Finsler空间的Berwald全脐子流形*

贺群， 杨伟

(同济大学， 数学系， 上海， 200092)

摘　要: 主要研究一类特殊的Finsler子流形–Berwald全脐子流形, 给出了这一类子流形的等价刻画, 推广了黎曼全脐子流形的一些结果.

关键词: Finsler流形; 等距浸入; Berwald全脐子流形

中图分类号: O186.14　文献标识码: A　文章编号: 0253-374X(2009)09-

On totally umbilical Berwald submanifolds of Finsler spaces

HE Qun , YANG Wei

(Department of Mathematics,Tongji University,Shanghai 200092,China)

Abstract:A class of special Finsler submanifolds–Berwald totally umbilical submanifolds is introduced, a equivalent description is given, and some results on Riemannian totally submanifolds are generalized.

Key words: Finsler manifold; isometric immersion; Berwald totally umbilical submanifold

§1. 引言

经过数学工作者近几十年的努力, Finsler子流形的研究已经取得了一些进展, 文[1]和[2]中, 已经给出了Finsler子流形的两种不同的平均曲率形式的定义. 文[3]和[4]给出了两种不同的Finsler极小子流形的Bernstein型定理. 由于联络有多种定义，例如广泛应用的Chern联络, Berwald联络等, 这种联络的多样性加大了研究Finsler几何的难度, 且造成第二基本形式定义的多样

*收稿日期: 2008-06-17

*作者简介：贺群(1962-),女,天津人,教授,理学博士,博士生导师,主要研究方向:整体微分几何.E-mail:hequn@tongji.edu.cn

*基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10571154; 10771160)

性. 由于陈联络和Berwald联络的第二基本形式并不是法向的, 对子流形几何的研究也造成了一定的困难.

本文主要研究一类特殊的Finsler子流形–Berwald全脐子流形, 即Berwald联络的第二基本形式满足条件$\tilde{h}(X,Y)=g(X,Y)v$的流形, 给出了这一类子流形的等价刻画, 推广了黎曼全脐子流形的一些结果.

§2. Finsler 流形的体积形式和极小浸入

设M 是一个n维光滑流形,M上的Finsler 度量是一个函数$F:TM\to[0,\infty)$ 满足下列性质: (i) F 在$TM\setminus\{0\}$上是光滑的; (ii) 对于任意的$\lambda>0$，$F(x,\lambda y)=\lambda F(x,y)$; (iii)诱导的二次形式$g$ 是正定的, 其中

$$g:=g_{ij}(x,y)dx^i\otimes dx^j,\qquad g_{ij}:=\frac{1}{2}[F^2]_{y^iy^j}. \tag{1}$$

这里及以下除特别声明外, 我们将使用下列指标值域:

$$1\le i,j,\cdots\le n;\quad n+1\le a,b,\cdots\le m;\quad 1\le\alpha,\beta,\cdots\le m(>n).$$

设$\pi:TM\to M$ 为自然投影, π^*TM为$TM\setminus\{0\}$上的拉回丛,射影球丛SM上的$\omega=[F]_{y^i}dx^i$为Hilbert 形式, 它的对偶向量场是$l=l^i\frac{\partial}{\partial x^i}$, $l^i=y^i/F$,称为特异场.设

$$\delta y^i=\frac{1}{F}(dy^i+N^i_jdx^j),\quad \frac{\delta}{\delta x^j}=\frac{\partial}{\partial x^j}-N^k_j\frac{\partial}{\partial y^k}. \tag{2}$$

射影球丛SM上关于$\hat{g}$的体积元$dV_{SM}=\Omega d\tau\wedge dx$,其中

$$\Omega:=\det\left(\frac{g_{ij}}{F}\right),\quad dx=dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n, \tag{3}$$

$$d\tau:=\sum_{i=1}^n(-1)^{i-1}y^idy^1\wedge\cdots\wedge\widehat{dy^i}\wedge\cdots\wedge dy^n. \tag{4}$$

设$R^{\ i}_{j\ kl}=-R^{\ i}_{j\ lk}$ 和$P^{\ i}_{j\ kl}=P^{\ i}_{k\ jl}$分别是Chern联络$^c\nabla$的$hh$-曲率和$hv$-曲率. 其Riemannian曲率张量和Landsberg曲率张量分别定义为

$$R^{\ i}_{j}:=R^{\ i}_{s\ jk}l^sl^k,\qquad L^i_{jk}:=-l^sP^{\ i}_{s\ jk}=\dot{A}^i_{jk}, \tag{5}$$

其中“·”表示沿Hilbert形式的共变微分. 另有一个无挠的Berwald 联络$^b\nabla$ 定义为

$$^b\nabla={}^c\nabla+\dot{A},\ B^i_{jk}=\Gamma^i_{jk}+\dot{A}^i_{jk},\ {}^b\omega^i_j=B^i_{jk}dx^k. \tag{6}$$

显然有$^c\nabla_l={}^b\nabla_l$.

设(M,F) 和$(\widetilde{M},\widetilde{F})$是Finsler流形, $f:M\to\widetilde{M}$ 是浸入. 若对任意的$(x,y)\in TM\setminus\{0\}$都有$F(x,y)=\widetilde{F}(f(x),df(y))$, 则f 称为等距浸入. 对于等距浸入$f:(M,F)\to(\widetilde{M},\widetilde{F})$, 显然有

$$g_{ij}(x,y)=\tilde{g}_{\alpha\beta}(\tilde{x},\tilde{y})f_i^\alpha f_j^\beta, \tag{7}$$

其中

$$\tilde{x}^\alpha=f^\alpha(x),\quad \tilde{y}^\alpha=f_i^\alpha y^i,\quad f_i^\alpha=\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i}. \tag{8}$$

设${}^b\tilde{\nabla}$ 是$\pi^*(f^{-1}T\widetilde{M})$上的拉回Berwald 联络, $\tilde{h}={}^b\,\tilde{\nabla}df$ 是关于Berwald联络的第二基本形式.对于任意的$X\in\mathcal{C}(\pi^*TM)$, $X^H=X^i\frac{\delta}{\delta x^i}$ 为X的水平部分. 则由(5), 我们得到

$$\begin{aligned}&\tilde{h}(X,Y)={}^b\,\tilde{\nabla}_X(dfY)-df({}^b\nabla_XY)={}^b\,\tilde{\nabla}_{X^H}(dfY)-df({}^b\nabla_{X^H}Y),\\&({}^b\tilde{\nabla}_{X^H}\tilde{g})(U,W)=2\tilde{A}(U,W,\tilde{h}(l,X))+2\tilde{L}(U,W,dfX),\end{aligned} \tag{9}$$

对于任意的$U,W\in\mathcal{C}((f\circ\pi)^*T\widetilde{M})$和$X,Y\in\mathcal{C}(\pi^*TM)$. $(9)_1$ 可写为

$$\tilde{h}_{ij}^\alpha=f_{ij}^\alpha-B_{ij}^kf_k^\alpha+\tilde{B}_{\beta\gamma}^\alpha f_i^\beta f_j^\gamma. \tag{10}$$

设

$$\begin{aligned}&h^\alpha=\tilde{h}_{ij}^\alpha y^iy^j=f_{ij}^\alpha y^iy^j-f_k^\alpha G^k+\widetilde{G}^\alpha,\quad h_\alpha=\tilde{g}_{\alpha\beta}h^\beta,\\&h:=\frac{h^\alpha}{F^2}\frac{\partial}{\partial\tilde{x}^\alpha},\qquad h^*:=\frac{1}{F^2}h_\alpha d\tilde{x}^\alpha,\end{aligned} \tag{11}$$

其中$f_{ij}^\alpha=\frac{\partial^2f^\alpha}{\partial x^i\partial x^j}$, G^k 和$\widetilde{G}^\alpha$ 分别是(M,F) 和$(\widetilde{M},\widetilde{F})$的测地系数, h 称为法曲率.

设$(\pi^*TM)^\perp$ 是π^*TM 在$(f\circ\pi)^*T\widetilde{M}$ 关于$\tilde{g}$的余正交丛,称为f的法丛.[2]

$$\mu=\frac{1}{c_{n-1}\sigma}\left(\int_{S_xM}\frac{h_\alpha}{F^2}\Omega d\tau\right)d\tilde{x}^\alpha. \tag{12}$$

$$\sigma(x):=\frac{1}{c_{n-1}}\int_{S_xM}\Omega d\tau, \tag{13}$$

其中c_{n-1} 表示$(n-1)$ 维单位Euclidean球面S^{n-1} 的体积, $S_xM=\{[y]\,|\,y\in T_xM\}$. 一个等距浸入$f:(M,F)\to(\widetilde{M},\widetilde{F})$被称为极小浸入，需要满足对$M$的任意紧区域，它都是任意变分向量场的体积泛函的临界点.

引理1[2] 设$f:(M,F)\to(\widetilde{M},\widetilde{F})$ 是等距浸入, f 是极小浸入当且仅当由(12)定义的$\mu=0$.

引理2[4] 设$f:(M,F)\to(\widetilde{M},\widetilde{F})$ 是等距浸入. 对任意的$X\in\mathcal{C}(\pi^*TM)$有

$$(\tilde{\nabla}_{l^H}\tilde{\nabla}_l df)(X)=df\mathfrak{R}(X)-\tilde{\mathfrak{R}}(dfX)+^b\tilde{\nabla}_{X^H}h. \tag{14}$$

§3.Berwald全脐子流形

设$f:(M,F)\to(\widetilde{M},\widetilde{F})$ 是一个等距浸入. 若对任意的$X,Y\in\mathcal{C}(\pi^*TM)$, 存在一个向量场$v\in\mathcal{C}[(\pi\circ f)^*T\tilde{M}]$, 使得关于Berwald联络的第二基本形式满足

$$\tilde{h}(X,Y)=g(X,Y)v, \tag{15}$$

则称f 是Berwald全脐的. 我们有下述结论

引理3 如果$f:(M,F)\to(\widetilde{M},\widetilde{F})$ 是一个等距浸入, 则M是Berwald全脐子流形的充要条件是$v=h$, 且h 是与方向y 无关的.

证明 必要性: 显然有

$$h=\tilde{h}(l,l)=v.$$

式(15)意味着$\tilde{h}^\alpha_{ij}=\frac{1}{F^2}h^\alpha g_{ij}$. 由此及式(11), 可以得到

$$[\frac{h^\alpha}{F^2}]_{y^i}=F^{-3}(F[h^\alpha]_{y^i}-2F_{y^i}h^\alpha)=0.$$

相反地，如果$[\frac{h^\alpha}{F^2}]_{y^i}=0$,则

$$\begin{aligned}(h^\alpha)_{y^iy^j}&=\frac{2}{F}(h^\alpha F_{y^iy^j}+F_{y^i}(h^\alpha)_{y^j})-\frac{2}{F}h^\alpha F_{y^i}F_{y^j}\\&=\frac{2}{F^2}g_{ij}h^\alpha,\end{aligned}$$

即$\tilde{h}^\alpha_{ij}=\frac{1}{F^2}h^\alpha g_{ij}$.

与Riemannian流形的情形类似, 可得

定理1 如果$f:(M,F)\to(\widetilde{M},\widetilde{F})$ 是一个Berwald全脐极小浸入, 则f是全测地的.

证明 若$f:(M,F)\to(\widetilde{M},\widetilde{F})$ 是一个Berwald全脐极小浸入, 则由引理1 以及h 与方向y 无关, 可得

$$\frac{1}{c_{n-1}\sigma}\frac{h^\beta}{F^2}\left(\int_{S_xM}\tilde{g}_{\alpha\beta}\Omega d\tau\right)=0,$$

由矩阵$(\tilde{g}_{\alpha\beta})$的正定性，可得矩阵$\left(\int_{S_xM}\tilde{g}_{\alpha\beta}\Omega d\tau\right)$是正定的。由此可得$h=0$, 也就是说$f$ 是全测地的.

定理2 Landzberg流形的任意的Berwald全脐子流形也是Landzberg流形.

证明 首先, 由式(10) 和[5]中的式(3.8.3) $\sim$ (3.8.5) , 可以得到

$$\begin{aligned}\tilde{F}_{y^\alpha}(h^\alpha_{ij})_{y^k} &= -\frac{\tilde{F}_{y^\alpha}}{F}({}^b\tilde{P}^\alpha_{\beta\gamma\delta}f^\delta_k f^\beta_i f^\gamma_j - {}^b P^l_{ijk}f^\alpha_l)\\ &= \frac{1}{F}(-2\dot{\tilde{A}}_{\beta\gamma\delta}f^\delta_k f^\beta_i f^\gamma_j + 2\dot{A}_{ijk})\end{aligned} \tag{16}$$

设$(\widetilde{M},\tilde{F})$ 是Landzberg流形，则有$\tilde{L}_{\beta\gamma\delta}=\dot{\tilde{A}}_{\beta\gamma\delta}=0$. 再设$(M,F)$ 为$(\widetilde{M},\tilde{F})$ 的任意Berwald全脐子流形，由式(16) 可以得到

$$\tilde{F}_{y^\alpha}(h^\alpha_{ij})_{y^k} = \frac{1}{F}(-2\dot{\tilde{A}}_{\beta\gamma\delta}f^\delta_k f^\beta_i f^\gamma_j + 2\dot{A}_{ijk}) = \frac{1}{F}(0+2L_{ijk}),$$

则

$$L_{ijk} = F\tilde{F}_{y^\alpha}(h^\alpha_{ij})_{y^k} = \frac{1}{F}\tilde{F}_{y^\alpha}h^\alpha C_{ijk} = 0,$$

即(M,F)是Landzberg流形.

定理3 局部Minkowski空间中任意维数不小于3的非全测地Berwald全脐子流形必为具有正常截面曲率的黎曼流形.

证明 首先, 由引理2和式(9), 可以得到

$$\begin{aligned}(\tilde{\nabla}_{l^H}\tilde{\nabla}_l df)(X) &= \tilde{\nabla}_{l^H}[\tilde{h}(X,l)] - (\tilde{\nabla}_l df)(\tilde{\nabla}_{l^H}X)\\ &= (\tilde{\nabla}_{l^H}\tilde{h})(X,l)\end{aligned} \tag{17}$$

设$(\widetilde{M},\tilde{F})$ 是局部Minkowski空间，(M,F) 为$(\widetilde{M},\tilde{F})$ 的任意Berwald全脐子流形，(x,y) 是$TM\backslash\{0\}$ 的局部坐标，对$\forall X\in TM\backslash\{0\}$，满足$X\perp y$，且$||X||=1$ ，由(15)和(17), 可以得到(M,F)的旗曲率为

$$\begin{aligned}K(y,X) &= g(\mathfrak{R}(X),X)\\ &= \tilde{g}(\tilde{\mathfrak{R}}(dfX),dfX) + \tilde{g}((\tilde{\nabla}_{l^H}\tilde{\nabla}_l df)(X) - {}^b\tilde{\nabla}_{X^H}h, dfX)\\ &= 2\tilde{L}(dfX,dfX,h) + \tilde{g}(h,\tilde{g}(X,X)h) - \tilde{g}(\tilde{h}(l,\nabla_{l^H}X),dfX)\\ &\quad - ||(\tilde{\nabla}_l df)X||^2 + l^H\tilde{g}((\tilde{\nabla}_l df)X,dfX)\\ &= ||h||^2,\end{aligned}$$

即(M,F)具有数量旗曲率$||h||^2$. 由定理2，M为Landzberg流形. 根据Numata定理，维数不小于3的具有非零数量旗曲率的Landsberg空间必为黎曼流形. 因此，若M非全测地，则M必为具有正常截面曲率的黎曼流形.

例 Minkowski-Randers空间$(V^{n+2},\tilde{\alpha}+\tilde{\beta})$, 其中$\tilde{\alpha}=\sqrt{\sum_\lambda(\tilde{y}^\lambda)^2}, \tilde{\beta}=b\tilde{y}^{n+2}$, $0<b<1$ 为常数. 设$M=\{\tilde{x}\in V^{n+2}|\tilde{x}^{n+2}=0,\sum_{\alpha=1}^{n+1}(\tilde{x}^\alpha)^2=1\}, f: M\to V^{n+2}$, 则$\beta=f^*\tilde{\beta}=0, F=f^*\tilde{F}=\alpha$ 为黎曼度量, (M,F) 是$(V^{n+2},\tilde{\alpha}+\tilde{\beta})$ 的Berwald全脐子流形.

参考文献

[1] Shen Z M, On Finsler geometry of submanifolds[J], Math. Ann., 1998,(**311**):549.

[2] HE Qun, SHEN Yibing, 关于Finsler子流形的平均曲率[J], Ann. of Math., 2006,(**27A**):663.

[3] Souza M, Spruck J, Tenenblat K, A Bernstein type theorem on a Randers space[J], Math. Ann., 2004,(**329**): 291.

[4] HE Qun, SHEN Yibing, Some Results on Harmonic Maps for Finsler Manifolds[J], International journal of Math., 2005,(**16**):1017.

[5] Bao D,Chern S S, Shen Z M, An Introduction to Riemann-Finsler Geometry[M], GTM **200**,[s.l.], Springer-Verlag, 2000.

[6] Bao D and Chern S S, A note on the Gauss-Bonnet theorem for Finsler spaces[J], Ann. of Math., 1996,(**143**):1.

[7] Rund H, The Differential Geometry of Finsler Spaces[M], Springer-Verlag, [s.l.],1959.