第38卷第5期
2010年5月

同济大学学报(自然科学版)
JOURNAL OF TONGJI UNIVERSITY(NATURAL SCIENCE)

Vol.38 No.5
May 2010

文章编号：0253-374X(2010)05-0766-02

DOI:10.3969/j.issn.0253-374x.2010.05.025

$r(K_{m,n})$的一个构造型下界

董　琳

(同济大学 数学系,上海 200092)

摘要：图 G 的 Ramsey 数 $r(G)$是指最小的自然数 N,满足当 $n\geqslant N$,对完全图 K_n 的边进行红蓝二着色时总包含单色的图 G. 对于完全二部图 $K_{m,n}$,给出了当 n 充分大时,$r(K_{m,n})\geqslant 2^m(n-n^{0.525})$的一个代数构造的证明.

关键词：Ramsey 数；Paley 图；代数构造

中图分类号：O 157.5　　**文献标识码**：A

A Note on a Lower Bound for $r(K_{m,n})$

DONG Lin

(Department of Mathesmatics, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: Let G be a graph. The Ramsey number $r(G)$ is the minimum integer N such that any two edge-coloring of K_N contains a monochromatic G. With an algebraic construction, $r(K_{m,n})\geqslant 2^m(n-n^{0.525})$ is proved for large n.

Key words: Ramsey number; Paley graph; algebraic construction

图 G 的 Ramsey 数 $r(G)$定义为最小的自然数 N,使得当 $n\geqslant N$,对完全图 K_n 的边进行红蓝二着色时总包含单色的图 G. 对于完全二部图 $K_{m,n}$,如果 m 固定,当 $n\to\infty$时,文献[1-2]已给出了 $r(K_{m,n})$的下界渐近地等于 $2^m n$. 而相应的下界 $r(K_{m,n})\geqslant(1-o(1))2^m n$ 是由不同的概率方法得到的. Bollobás 和 Thomason 引入 Gauss 和这一工具[3],本文也利用该工具来改进此下界.

定理 1　对于固定的自然数 $m\geqslant 1$, 则对于充分大的 n,有

$$r(K_{m,n})\geqslant 2^m(n-n^{0.525})$$

设 $p\equiv 1$,(mod 4)为一素数,F_p 为 p 元的有限域. 在 F_p 上定义 Paley 图 G_p 如下,不同的顶点 u 和 v 间有边相连当且仅当$\chi(u-v)=1$,其中函数

$$\chi(x)=\begin{cases}1 & 若\ x\neq 0 \mod p\ 是平方剩余\\ 0 & x=0\\ -1 & 其他\end{cases}$$

Paley 图 G_p 是自补的,而函数 $\chi(x)$满足 $\chi(xy)=\chi(x)\chi(y)$是可乘的实特征,且 $\chi(x)$经常被称作平方剩余特征. Paley 图的相关内容可参考文献[4],而作为关于特征和的一个复杂的结果是如下的 Weil 定理:设 $f(x)$是 $F(p)$上的多项式,且不是另一个多项式的平方,如果 $f(x)$具有恰好 s 个零点,则

$$\Big|\sum\sum_{x\in F_p}\chi(f(x))\Big|\leqslant(s-1)\sqrt{p}\qquad(1)$$

证明　令集合 U 是 Paley 图 G_p 的顶点子集且 $|U|=m$. 设 $J(U)=\bigcap_{u\in U}N(u)$,如果对于任意 U 都有$|J(U)|<n$,则 $r(K_{m,n})>p$. 对于任一固定的 U,定义函数 $f(x)$,$(x\in F_p\backslash U)$为

$$f(x)=\prod_{u\in U}(1+\chi(x-u))$$

因为 $f(x)\neq 0$ 当且仅当 $x\in J(U)$,则 $f(x)=2^m$,且

$$\sum_{x\notin U}f(x)=\sum_{x\notin U}\prod_{u\in U}(1+\chi(x-u))=2^m|J(U)|$$

对于 $Z\subseteq U$, 设

$$P_Z(x)=\prod_{z\in Z}(x-z)$$

则 $P_\varnothing(x)=1$,且

$$\prod_{z\in Z}\chi(x-z)=\chi(P_Z(x))$$

因为 χ 是可乘的,所以

$$\Big|p-\sum_{x\in F_p}f(x)\Big|=\Big|p-\sum_{x\in F_p}\big(\sum_{Z\subseteq U}\prod_{z\in Z}\chi(x-z)\big)\Big|=$$

$$\Big|p-\sum_{Z\subseteq U}\big(\sum_{x\in F_p}\chi(P_Z(x))\big)\Big|=$$

$$\Big|\sum_{Z\subseteq U,Z\neq\varnothing}\big(\sum_{x\in F_p}\chi(P_Z(x))\big)\Big|$$

(下转第778页)

收稿日期：2009-03-02

作者简介：董　琳(1979—),男,博士生,主要研究方向为组合数学与图论. E-mail:donglin@yahoo.cn