第38卷第10期
2010年10月

同济大学学报(自然科学版)
JOURNAL OF TONGJI UNIVERSITY(NATURAL SCIENCE)

Vol.38 No.10
Oct. 2010

文章编号：0253-374X(2010)10-1550-06　　DOI:10.3969/j.issn.0253-374x.2010.10.028

券商集合理财产品定价问题研究

梁　进[1],孔亮亮[1],马俊美[2]

(1.同济大学 数学系,上海 200092; 2.上海财经大学 应用数学系,上海 200433)

摘要：基于Black-Scholes期权定价模型,用偏微分方程方法,研究其定价和性质.通过对冲技巧及Itô公式,在双因子模型下,建立了具提前转开条款的券商集合理财产品的定价模型,用差分方法得到了定价的数值解.通过固定封闭期模型与一般转开模型的比较,分析了转开条款带来的流动性价值.最后,利用理论结果,对实际产品——光大阳光集合理财产品进行实证分析,并讨论模型在定价中的作用及局限.

关键词：券商集合理财; 保底条款; 提前转开; 偏微分方程; Black-Scholes模型

中图分类号：F 830.9　　**文献标识码**：A

Pricing of Security Investment Products

LIANG Jin[1], *KONG Liangliang*[1], *MA Junmei*[2]

(1. Department of Mathematics, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. Department of Applied Mathematics, Shanghai University of Finance and Economics, Shanghai 200433, China)

Abstract: Based on Black-Scholes Model, the pricing of SIPs was investigated with PDE method. With the double-factor model, a pricing model for the SIPs was established with an earlier exercise condition according to hedging techniques and Ito Lemma. And the numerical solution was obtained with the difference method. The value of the liquidity was analyzed by comparing the models with or without the early open condition. Finally, a case study was made of Guangda SIP. The roles the model in pricing and its limits were discussed as well.

Key words: security investment products; guarantee clause; early exercise condition; partial differential equation; Black-Scholes model

券商集合理财产品,也称集合资产管理计划(简称券集),是由发行产品的证券公司集合投资者的资金进行投资管理、到期与投资者分享收益的兼有基金及信托特点的业务.作为一种私募性产品,券集的条款设计可按投资者需求有很大的自由度,因此受到投资者青睐,规模在短时间内迅速扩大.

2005年2月,光大证券的阳光集合资产管理计划[1]获中国证监会批准成立,成为首个发行的集合理财产品.之后,券集迅速成为投资者新宠,截至2007年8月,已有27个集合资产管理计划相继成立,总规模近580亿,市值超800亿.券集分为限定性和非限定性集合理财计划.前者主要投资新股发行、国债、国家重点建设债券、债券型投资基金等信用度较高的固定收益类金融产品,投资于股票、股票型基金等风险类产品的比例一般不超过20%.该类产品适合风险承担能力较弱的投资者.后者的投资范围由管理方和投资者约定,一般投资二级市场的股票等高风险、高收益产品适合有较大风险承担能力且能力较弱的投资者.券集与传统基金相比有如下特点:

(1) 私募性。不同于传统产品,不能用电视、广播、报刊等媒体发广告.

(2) 门槛高。限定性理财产品的投资起点不低于5万元人民币,非限定性的投资起点不低于10万元人民币,大大高于一般基金.

(3) 范围广。虽然限定性券集的投资范围限制较多,与债券型基金相似,但是对于非限定性券集来说,只要是在合约中规定的投资品,都是可投资的.

(4) 封闭期。封闭期较短,只有6个月到2年,期间不能在交易所交易.因此,投资券集就须等到封闭期结束才能收回投资.

(5) 收益分配方式。与传统基金有很大不同,

收稿日期：2008-10-31
基金项目：国家"九七三"重点基础研究发展计划资助项目(2007CB814903)
作者简介：梁　进(1959—),女,教授,博士生导师,主要研究方向为金融数学. E-mail:liang_jin2005@yahoo.com.cn

券集管理者的收入分为 2 部分:封闭期内按金额收取的管理费和到期时按业绩提取的分成.

(6) 自有资金承担有限责任。在券集成立时,管理者会用自有资金按一定比例参与.与传统基金不同,这部分资金不只和其他资金一起承担风险,还承担有限责任.该条款大大增加了券集的投资价值.

(7) 费用低。在收费方面较灵活,如中信理财 2 号,不收认购费、申购费、赎回费.当然,券商也可以与投资人约定其他收费方式.

券集的投资只有在封闭期结束后,投资者才能赎回投资并获回报,投资券集相当于购买了一份未定权益.本质上说,这是一种价值依赖于所持有的证券组合的价格的衍生证券.因此,可用 Black-Scholes 期权定价模型对其定价[2].文献[3]案例篇第 11 章中对固定期和触发转开的券集就运用了期权定价模型,并给出显式解.

提前转开条款是券集特有的条款.从对其分析可以看出,提前转开的条件与券集净值超过某一水平的连续累积时间有关.该条款与关卡期权中巴黎期权的敲入(敲出)条款相似,因此可借鉴巴黎期权的定价方法分析此问题.巴黎期权不易得到其显式解.文献[4－7]都是在无套利市场的假设下探讨其定价计算方法,有通过差分方法求解,或通过奇性消除技术[6]得到更高精度的数值解,还有通过拉普拉斯转换的方法得到精度很高且计算时间较短的数值解.这些均是对在常数利率假设下得到的模型进行的数值求解.本文也基于无套利市场的假设下,但假定无风险利率为随机的,先将方程降维化简,再用最简差分格式求解方程.

1　定价模型建立

遵循标的资产和利率的随机过程的通用假设[5,8－9],基本假定如下:

(1) 市场有效,无摩擦,无套利机会.

(2) 在封闭期内,产品净值 S_t 满足几何布朗运动

$$\mathrm{d}S_t = r_t S_t \mathrm{d}t + \sigma_1 S_t \mathrm{d}W_{1t} \tag{1}$$

式中:r_t 为无风险利率,t 为时间;σ_1 为净值波动率,是常数;W_{1t}为标准布朗运动.

(3) 无风险利率 r_t 服从 Vasicek 模型

$$\mathrm{d}r_t = \alpha(\theta - r)\mathrm{d}t + \sigma_2 \mathrm{d}W_{2t} \tag{2}$$

式中:α,θ,α_2 为常数;W_{2t}为标准布朗运动.Cov($\mathrm{d}W_{1t}$,$\mathrm{d}W_{2t}$)$=\rho\mathrm{d}t$,$|\rho|\leqslant 1$.

(4) 保底条款.管理者自有资金参与产品,比例为 ω(自有比例).券集约定一个收益水平 K(承诺收益),当到期其净值 $S_t \geqslant K$ 时,管理者收取超出部分管理费,比例为 $1-\beta$(佣金比例);否则,管理者的自有部分将补偿投资者,直至偿完.$0<\beta$,$\omega<1$.

(5) 提前开放条款.设约定收益水平为 K_1,在封闭期内,如果券集净值持续超过 $K_1P(r,t;T)$的时间达 D,则封闭期提前结束.$P(r,t;T)$是到期日为 T、面值为 1 的无风险零息票价格.开放后,投资者与管理者按假设(4)约定,分享收益.

假设(5)的意义是,券集净值高过贴现的门槛 K_1 时,则计时参数开始计时.

引入计时参数 τ:$\tau(t)=t-\sup\{t'\leqslant t \mid S(t')\leqslant K_1P(r,t';T)\}$.$\tau$ 是时间 t 与净值 S 的函数,是在 t 时刻产品净值连续超过关卡 K_1 的贴现的时间.若 t 时刻净值不大于 K_1,则 $\tau(t)=0$.图 1 为计时参数示意图(取 $r=0$,边界为直线).

对于计时函数 $\tau(t)$,有

$$\mathrm{d}\tau(t) = \begin{cases} \mathrm{d}t & S_t > K_1P \\ -\tau(t-) & S_t = K_1P \\ 0 & S_t < K_1P \end{cases} \tag{3}$$

其中,$\tau(t-)$是 $\tau(t)$的左极限.当 $S_t>K_1P$ 时,$\tau(t)$的变化率与 t 一致;当 $S_t=K_1P$ 时,$\tau(t)$重置为零;而当 $S_t<K_1P$ 时,$\tau(t)$一直为零.

投资者的权益是关于券集净值 S_t、利率 r、时间 t 以及计时参数 τ 的函数,记为 $C(S,r,t,\tau)$.由假设(4),在封闭期到期日投资者的收益可表示为

$$C(S,r,T,\tau) = \varphi(S) \tag{4}$$

$$\varphi(S) \triangleq [K + \beta(S-K)^+]\mathbf{1}_{K\leqslant S} + \left[\frac{1}{1-\omega}S - \left(\frac{1}{1-\omega}S - K\right)^+\right]\mathbf{1}_{S<K} \tag{5}$$

其中,1_a 表示集合 a 的示性函数.

根据假设(5),当 $\tau(t)=D$ 时,封闭期提前结束.此时,投资者收益为

$$C(S,t,r,D) = KP + (S_t - KP)\beta \tag{6}$$

利用对冲技巧,构造投资组合 Π 由 1 份券集 C 多头、Δ_1 份券集标的资产以及 Δ_2 份无风险债券空

头组成,即

$$\Pi_t = C_t - \Delta_1 S_t - \Delta_2 P_t \tag{7}$$

在$(t, t+\Delta t)$内,Π 的收益为

$$\mathrm{d}\Pi_t = \mathrm{d}C_t - \Delta_1 \mathrm{d}S_t - \Delta_2 \mathrm{d}P_t \tag{8}$$

由 Itô 公式

$$\begin{aligned}\mathrm{d}C = &\left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\sigma_1^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + \right.\\ &\left.\frac{\sigma_2^2}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial r^2} + \rho\sigma_1\sigma_2\frac{\partial^2 C}{\partial r\partial S}\right)\mathrm{d}t + \\ &\frac{\partial C}{\partial S}\mathrm{d}S_t + \frac{\partial C}{\partial r}\mathrm{d}r_t\end{aligned} \tag{9}$$

$$\mathrm{d}P_t = \frac{\partial P}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial P}{\partial r}\mathrm{d}r_t + \frac{\sigma_2^2}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}\mathrm{d}t \tag{10}$$

取 $\Delta_1 = \frac{\partial C}{\partial S}, \Delta_2 = \frac{\partial C}{\partial r}\Big/\frac{\partial P}{\partial r}$,可使 Π 无风险.即

$$\mathrm{d}\Pi_t = r\Pi_t\mathrm{d}t \tag{11}$$

得

$$\begin{aligned}&\left[\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial \tau} + \frac{\partial C}{\partial S}rS + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 C}{\partial r^2}\sigma_2^2 + \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\sigma_1^2 S^2 + \right.\right.\\ &\left.\left.2\frac{\partial^2 C}{\partial r\partial S}\rho S\sigma_1\sigma_2\right) - rC\right]\Big/\frac{\partial C}{\partial r} = \\ &\left[\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial rt^2}\sigma_2^2 - rP\right]\Big/\frac{\partial P}{\partial r}\end{aligned} \tag{12}$$

式(12)左边为 C 的表达式,而右边为 P 的表达式.因此,两边应该等于一个与 C,P 均无关的值.由 Vasicek 利率模型的定价方程知

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \alpha(\theta - r)\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma_2^2\frac{\partial^2 P}{\partial rt^2} - rP = 0 \tag{13}$$

进一步推得:当 $S_t > K_1 P$ 时

$$\mathscr{L}C + \frac{\partial C}{\partial \tau} = 0 \tag{14}$$

其中,算子 $\mathscr{L}$ 为

$$\begin{aligned}\mathscr{L} = &\frac{\partial}{\partial t} + S\,r\frac{\partial}{\partial S} + \alpha(\theta - r)\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\sigma_1^2 S^2}{2}\cdot\\ &\frac{\partial^2}{\partial S^2} + \frac{\sigma_2^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \rho\,\sigma_1\sigma_2 S\frac{\partial^2}{\partial S\partial r} - r\end{aligned} \tag{15}$$

当 $S_t < K_1 P$ 时

$$\mathscr{L}C = 0 \tag{16}$$

连接条件:由于在 $S_t = K_1 P$ 处,$\tau(t)$被重置,故有

$$C(K_1 P, t, r, \tau) = C(K_1 P, t, r, 0) \tag{17}$$

因此,含封闭期提前转开条款的定价为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial C(S,t,r,\tau)}{\partial \tau} + LC(S,t,r,\tau) = 0\\ &\qquad S_t > K_1 P, 0 < t < T, 0 < \tau < D\\ &LC(S,t,r,\tau) = 0\\ &\qquad 0 < S < K_1 P, 0 < t < T\\ &C(S,t,r,\tau) = C(S,t,r,0)\\ &\qquad S = K_1 P, 0 < t < T\\ &C(S,t,r,\tau) = KP + (S_t - KP)\beta\\ &\qquad S > K_1 P, 0 < t < T\\ &C(S,T,r,\tau) = \varphi(S) \quad S \in \mathbf{R}^+\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

需要说明的是若无提前转开条款,固定封闭期的含隐性保底条款的券集定价满足

$$\left.\begin{aligned}&\mathscr{L}\widetilde{C}(s,r,t) = 0, 0 < S < +\infty\\ &\qquad 0 < t < T\\ &\widetilde{C}(S,r,T) = \varphi(S) \quad 0 < S < +\infty\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

2 模型求解

式(18)给出了提前封转开的产品的定价方程,但没有解析解.下面利用数值方法对其求解.仔细分析会发现,除了边值条件及终值条件不同外,式(18)与巴黎期权结构一样,因此,可以借鉴巴黎期权的解法.

Haber-Schonbucher 和 Wilmott 用差分方法对巴黎期权求解[4-5],罗和吴用奇性消除技术对巴黎期权求解,得到的精度更高[6],均是对在常数利率假设下得到的模型求解数值.本文假设无风险利率为随机的,用最简差分格式求解方程,可先化简方程.

方程(18)是二维问题,可以利用相对价格法降维处理.设 $P(r,t)$为到期日为 T、面值为 1 的无风险零息票的价格,则其满足方程

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial P}{\partial t} + \alpha(\theta - r)\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\sigma_2^2}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - rP = 0\\ &\qquad (r,t) \in \mathbf{R} \times [0,T]\\ &P(r,T) = 1\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Vasicek 给出该问题的解[10]

$$P(r,t;T) = \exp(A(t;T) - rB(t;T)) \tag{21}$$

$$\left.\begin{aligned}&A(t;T) = \left(\theta - \frac{\sigma_2^2}{2\alpha^2}\right)(B - T + t) - \frac{\sigma_2^2 B^2}{4\alpha}\\ &B(t;T) = 1 - \exp(-\alpha(T-t))/\alpha\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

转换计价单位,令 $V = C/P$, $X = S/P$,化简得

$$\left.\begin{array}{ll}\dfrac{\partial V}{\partial t}+\dfrac{\partial V}{\partial \tau}+\dfrac{\sigma^2(t)X^2}{2}\dfrac{\partial^2 V}{\partial X^2}=0 & X>K_1,0<t<T,0<\tau<D\\ \dfrac{\partial V}{\partial t}+\dfrac{\sigma^2(t)X^2}{2}\dfrac{\partial^2 V}{\partial X^2}=0 & X<K_1,0<t<T\\ V(X,t,r,\tau)=V(X,t,r,0) & X=K_1,0\leqslant t\leqslant T\\ \hat{V}(X,t,r,D)=K+(X-K)\beta & X>K_1,0<t\leqslant T\\ \hat{V}(X,T,r,\tau)=\varphi(X) & X\in \mathbf{R}^+\end{array}\right\} \tag{23}$$

$$\sigma^2(t)=\sigma_1^2+\sigma_2^2\left(\frac{\partial P}{\partial r}\right)^2\frac{1}{P^2}-2\rho\sigma_1\sigma_2\frac{1}{P}\frac{\partial P}{\partial r}=\sigma_1^2+\sigma_2^2B^2+2\rho\sigma_1\sigma_2B \tag{24}$$

令 $Y=\ln(X/K_1)$,则式(23)可化为

$$\left.\begin{array}{ll}\dfrac{\partial V}{\partial t}+\dfrac{\partial V}{\partial \tau}+\dfrac{\sigma^2(t)}{2}\dfrac{\partial^2 V}{\partial Y^2}-\dfrac{\sigma^2(t)}{2}\dfrac{\partial V}{\partial Y}=0 & Y>0,0<t<T,0<t<D\\ \dfrac{\partial V}{\partial t}+\dfrac{\sigma^2(t)}{2}\dfrac{\partial^2 V}{\partial Y^2}-\dfrac{\sigma^2(t)}{2}\dfrac{\partial V}{\partial Y}=0 & Y<0,0<t<T\\ V(Y,t,\tau)=V(Y,t,0) & Y=0,0\leqslant t\leqslant T\\ \hat{V}(Y,t,D)=K+(K_1\mathrm{e}^Y-K)\beta & Y>0,0<t\leqslant T\\ \hat{V}(Y,t,\tau)=\varphi(K_1\mathrm{e}^Y) & Y\in\mathbf{R}\end{array}\right\} \tag{25}$$

需要说明的是对于式(19),同样变换计价单位 $\hat{V}=\hat{C}/P$,$X=S/P$,得

$$\left.\begin{array}{ll}\dfrac{\partial \widetilde{V}}{\partial t}+\dfrac{1}{2}\sigma^2(t)X^2\dfrac{\partial^2 V}{\partial X^2}=0 & (X,t)\in\mathbf{R}^+\times[0,T]\\ \hat{V}(X,T)=\varphi(X) & X\in\mathbf{R}^+\end{array}\right\} \tag{26}$$

可得式(19)的解为

$$\widetilde{C}(S,r,t)=(S/1-\omega)N(d_1((1-\omega)K))+\beta SN(-d_1(K))+PK[(1-\beta)+\beta N(d_2(K))-N(d_2((1-\omega)K))] \tag{27}$$

$$d_1(z)=(\ln z-Y-\tau/2)/\sqrt{\tau}d_2(z)=d_1(z)+\sqrt{\tau}Y=\ln(S/P)\tau=\int_t^{\mathrm{T}}\sigma^2(\xi)\mathrm{d}\xi \tag{28}$$

其中,$\sigma^2(\xi)$ 由式(24)给出.特别地,当 $S=1$,$r_1=r_0$(常数)时,3 个参数 K,ω,β 满足关系式

$$\beta=\frac{\mathrm{e}^{-r_0T}\left\{1-N\left\{\left[2\ln((1-\omega)K)+(\sigma_1^2-r_0)^T\right]\big/2\sigma_1\sqrt{T}\right\}\right\}+N/(1-\omega)\left\{\left[2\ln((1-\omega)K)-(\sigma_1^2+r_0)T\right]\big/2\sigma_1\sqrt{T}\right\}}{\mathrm{e}^{-r_0T}\left\{1-N\left\{\left[2\ln K+(\sigma_1^2-r_0)T\right]\big/2\sigma_1\sqrt{T}\right\}\right\}-N\left\{-\left[\ln K-(\sigma_1^2+r_0)T\right]\big/2\sigma_1\sqrt{T}\right\}} \tag{29}$$

其中,$N(\cdot)$为标准正态分布函数.

固定封闭期的含隐性保底条款的券集定价由显式(27)、式(28)给出.而具提前转开条款的券集定价能计算数值.下面对式(25)做差分[11].令 $Y_i=i\Delta Y$,$T=-t_n=n\Delta t$,$D-\tau_j=j\Delta\tau$.记 $N,\bar{j},\bar{i}$ 分别满足 $T=N\Delta t$,$D=\bar{j}\Delta\tau$,$S=K_1\mathrm{e}^{\bar{i}\Delta Y}P=K_1P$ 的参数,则 $i=\bar{i}$,$j=\bar{j}$ 时,分别对应达到空间关卡与计时关卡的点,即当 $i=\bar{i}$ 时,$S=K_1P$;$j=\bar{j}$ 时,$\tau=D-\bar{j}\Delta\tau=0$.令

$$L_{(i,j),n}=(\sigma^2(t_n)/2)(V_{(i+1,j),n}-2V_{(i,j),n}+V_{(i-1,j),n}/\Delta X^2)+\sigma^2(t_n)\cdot(V_{(i+1,j),n}-V_{(i-1,j),n})/4\Delta X \tag{30}$$

当 $i<\bar{i}$ 时,$S<K_1P$,由式(3)知,计时参数不变.由式(6)得

$$V_{(i,j),n+1}=V_{(i,j),n}+\Delta tL_{(i,j),n}\quad \forall j \tag{31}$$

当 $i=\bar{i}$ 时,$S=K_1P$,由计时参数 τ 的定义知,此时 τ 被重置为零,或者说 $j=\bar{j}$.利用式(6),有

$$V_{(i,j),n+1}=V_{(i,j),n}+\Delta t\,L_{(i,j),n} \tag{32}$$

由于此时计时参数被重置为零,故有

$$V_{(i,j),n+1}=V_{(i,j),n+1}\quad 0<j<\bar{j},0\leqslant n\leqslant N \tag{33}$$

当 $i>\bar{i}$ 时,$S>K_1P$,由式(3)知,τ 与 t 的变化一致.由式(6)得

$$V_{(i,j+1),n+1}=V_{(i,j),n}+\Delta t\,L_{(i,j),n} \tag{34}$$

综合以上分析，式(6)可化为

$$
\left.\begin{array}{ll}
V_{(i,j),n+1}=V_{(i,j),n}+\Delta t\,L_{(i,j),n} & i<\bar{i},0\leqslant n<N,\\
\qquad 0\leqslant j\leqslant\bar{j} & \\
V_{(i,j),n+1}=V_{(i,j),n+1} & i=\bar{i},0\leqslant n<N,j<\bar{j}\\
V_{(i,j),n+1}=V_{(i,j),n}+\Delta t\,L_{(i,j),n} & j=\bar{j}\\
V_{(i,j+1),n+1}=V_{(i,j),n}+\Delta t\,L_{(i,j),n} & i>\bar{i},0\leqslant n<N,\\
\qquad 0\leqslant j<\bar{j} & \\
V_{(i,0),n}=K+(K_1\mathrm{e}^{i\Delta Y}-K)\beta & j=0,\forall\, i,n\\
V_{(i,j),0}=\varphi(K_1\mathrm{e}^{i\Delta Y}) & n=0,\forall\, j,n
\end{array}\right\}\tag{35}
$$

这样，由式(35)及 $C=VP$ 可以计算券集定价．

3　计算结果与参数分析

由于式(35)中 $i\in\mathbf{Z}$，在实际运算中，取适当的 $I>0$，$-I\leqslant i\leqslant I$，并令 $\hat{V}_{(I,j),n}=K+(K_1\mathrm{e}^{I\Delta Y}-K)\beta$，$\hat{V}_{(-I,j),n}=\mathrm{e}^{I\Delta Y}/1-\omega$．利用式(35)、$C=VP$ 及 MATLAB 编程，得到初始时刻产品价值和产品净值的关系．

图1为 $K=1.03$，$K_2=1.06$，$\sigma_1=0.25$，$r_0=0.025$，$a=1$，$\theta=0.022\,5$，$\sigma_2=0.2$，$\omega=0.1$，$\beta=0.5$，$T=1$，产品的 $t=0$ 时，券集投资价值关于产品净值与累积计时参数的关系．可以看到，当净值较小时，投资价值高于净值．这由于产品的保底性条款使得投资者回报有保障．而当净值较大时，券集价值反而比净值低，原因在于若投资者在净值较高时投资券集，产品转开的可能性大，而产品转开管理者将收取比例佣金，投资者收益反而受损．图2给出了在初始时刻计时参数为零的情况下投资价值与产品净值的关系．可以看出，总体上，随着净值增加，券集投资价值也增加，但增加幅度有所不同．在转开边界附近曲线较平缓，而在净值较低或较高时，变化较快．

图3为在上述参数下，产品价值对净值的相对变化情况．可以看出，随着计时参数的增加，在转开边界附近，产品价值的变化很快．在转开边界上，存在着不连续点．这一性质与巴黎期权在敲入(敲出)边界上的性质相似．

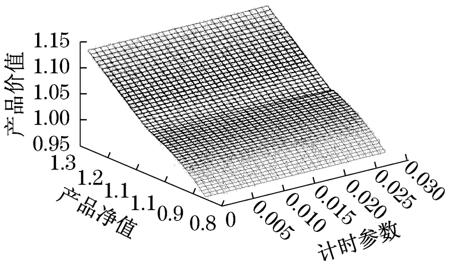

图1　产品价值与净值及计时参数的关系

Fig.1　Relation among the value, net and the time

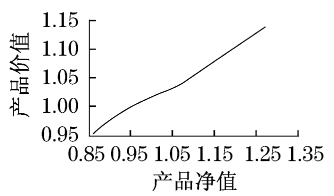

图2　初始时刻产品价值与净值的关系

Fig.2　Value against the net at the initial time

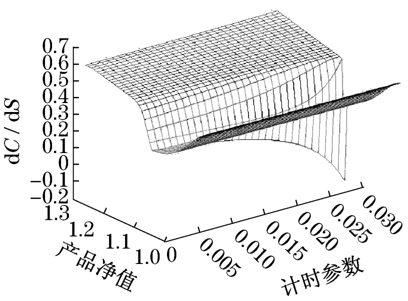

图3　产品价值随产品净值的变化关系

Fig.3　Value of the product against the net

在固定封闭期的券集模型中无提前转开条款，其余假定与提前转开条款券集一致，式(28)给出了其显式解．式(25)给出的是市场无风险利率服从 Vasicek 利率模型的情况下具提前转开条款的产品所满足的定价方程．因此，这2个解之间的差别体现的就是转开条款所带来的产品投资价值的变化．

利用式(29)、式(35)可以计算出提前转开条款下券集的定价．

图4为所有参数相同的情况下2个产品的价值．由图看出，有提前转开条款的产品价值高于相应的封闭期固定的产品．含提前转开条款的奖励价值与固定封闭期的价值之比随着净值的上升而下降．当净值较低时，比值相对较大，且变化率也大．这说明在净值较低时流动性在整个投资价值中贡献较大，而随着净值的增加，比值趋于常值，转开条款所能提供的流到性价值越来越弱．

一般情况下，产品成立时净值为1．从图4可看到，提前转开条款下产品的价值比不含此条款产品

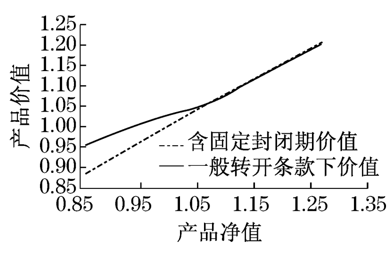

图4　固定封闭期产品与提前转开产品价值比较

Fig.4　Comparison between the value of the products with fixed close period and the advance product value

的价值高出约 2%,从而体现提前转开条款的价值.

4　实例分析

图 5 给出了从 2005 年 4 月光大阳光集合理财计划[1]成立至 2007 年 7 月间净值的变化情况.

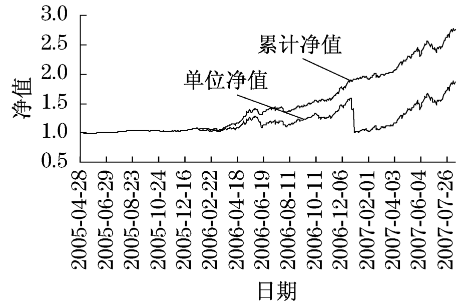

图 5　光大阳光集合理财计划净值

Fig.5　Net value of the Guangda Sunshine chowmatistic plan

从其招募书中知,封闭期为 2 年,隐性保底收益为 1.03.即只有当 2 年后净值高于 1.03 时,管理者才能收取业绩分红,比例为 50%(提前转开时也按此比例收取报酬).光大证券自身参与到计划的成立中,所占份额为 10%.该份额将承担有限责任.转开边界门槛为 1.06,计时边界为 10 d,即在封闭期内,若净值超过 1.06 累计达到 10 d,则封闭期提前结束,投资者可以赎回投资并获得收益.利用市场数据可得年化波动率为 0.20.虽然从严格意义上讲,在投资初期不可能知道产品的波动率,但波动率体现了管理者的能力.因此,可以利用它来计算产品的投资价值.2005 年,我国的 1 年期存款利率为2.25%,因此,在模型中取 $r=0.022\,3$.

利用式(3),得到其初始时刻的价值为 1.018 7,大于初始时刻投资者所必须投资的 1.原因可能包括以下几方面:

(1) 作为第 1 个券商集合理财产品,出于吸引投资者的目的,做了许多让利于投资者的设计.而最重要的原因在于,在收取的报酬比例为 50%的前提下,券商自有资金的投资比例高达 10%,且该份额将承担投资收益不足时弥补投资者损失的责任.在这之后的券商集合理财产品中,券商自有资金的参与比例多为 3%～5%,而且自有份额往往不承担投资失败的责任.从本模型看,该比例过高.

(2) 本模型与实际略有不同.在本模型中,计时参数开始与结束的边界是时间的函数,而在实际中这个边界是常数.

(3) 从 2005 年起,我国进入加息周期,利率不断上升,而本文均假设利率为均值回复的 Vasicek 模型,参数与实际可能有差别.

5　结语

基于 Black-Scholes 期权定价理论,在无风险利率为均值回归 Vasicek 模型假设下,建立了含提前转开条款的券商集合理财产品定价的偏微分方程模型,并且用差分方法得到了数值解.在此基础上进一步分析了转开条款带来的流动性价值.最后以光大阳光集合理财计划为例进行了实证分析.

致谢:感谢姜礼尚教授对本文的关心指导与有效建议和意见.

参考文献:

[1] 光大证券股份有限公司.光大阳光集合资产管理计划说明书[EB/OL].[2005 - 03 - 15].http://www.ebscn.com/gdyg/djxz-common.asp.
Everbright Securities Co. LTD. Guangda sunshine asset management plan statement[EB/OL].[2005 - 3 - 15].http://www.ebscn.com/gdyg/djxz-common.asp.

[2] 任学敏,李少华.保底型基金的设计与定价[J].系统工程理论与实践,2005,9:22.
REN Xuemin,LI Shaohua.The design and pricing of a fund with promised lowest return[J].Systems Engineering——Theory & Practice,2005,9:22.

[3] 姜礼尚,徐承龙,任学敏,等.金融衍生产品的数学模型和案例分析[M].北京:高等教育出版社,2008.
JIANG Lishang, XU Chenglong, REN Xuemin, et al. Mathematical modeling and case analysis for pricing of financial derivatives[M].Beijing:Higher Education Press,2008.

[4] Richard J Haber, Philipp J Schonbucher, Paul Wilmott. Pricing parisian options[J].Journal of Derivatives,1999,6(3):71.

[5] Paul Wilmott. Derivatives——the theory and practice of financial engineering[J].New York:John Wiley & Sons,1998.

[6] 罗俊,吴雄华.巴黎期权定价问题的数值方法[J].数值计算与计算机应用,2004,25(2):81.
LUO Jun,WU Xionghua.Numerical method for pricing parision option[J]. Journal on Numerical Methods and Computer Applications,2004,25(2):81.

[7] Bernard C,Courtois O,Quittard-pinon F.A new procedure for pricing parisian[J]. The Journal of Derivatives, 2005, 12(4):45.

[8] John C Hull.Options futures and other derivatives[M].4th ed. Beijing:Tsinghua University Press.

[9] Jiang L S.Mathematical modeling and methods of option pricing[M].Singapore:World Scientific Publishing,2005.

[10] Oldrich Vasicek. An equilibrium characterization of term structure[J].Journal of Financial Economics,1977,5:177.

[11] 胡健伟,汤怀民.微分方程数值方法[M].北京:科学出版社,1999.
HU Jianwei, TANG Huaimin. Numerical methods of the differential equations[M].Beijing:Science Press,1999.