灾连接证券以避免破产。

本文在无套利模型上,利用随机利率和非齐次复合泊松过程对巨灾债券进行定价,得到了巨灾债券定价问题的表达式。与文献[5-6,9]不同点在于,本文关注到了实际中巨灾赔付的不确定性,并且给

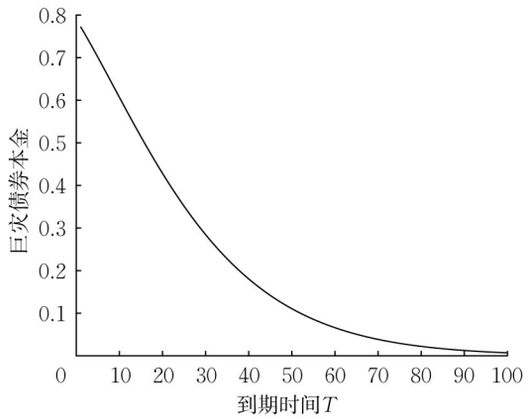

图 12 巨灾债券本金和时间、门限的关系

Fig. 12 Relationship between principal amount of catastrophe bonds, *T* and *D*

出了根据巨灾累计损失而确定的支付比例函数 $\rho(L_T)$。另外,巨灾债券的票息收益往往高于一般的公司债券,这也是巨灾债券投资者的关键特征,于是本文给出了各付息点上的累计损失分布,进而得到了巨灾债券的本金和票息的贴现价值,结果表明随预设的门限 D 的提高,巨灾债券本金的价值也在增加,这是因为门限 D 越高,累计损失超过门限的概率越低,债券本金损失的可能也越低。巨灾债券付息价值随着时间增加,并且门限 D 越大,累计损失超过下限的可能越小,累计票息的贴现价值也越大。与信用违约互换相似,保险公司需要向巨灾债券发行方支付保费,总保费的贴现值随着门限 D 的增加而减小,同时,巨灾债券发行方向投资者支付的利差随着门限 D 增加而减小。

本文将巨灾累计分布超过门限 D 作为巨灾债券本金和票息支付的依据,与以往文献区别在于得到了各付息点上巨灾累计损失分布,进而可以计算付息现金流。根据本文的模型还可以对利率过程做更多假设,同时巨灾累计损失过程可以使用其他随机过程模拟,例如 *Lévy* subordinator 过程。

作者贡献声明:

徐承龙:研究选题,提供基金支持与论文指导。

张繁红:文献收集,论文撰写,数值模拟。

参考文献:

[1] WU D, ZHOU Y. Catastrophe bond and risk modeling: A review and calibration using Chinese earthquake loss data[J]. Human and Ecological Risk Assessment, 2010, 16(3): 510.

[2] NOWAK P, ROMANIUK M. Pricing and simulations of catastrophe bonds[J]. Insurance: Mathematics and Economics,

2013, 1(52): 18.

[3] FROOT K A. The market for catastrophe risk: A clinical examination [J]. Journal of Financial Economics, 2001, 2(60): 529.

[4] COX S H, PEDERSEN H W. Catastrophe risk bonds [J]. North American Actuarial Journal, 2000, 4(4): 56.

[5] LEE J P, YU M T. Pricing default-risky cat bonds with moral hazard and basis risk[J]. Journal of Risk and Insurance, 2002, 69(1): 25.

[6] MA Z G, MA C Q. Pricing catastrophe risk bonds: a mixed approximation method [J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2013, 52(2): 243.

[7] VAUGIRARD V E. Pricing catastrophe bonds by an arbitrage approach [J]. The Quarterly Review of Economics and Finance, 2003, 43(1): 119.

[8] JARROW R A. A simple robust model for cat bond valuation [J]. Finance Research Letters, 2010, 7(2): 72.

[9] SHAO J, PAPAIOANNOU A, PANTELOUS A. Pricing and simulating catastrophe risk bonds in a Markov-dependent environment [J]. Applied Mathematics and Computation, 2017, 309: 68.

[10] 翁成峰,韦勇凤,巴曙松. 中国参数化地震巨灾债券的定价分析[J]. 中国科学技术大学学报,2013, 43(12): 1026.
WENG Chengfeng, WEI Yongfeng, BA Shusong. Chinese parametric catastrophe bonds pricing analysis [J]. Journal of University of Science and Technology of China, 2013, 43(12): 1026.

[11] 李永,胡帅,范蓓. 随机利率下跨期多事件触发巨灾债券定价研究[J]. 中国管理科学,2013, 21(5): 8.
LI Yong, HU Shuai, FAN Bei. Pricing of inter-temporal multi-events triggered cat bond under stochastic interest rates mode[J]. Chinese Journal of Management Science, 2013, 21(5): 8.

[12] 马宗刚,邹新月,马超群. 双随机复合泊松损失下巨灾债券定价与数值模拟[J]. 中国管理科学,2016, 24(10): 35.
MA Zonggang, ZOU Xinyue, MA Chaoqun, Pricing catastrophe bonds under the doubly stochastic compound poisson losses and numerical simulation[J]. Chinese Journal of Management Science, 2016, 24(10): 35.

[13] COX J C, INGERSOLL J E, ROSS S A. A theory of the term structure of interest rates [J]. Econometrica, 1985, 53(2): 385.

[14] DUFFE D. Dynamic asset pricing theory [M]. 3ed. Princeton N J:Princeton University Press, 2001.

[15] MERTON R C. Option pricing when underlying stock returns are discontinuous[J]. Journal of Financial Economics, 1976, 3(1): 125.

[16] TANG Q, YUAN Z. Cat bond pricing under a product probability measure with pot risk characterization [J]. Astin Bulletin, 2019, 49(2): 1.

[17] ANDERON T W, DARLING D A. Asymptotic theory of certain goodness of fit criteria based on stochastic processes[J]. Annals of Mathematical Statistics, 1952, 23(2): 193.

[18] GIURICICH M N, BURNECKI K. Modelling of left-truncated heavy-tailed data with application to catastrophe bond pricing [J]. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 2019, 525: 498.