

# 图像重投影及其在极线校正中的应用

廖晓峰<sup>1</sup>, 许小艳<sup>1</sup>, 刘 然<sup>1,2</sup>

(1. 重庆大学 计算机学院, 重庆 400044; 2. 四川虹微技术有限公司, 四川 成都 610041)

**摘要:** 针对摄像机绕光心旋转的情形, 讨论了在这种特殊情形下图像重投影具有的性质, 然后根据这些性质给出了使 2 幅图像平面平行的方法, 最后介绍了图像重投影技术在极线校正中的应用, 提出了一种新的极线校正方法. 该极线校正方法的特点是需要采用图像重投影技术将 2 幅图像重投影到平行的平面. 实验表明, 该方法能够在完成极线校正的同时保持图像的扭曲较小.

**关键词:** 图像重投影; 极线校正; 极线几何; 单应矩阵  
**中图分类号:** TP 391.41 **文献标识码:** A

## Image Reprojection and Its Application to Epipolar Line Rectification

LIAO Xiaofeng<sup>1</sup>, XU Xiaoyan<sup>1</sup>, LIU Ran<sup>1,2</sup>

(1. College of Computer Science, Chongqing University, Chongqing 400044, China; 2. Panovasic Technology Co., Ltd., Chengdu 610041, China)

**Abstract:** This paper first discusses the properties of the image reprojection when the camera rotates around its optical center. Then the methods for making the image planes parallel based on the properties are introduced. Finally, application of the image reprojection for epipolar line rectification is presented. A new epipolar line rectification method, which is characterized by reprojecting the images so as to make their image planes parallel, is given. The experiment results show that the presented rectification method works accurately with low image distortion.

**Key words:** image reprojection; epipolar line rectification; epipolar geometry; homography

图像重投影是指通过对任意视点的参考图像进行投影来产生新的图像<sup>[1]</sup>. 由于图像重投影能够改

变已生成的图像的视线方向, 因此它在多视点图像的实时渲染、视图变形 (view morphing)、图像拼接 (image mosaic) 等领域得到了应用<sup>[1-3]</sup>. 目前多数文献讨论一般情况下的图像重投影. 对一般情况下的图像重投影, 往往要借助深度图像 (depth image)<sup>[1,4]</sup>, 处理起来比较复杂. 本文中并不讨论一般情况下的图像重投影, 而是重点考察当摄像机绕光心旋转时的图像的重投影. 在这种特殊情形下图像重投影往往具备了许多特殊性质. 根据这些性质探讨了采用图像重投影技术使 2 幅图像平面平行的方法, 并探讨了该方法在极线校正中的应用.

## 1 单应矩阵 $M$ 及其性质

如图 1 所示, 设摄像机绕其光心 (optical center)  $C$  (齐次坐标表示, 看成矢量) 做旋转运动, 摄像机的初始的摄像机坐标系与世界坐标系重合,  $U$  为场景中的一点, 它在初始的摄像机坐标系中的规范化齐次坐标为  $[X_0 \ Y_0 \ Z_0 \ 1]^T$ . 图中,  $u_0, u_1$  为点,  $u_0$  和  $u_1$  以在各自的像素图像坐标系中的规范化齐次坐标 (列向量) 表示;  $I_1, I_0$  为平面;  $\theta$  为一次转动角;  $f$  为焦距;  $C \ X_w \ Y_w \ Z_w$  是世界坐标系. 假设摄像机在初始位置和绕光心  $C$  旋转之后所拍摄的同一场景的 2 幅图像分别是  $I_0$  和  $I_1$ , 则  $U$  在 2 幅图像中的投影  $u_0 \in I_0$  和  $u_1 \in I_1$  有如下关系:

$$Z_0 u_0 = [K | 0] U, Z_1 u_1 = [K R | 0] U$$

其中:  $Z_1 = (R [X_0 \ Y_0 \ Z_0]^T)_3$ , 其中  $(\cdot)_3$  表示向量的第 3 个分量;  $K$  为摄像机的内部参数矩阵, 则此时  $P = [K | 0]$ ,  $P$  (projection matrix) 为摄像机的投影矩阵,  $R$  为旋转矩阵, 是  $3 \times 3$  的正交阵, 且  $\det R = 1$ . 因此

$$u_1 = \frac{(R [X_0 \ Y_0 \ Z_0]^T)_3}{Z_0} K R K^{-1} u_0 =$$

收稿日期: 2009-02-21

基金项目: 重庆大学研究生科技创新基金资助项目 (200701Y1A0080194); 中国博士后科学基金资助项目 (20080440700)

作者简介: 廖晓峰 (1964—), 男, 教授, 博士生导师, 工学博士, 主要研究方向为神经网络、图像处理. E-mail: xfliao@cqu.edu.cn

$$\frac{(\mathbf{R}[X_0 \ Y_0 \ Z_0]^T)_3}{Z_0} \mathbf{M} \mathbf{u}_0 \quad (1)$$

式中:  $\mathbf{M}$  被称为  $I_0$  到  $I_1$  的单应矩阵 (homography)<sup>[3]</sup>. 在摄像机标定时,  $\mathbf{M}$  是将图像平面  $I_0$  重投影到图像平面  $I_1$  的投影变换矩阵<sup>[2]</sup>. 因此, 图像重投影能够利用已生成的图像产生新的视线方向上的图像.

在摄像机未标定时, 式(1)可写成<sup>[2-3]</sup>

$$\hat{\mathbf{u}}_1 = \mathbf{K} \mathbf{R} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{u}_0 \quad (2)$$

式中:  $\hat{\cdot}$  表示 2 个矩阵或向量在只相差一个比例因子(scale factor)意义下相等. 其中  $\mathbf{u}_0$  和  $\mathbf{u}_1$  不一定是规范化齐次坐标.

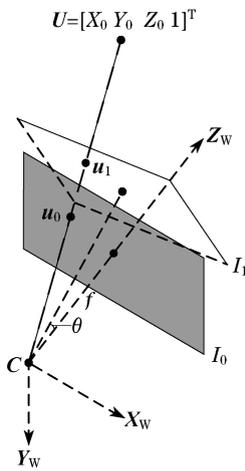


图1 摄像机绕光心旋转

Fig.1 Camera rotates around its optical center

单应矩阵  $\mathbf{M}$  具有很多特殊的性质. 本文中通过归纳和证明, 将  $\mathbf{M}$  的主要性质列于如下.

**性质 1**  $\mathbf{M}$  与  $\mathbf{R}$  具有相同的特征值 1,  $e^{-i\theta}$  和  $e^{i\theta}$ .

证明: 由于  $\mathbf{R}$  是旋转矩阵, 因此它有 3 个特征值: 1,  $e^{-i\theta}$  和  $e^{i\theta}$ . 其中  $\theta$  为一次转动角, 它对应的旋转轴 (称为欧拉轴) 过原点  $\mathbf{C}$  且一次转动向量 (方向向量) 与特征值 1 所对应的特征向量相同. 从  $\mathbf{M} = \mathbf{K} \mathbf{R} \mathbf{K}^{-1}$  可知  $\mathbf{M}$  与  $\mathbf{R}$  相似, 因此  $\mathbf{M}$  与  $\mathbf{R}$  具有相同的特征值.

**性质 2**  $\det \mathbf{M} = \det(\mathbf{K} \mathbf{R} \mathbf{K}^{-1}) = \det(\mathbf{K} \mathbf{K}^{-1}) = 1$ . 当点采用齐次坐标时,  $\mathbf{u}_0$  到  $\mathbf{u}_1$  的投影变换矩阵  $\mathbf{M}'$  与  $\mathbf{M}$  相差一个比例因子  $\frac{\lambda(\mathbf{R}[X_0 \ Y_0 \ Z_0]^T)_3}{Z_0}$ , 即

$$\mathbf{M}' = \frac{\lambda(\mathbf{R}[X_0 \ Y_0 \ Z_0]^T)_3}{Z_0} \mathbf{M} \quad (3)$$

由式(3)可得

$$\lambda(\mathbf{R}[X_0 \ Y_0 \ Z_0]^T)_3 = Z_0 \sqrt[3]{\det \mathbf{M}'}$$

当点采用规范化齐次坐标时,  $\lambda = 1$ . 本文中采用规范化齐次坐标.

**性质 3** 设  $\mathbf{n}_j (j = 1, 2, 3)$  为方阵  $\mathbf{N}$  的第  $j$  列向量, 则  $\mathbf{N}$  为  $\mathbf{M} \mathbf{N} = \mathbf{N} \mathbf{A}_\theta$  的非奇异解当且仅当  $\mathbf{d} = \mathbf{n} + i\mathbf{n}_2, \bar{\mathbf{d}} = \mathbf{n} - i\mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$  分别为  $\mathbf{M}$  的特征值  $e^{-i\theta}, e^{i\theta}, 1$  所对应的特征向量<sup>[5]</sup>. 其中

$$\mathbf{A}_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & -\cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

这一性质表明, 单应矩阵  $\mathbf{M}$  可唯一分解为  $\mathbf{N} \mathbf{A}_\theta \mathbf{N}^{-1}$ . 由于  $\mathbf{N}$  的元素可以是  $\theta$  的函数, 因此  $\mathbf{A}_\theta$  不一定是图像平面在世界坐标系中的旋转矩阵.  $\mathbf{A}_\theta$  和  $\mathbf{R}$  的关系由性质 5 描述.

设  $s$  为任意实数, 由此可构造出一次转动角为  $s\theta$  对应的单应矩阵

$$\mathbf{M}(s) = \mathbf{N} \mathbf{A}_{s\theta} \mathbf{N}^{-1}$$

当  $s \in [0, 1]$  时, 称  $s$  为插补参数或整合参数.

$\mathbf{M}(s)$  有如下性质: ①  $\mathbf{M}(0) = \mathbf{I}$ ,  $\mathbf{I}$  为单位矩阵; ②  $\mathbf{M}(s_1 + s_2) = \mathbf{M}(s_1) \mathbf{M}(s_2)$ ; ③  $\mathbf{M}(ks) = (\mathbf{M}(s))^k$ ,  $k$  是正整数; ④  $\mathbf{M}(1) = \mathbf{M}$ ; ⑤  $\mathbf{M}(-s) = \mathbf{N} \mathbf{A}_{-s\theta} \mathbf{N}^{-1} = \mathbf{N} (\mathbf{A}_{s\theta})^{-1} \mathbf{N}^{-1} = \mathbf{N} (\mathbf{N} \mathbf{A}_{s\theta})^{-1} = (\mathbf{N} \mathbf{A}_{s\theta})^{-1} = (\mathbf{M}(s))^{-1}$ ; ⑥  $\mathbf{M}(s_1 - s_2) = \mathbf{M}(s_1) (\mathbf{M}(s_2))^{-1}$ .

事实上, 代数系统  $\langle \mathbf{M}(s), * \rangle$  构成群, 其中  $\mathbf{M}(s)$  表示所有单应矩阵  $\mathbf{M}$  的集合,  $*$  表示矩阵的乘法.

证明: (1) 根据性质②, 对任意  $\mathbf{M}(s_1) \in \mathbf{M}(s), \mathbf{M}(s_2) \in \mathbf{M}(s)$ , 有  $\mathbf{M}(s_1) * \mathbf{M}(s_2) = \mathbf{M}(s_1 + s_2) \in \mathbf{M}(s)$ , 因此运算  $*$  是封闭的.

(2) 对任意  $\mathbf{M}(s_1) \in \mathbf{M}(s), \mathbf{M}(s_2) \in \mathbf{M}(s), \mathbf{M}(s_3) \in \mathbf{M}(s)$  有  $(\mathbf{M}(s_1) * \mathbf{M}(s_2)) * \mathbf{M}(s_3) = \mathbf{M}(s_1 + s_2 + s_3) = \mathbf{M}(s_1) * (\mathbf{M}(s_2) * \mathbf{M}(s_3))$ , 因此运算  $*$  是可结合的.

(3) 根据性质①和②, 对任意  $\mathbf{M}(s_1) \in \mathbf{M}(s)$ , 有  $\mathbf{M}(0) * \mathbf{M}(s_1) = \mathbf{M}(s_1) * \mathbf{M}(0) = \mathbf{M}(s_1)$ , 因此该代数系统有幺元  $\mathbf{M}(0)$ .

(4) 根据性质⑤, 对任意  $\mathbf{M}(s_1) \in \mathbf{M}(s)$ , 有  $\mathbf{M}(s_1) * \mathbf{M}(-s_1) = \mathbf{M}(-s_1) * \mathbf{M}(s_1) = \mathbf{M}(0)$ , 因此集合  $\mathbf{M}(s)$  中的每个元素都有逆元.

综上,  $\langle \mathbf{M}(s), * \rangle$  构成群.

**性质 4** 由性质 3 可知  $\mathbf{R} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{K} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{N} \cdot \mathbf{A}_\theta \mathbf{N}^{-1} \mathbf{K}$ , 从而特征值 1 所对应的特征向量 (旋转轴的方向向量) 为  $\mathbf{n} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{n}_3$ .

**性质5** 如果性质3所述的方阵  $\mathbf{N}$  与  $\mathbf{K}$  在相差一个比例因子意义下相等,则摄像机绕世界坐标系的  $Z_w$  轴旋转,即  $\mathbf{R} = \mathbf{A}_\theta$ ;反之不一定.

证明:设方阵  $\mathbf{N}$  的第3列为  $\mathbf{n}_3$ ,摄像机的内部参数矩阵为

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \alpha_x & 0 & o_x \\ 0 & \alpha_y & o_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

若  $\mathbf{N} = \lambda \mathbf{K} (\lambda \neq 0)$ ,根据性质4,欧拉轴的方向向量为

$$\mathbf{K}^{-1} \mathbf{n}_3 = \lambda \begin{bmatrix} \alpha_x & 0 & o_x \\ 0 & \alpha_y & o_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} o_x \\ o_y \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

从式(5)可以看出,欧拉轴为世界坐标系的  $Z_w$  轴,因此  $\mathbf{R} = \mathbf{A}_\theta$ .

反过来,若欧拉轴为世界坐标系的  $Z_w$  轴,则旋转矩阵  $\mathbf{R}$  在世界坐标系中满足

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_\theta$$

因此根据性质3有单应矩阵  $\mathbf{M} = \mathbf{K} \mathbf{R} \mathbf{K}^{-1} = \mathbf{K} \mathbf{A}_\theta \cdot \mathbf{K}^{-1} = \mathbf{N} \mathbf{A}_\theta \mathbf{N}^{-1}$ .由  $\mathbf{K} \mathbf{A}_\theta \mathbf{K}^{-1} = \mathbf{N} \mathbf{A}_\theta \mathbf{N}^{-1}$  可得  $\mathbf{A}_\theta \cdot (\mathbf{K}^{-1} \mathbf{N}) = (\mathbf{K}^{-1} \mathbf{N}) \mathbf{A}_\theta$ .因此  $\mathbf{A}_\theta$  和  $\mathbf{K}^{-1} \mathbf{N}$  是可交换矩阵,从而根据矩阵可交换的充要条件有

$$\mathbf{K}^{-1} \mathbf{N} = a_0 \mathbf{I} + a_1 \mathbf{A}_\theta + a_2 \mathbf{A}_\theta^2 \quad (6)$$

式中:  $a_0, a_1$  和  $a_2$  为实系数.从式(6)可以看出,不一定有  $\mathbf{N} = \lambda \mathbf{K} (\lambda \neq 0)$ .

**性质6** 设  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$  分别是旋转后新的摄像机坐标系的3个基本单位向量  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  在世界坐标系中的坐标(列向量),则旋转矩阵为

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1^T \\ \mathbf{r}_2^T \\ \mathbf{r}_3^T \end{bmatrix}$$

从而单应矩阵可写成

$$\mathbf{M} = \mathbf{K} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1^T \\ \mathbf{r}_2^T \\ \mathbf{r}_3^T \end{bmatrix} \mathbf{K}^{-1}$$

## 2 图像平面的平行

如图2所示,在获取同一场景的图像时由于摄像机视点的不同,一般情况下得到的2幅(或多幅)图像的图像平面(image plane)往往不平行.这就给

视图变形、视图合成等应用造成了不便,所以有必要对图像进行预处理,使它们的图像平面平行.下文中提出的极线校正方法,也必须先使2幅图像的图像平面互相平行.

假设摄像机在不同视点所拍摄的同一场景的2幅图像分别是  $I_0$  和  $I_1$ ,光心  $C_0(0,0,0)$  和  $C_1(X_1,0,0) (X_1 > 0)$  都在世界坐标系的  $X$  轴上(注意世界坐标系不与  $I_0$  所对应的摄像机坐标系  $X_1 Y_1 Z_1$  重合).设  $I_0$  的投影矩阵为  $\mathbf{P}_0 = [\mathbf{K} \mathbf{R}_0 | \mathbf{0}]$ ,  $I_1$  的投影矩阵为  $\mathbf{P}_1 = \mathbf{K} [\mathbf{R}_1 | -\mathbf{R}_1 \mathbf{C}_1]$ .一般情况下,可以采用如下几种方法使2幅图像的图像平面平行.

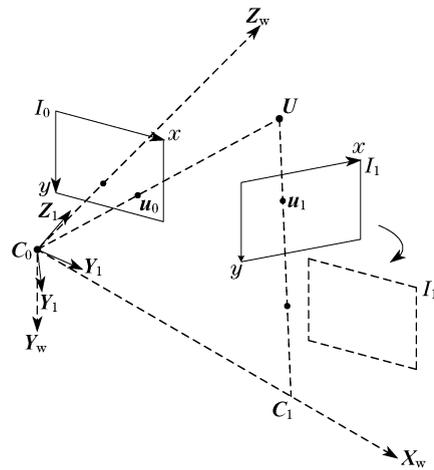


图2 对  $I_1$  重投影使2个不同视点的图像平面  $I_0$  和  $I_1$  平行  
Fig.2 Two parallel image planes of  $I_0$  and  $I_1$  obtained from 2 different viewpoints by reprojecting  $I_1$

### 2.1 1幅图像的重投影

显然,如果将摄像机从  $C_0$  平移到  $C_1$  进行拍摄,得到图像  $I'_1$ ,则  $I'_1$  的图像平面平行于  $I_0$  的图像平面<sup>[5]</sup>.而  $I_1$  可由  $I'_1$  经旋转变换  $\mathbf{R}_0 \mathbf{R}_1^{-1}$  得到.因此,只要将  $I_1$  重投影到  $I'_1$ ,就能使2幅图像的图像平面平行.  $I_1$  到  $I'_1$  的单应矩阵为

$$\mathbf{M} = \mathbf{K} \mathbf{R}_0 \mathbf{R}_1^{-1} \mathbf{K}^{-1}$$

对  $I_0$  作类似的重投影也能使2幅图像的图像平面平行.

上述使图像平面平行的方法的不足之处在于,由于只旋转某一幅图像  $I_i$ ,在有些情况下会使得  $I_i$  的扭曲较大.一种较好的方法是,选择1个平行于直线  $C_0 C_1$  的恰当的平面  $E$ ,对2幅图像都进行重投影,让  $I_0$  和  $I_1$  都旋转到与这个平面平行的位置,并且各自的转动都尽可能小.当旋转完成后,不但  $I_0$  和  $I_1$  变得平行,而且它们各自的图像平面内的极线也平行(因为它们的极点被投影到了无穷远),方便

极线校正等后续处理.

## 2.2 2幅图像的重投影

图3中 $E$ 为平行直线 $C_0C_1$ 的平面, $d_0, d'_0$ 为旋转轴, $I'_0, I'_1$ 为平面, $\theta_0$ 为 $I_0$ 与 $E$ 的夹角, $|\theta_0| \leq 90^\circ$ .假设 $I_0$ 和 $I_1$ 绕各自的光心旋转之后得到 $I'_0$ 和 $I'_1$ , $I'_0$ 和 $I'_1$ 与 $E$ 平行,从而也平行于 $C_0C_1$ . $I'_0$ 和 $I'_1$ 的投影矩阵除了光心不同,其他均相同.因此,可设 $I'_0$ 和 $I'_1$ 的投影矩阵分别为 $P'_0 = [KR | 0]$ , $P'_1 = [KR | -RC_1]$ .根据性质6, $R$ 可由以下步骤求解:  
① $r_1 = (C_1 - C_0) / \|C_1 - C_0\| = [1 \ 0 \ 0]^T$ ; ② $r_2 = k \times r_1$ ; ③ $r_3 = r_1 \times r_2$ .其中, $k$ 为任意的单位向量.

文献[6-7]取 $k$ 为与 $Z_1$ 同方向的单位向量.当 $k = [0 \ 0 \ 1]^T$ 时, $R = I$ ,这说明 $I_0$ 对应的摄像机坐标系被旋转到了与世界坐标系重合的位置.求得 $R$ 之后可进一步求出 $I_0$ 到 $I'_0$ 的单应矩阵为 $M_0 = KR \cdot R_0^{-1}K^{-1}$ , $I_1$ 到 $I'_1$ 的单应矩阵为 $M_1 = KR R_1^{-1}K^{-1}$ .上述方法一般只适用于摄像机标定的情形,只要将 $P_0$ 和 $P_1$ 变换成 $P'_0$ 和 $P'_1$ ,则2幅图像的图像平面就会共面.由于 $P'_0$ 和 $P'_1$ 的 $K$ 和 $R$ 都相同,因此得到的 $I'_0$ 和 $I'_1$ 是已经完成极线校正的图像.这种方法缺点是仍然不易控制 $I_0$ 和 $I_1$ 的旋转以使它们的转动都尽可能小.

## 2.3 图像平面旋转的控制

为了控制图像平面转动的幅度以克服上述2种方法的缺点,有必要引入一次转动角作为旋转矩阵的参数.

如图3所示,设 $E$ 与图像平面 $I_i$ 相交于直线 $d_i$  ( $i=0,1$ ).如果将 $I_i$ 绕 $d_i$ 旋转至 $E$ 内,或者绕平

$$R_{d_i, \theta_0} = \begin{bmatrix} \cos \theta_0 + (1 - \cos \theta_0) x^2 & (1 - \cos \theta_0) xy - z \sin \theta_0 & (1 - \cos \theta_0) xz + y \sin \theta_0 \\ (1 - \cos \theta_0) xy + z \sin \theta_0 & \cos \theta_0 + (1 - \cos \theta_0) y^2 & (1 - \cos \theta_0) yz - x \sin \theta_0 \\ (1 - \cos \theta_0) xz - y \sin \theta_0 & (1 - \cos \theta_0) yz + x \sin \theta_0 & \cos \theta_0 + (1 - \cos \theta_0) z^2 \end{bmatrix} \quad (7)$$

因此, $I_0$ 到 $I'_0$ 的单应矩阵为

$$M_0 = KR_{d_0, \theta_0} K^{-1}$$

设极点 $e_0 = [e_{x,0} \ e_{y,0} \ 1]^T \in I_0$ ,则 $e_0$ 为 $C_1$ 在 $I_0$ 中的投影.当 $I_0$ 转动到 $I'_0$ 时,设 $e_0$ 被映射成 $I'_0$ 中的 $e'_0$ .由于 $I'_0$ 平行于 $C_0C_1$ ,因此 $e'_0$ 被投影到了无穷远,它的齐次坐标应表示 $I'_0$ 中的无穷远点<sup>[8]</sup>,即齐次

$$R^{e_0, e'_0} = \begin{bmatrix} \cos \theta_0 + (1 - \cos \theta_0) x^2 & (1 - \cos \theta_0) xy & y \sin \theta_0 \\ (1 - \cos \theta_0) xy & \cos \theta_0 + (1 - \cos \theta_0) y^2 & -x \sin \theta_0 \\ -y \sin \theta_0 & x \sin \theta_0 & \cos \theta_0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

其中 $x^2 + y^2 = 1$ .

设摄像机的内部参数矩阵如式(4)所示,将式(4)、式(9)代入式(8),得

行于 $d_i$ 的直线旋转至与 $E$ 平行,则2个图像平面会变成平行.

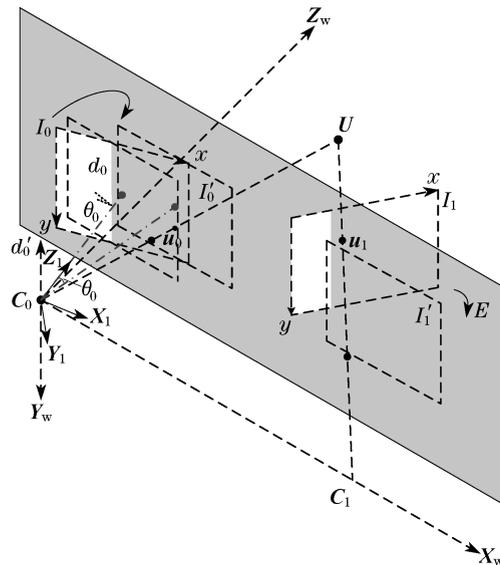


图3 对 $I_0$ 和 $I_1$ 重投影使2个不同视点的图像平面 $I_0$ 和 $I_1$ 平行

Fig. 3 Two parallel image planes of  $I_0$  and  $I_1$  obtained from 2 different viewpoints by reprojecting both  $I_0$  and  $I_1$

为不失一般性,设旋转轴 $d'_0 \parallel d_0$ , $d'_0$ 过 $C_0$ 且在世界坐标系中的单位方向向量为 $[x \ y \ z]^T$ , $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ,则 $d'_0$ 为欧拉轴.若将 $I_0$ 按特定方向绕 $d'_0$ 旋转 $|\theta_0|$ ,则 $I_0$ 会旋转至 $I'_0$ , $I'_0$ 与 $E$ 平行.由于在绕 $d'_0$ 旋转的过程中摄像机的内部参数矩阵 $K$ 不变,因此 $Z_1$  ( $Z_1 \perp I_0, Z_1 \perp d'_0$ )绕 $d'_0$ 扫过的角度也等于 $\theta_0$ .故 $\theta_0$ 为一次转动角.在世界坐标系中,对应的旋转矩阵如式(7)所示:

坐标的第3个坐标分量为零.所以有

$$e'_0 = [e'_{x,0} \ e'_{y,0} \ 0]^T = M_0 e_0 \quad (8)$$

其中算得的 $e'_0$ 的齐次坐标仅表示方向.

为简化问题的复杂性且不失一般性,假设所选的 $E$ 平面满足: $E \parallel X_w C_0 Y_w$ .因为 $d'_0 \parallel d_0$ ,所以 $d'_0 \subset X_w C_0 Y_w$ ,从而 $z = 0$ .因此式(7)可简化为

$$\theta_0 = \arctan \frac{1}{\frac{e_{x,0} - o_x}{\alpha_x} y - \frac{e_{y,0} - o_y}{\alpha_y} x} \quad (10)$$

显然,取

$$\begin{aligned} x &= \frac{e_{y,0} - o_y}{\alpha_y} \sqrt{\left(\frac{e_{x,0} - o_x}{\alpha_x}\right)^2 + \left(\frac{e_{y,0} - o_y}{\alpha_y}\right)^2} \\ y &= -\frac{e_{x,0} - o_x}{\alpha_x} \sqrt{\left(\frac{e_{x,0} - o_x}{\alpha_x}\right)^2 + \left(\frac{e_{y,0} - o_y}{\alpha_y}\right)^2} \end{aligned} \quad (11)$$

能使  $\theta_0$  最小,从而  $I'_0$  的扭曲也最小.

在摄像机已标定的情况下,利用式(11)、式(10)和式(9)可计算出  $M_0$ ,将  $M_0$  代入式(1)便可生成图像  $I'_0$ . 值得注意的是,由式(1)可知,对  $I_0$  实施  $M_0$  变换之后得到的像素的坐标必须转化为规范化齐次坐标才能生成正确的图像  $I'_0$ ,否则  $I_0$  将被映射成不同于  $I'_0$  的图像,因为映射规则发生了变化.

此外,通过基本矩阵和  $\theta_0$  还可以计算出  $I_1$  需要旋转的角度<sup>[8]</sup>,从而最终实现将  $I_0$  和  $I_1$  都旋转到与  $E$  平行.

对于摄像机未标定的情形,可以通过摄像机自标定技术求得  $K$  或  $M_0$ <sup>[2,5]</sup>,从而求得  $\theta_0$ . 在误差不大的情况下,为简化计算,可令  $o_x = o_y = 0$ <sup>[5]</sup>, $\alpha_x = \alpha_y = 1$ ,从而  $K = I$ . 从上述推导过程可知,文献[9]所描述的情形实质上是这种特例.

根据性质3和性质4, $M_0$ 也可以分解成  $M_0 = N A_\theta N^{-1}$ ,但此时不一定有  $A_\theta = R, d'_0$  与世界坐标系的  $Z_w$  轴不一定重合,因而难以确定方阵  $N$ . 因此采用  $M_0 = N A_\theta N^{-1}$  这种分解难以控制图像平面的旋转.

### 3 图像重投影的应用

如前所述,图像重投影在多视点图像的实时渲染等很多领域得到应用. 本文将图像重投影应用于极线校正(epipolar line rectification),给出了一种极线校正方法. 极线校正指的是对2幅图像各进行1次投影变换,使得2幅图像对应的极线在同一条扫描线上,从而满足扫描线特性<sup>[8-10]</sup>. 典型的极线校正方法包括完全基于基本矩阵的极线校正方法<sup>[11-12]</sup>和无需基本矩阵的极线校正方法<sup>[10]</sup>,这2种方法各有优劣. 本文将2种方法结合起来,给出了一种新的方法:首先利用改进的8点算法算出基本矩阵;然后根据基本矩阵采用2.3节描述的图像重投影技术将2幅图像重投影到平行的平面并使极线水平对齐,计算出相应的投影变换矩阵;接着以算出的投影变换矩阵为初值采用 Francesco 提出的无需基本矩阵的方法对其进行最优化<sup>[10]</sup>,从而得到最终的投影变换矩阵;最后以优化的

投影变换矩阵对图像进行变换,便可得到校正的图像. 限于篇幅,具体细节另撰文阐述.

本文中采用图4所示原始的图像对来验证上述提出的极线校正方法,图中横细线表示极线,采用的开发工具为 MATLAB 2009b. 在应用2.3节所述的图像重投影技术时,由于极线校正只要求寻找到的变换矩阵能够满足扫描线特性即可<sup>[10]</sup>,因此可以假定  $K$  为单位矩阵. 图5是极线校正后得到的图像. 从图5可以看出,2幅图像的极线都平行且对应的极线在同一条扫描线上,图像的扭曲也比较小. 这得益于重投影过程中采用了式(10)计算一次转动角,从而使图像的转动达到最小. 对其他图像对重复上述实验,可以得出同样的结论.



a 左图



b 右图

图4 Drive 的原始图像对  
Fig.4 Originals for Drive



a 左图



b 右图

图5 极线校正后的图像  
Fig.5 Rectified images

(下转第 603 页)