

非饱和土临界荷载和太沙基极限承载力解析解

张常光^{1,2}, 曾开华³, 赵均海⁴

(1. 同济大学 岩土及地下工程教育部重点实验室, 上海 200092; 2. 同济大学 地下建筑与工程系, 上海 200092;
3. 南昌工程学院 岩土工程研究所, 江西 南昌 330099; 4. 长安大学 建筑工程学院, 陕西 西安 710061)

摘要: 基于非饱和土双应力状态变量抗剪强度统一解, 综合考虑中间主应力、基质吸力和超固结比等影响, 推导了非饱和土条形地基临界荷载和太沙基极限承载力解析解, 并得出统一强度理论参数、基质吸力和超固结比对解析解的影响规律. 研究表明: 该解析解具有很好的可比性, 临界荷载公式适用于任意侧压力系数; 临界荷载和太沙基极限承载力均随着统一强度理论参数和基质吸力的增大而显著增加; 临界荷载与超固结比近似成线形递增关系, 不同基质吸力所对应的临界荷载间相互平行.

关键词: 非饱和土; 统一强度理论; 临界荷载; 极限承载力
中图分类号: TU 431; TU 456 **文献标识码:** A

Analytical Solutions of Critical Load and Terzaghi's Ultimate Bearing Capacity for Unsaturated Soil

ZHANG Changguang^{1,2}, ZENG Kaihua³, ZHAO Junhai⁴

(1. Key Laboratory of Geotechnical and Underground Engineering of the Ministry of Education, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. Department of Geotechnical Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China; 3. Institute of Geotechnical Engineering, Nanchang Institute of Technology, Nanchang 330099, China; 4. School of Civil Engineering, Chang'an University, Xi'an 710061, China)

Abstract: Based on the unified solution of shear strength for unsaturated soil in terms of two state stress variables, analytical solutions of the critical load and Terzaghi's ultimate bearing capacity for unsaturated soil strip foundation are obtained by taking into consideration the influences of intermediate principal stress, matric suction and over-consolidation ratio. The influence laws of the unified strength theory parameter, matric suction and over-consolidation ratio on the analytical solutions are discussed. The results show that the analytical solutions obtained in this paper have a good comparability to many existing results; the formula of critical

load can be suitable for any lateral pressure coefficient; the critical load and Terzaghi's ultimate bearing capacity increase significantly with the increasing of the unified strength theory parameter and matric suction; there is a linear increase relationship between the critical load and over-consolidation ratio, and the critical loads corresponding to different matric suction are parallel to each other.

Key words: unsaturated soil; unified strength theory; critical load; ultimate bearing capacity

确定地基承载力是基础设计中的重要环节之一, 充分认识地基土的工程特性, 采用合适的强度准则, 挖掘地基土的强度潜能, 才能确保工程的安全和经济. 以往对条形地基临界荷载和极限承载力的研究, 多是对饱和土^[1-6], 采用 Mohr-Coulomb (M-C) 强度准则^[1-2], 且在推导临界荷载时假定土的侧压力系数 $k_0 = 1$ ^[3-4]. 首先, 工程实践中作为持力层的多是非饱和土, 假定为饱和土则忽略了基质吸力对抗剪强度的贡献^[7], 未反映地基土的实际状态; 其次, M-C 强度准则因未考虑中间主应力 σ_2 的影响而过于保守, 造成材料大量浪费; 第三, $k_0 = 1$ 明显与土的实际应力状态不符, 且未考虑土的应力历史. 故探究更符合工程实际情况的地基临界荷载和极限承载力, 对工程可靠性及经济合理性都具有重要的理论意义和工程应用价值. 目前非饱和土抗剪强度应用较广的是基于 M-C 强度准则的双应力状态变量抗剪强度, 统一强度理论^[8] 合理考虑了中间主应力 σ_2 的影响, 本文将统一强度理论引入非饱和土抗剪强度, 建立非饱和土双应力状态变量抗剪强度统一解, 在此基础上推导了非饱和土条形地基临界荷载和太沙基极限承载力解析解, 并分析统一强度理论参数、基质吸力和超固结比对解析解的影响特性.

收稿日期: 2009-07-19

基金项目: 陕西省自然科学基金资助项目 (SJ08E204)

作者简介: 张常光 (1982-), 男, 博士生, 主要研究方向为隧道及地下工程和结构强度理论. E-mail: zcg1016@163.com

1 非饱和土双应力状态变量抗剪强度统一解

设 $\sigma_2 = m(\sigma_1 + \sigma_3)/2$, m 为中间主应力系数, $0 \leq m < 2$, 其大小取决于应力状态. 取压应力为正, 基于统一强度理论的抗剪强度 τ_f 的表达式为^[8]

$$\tau_f = c_t + \sigma \tan \varphi_t \quad (1)$$

式中: c_t , φ_t 为统一粘聚力和统一内摩擦角; σ 为总法向应力.

其中:

$$\sin \varphi_t = \frac{b(1-m) + (2+b+bm)\sin \varphi}{2+b(1+\sin \varphi)},$$

$$c_t = \frac{2(1+b)c \cos \varphi}{2+b(1+\sin \varphi)} \frac{1}{\cos \varphi_t},$$

$$b = \frac{(\sigma_c + \sigma_t)\tau_s - \sigma_c \sigma_t}{\sigma_c(\sigma_t - \tau_s)}$$

式中: c , φ 为粘聚力和内摩擦角; σ_t , σ_c 和 τ_s 分别为抗拉强度、抗压强度和抗剪强度; b 反映中间主剪应力及其面上的正应力对材料屈服或破坏的影响程度, 称为统一强度理论参数, $0 \leq b \leq 1$.

式(1)与基于 M-C 强度准则的抗剪强度公式形式一样, 但其通过中间主应力系数 m 和统一强度理论参数 b , 可以合理地反映中间主应力 σ_2 的影响. Fredlund 根据 M-C 强度准则建立的非饱和土双应力状态变量抗剪强度表达式为^[7]

$$\tau_f = c' + (\sigma - u_a) \tan \varphi' + (u_a - u_w) \tan \varphi^b \quad (2)$$

式中: c' , φ' 为有效粘聚力和有效内摩擦角; u_a 为孔隙气压力; u_w 为孔隙水压力; $(u_a - u_w)$ 为基质吸力; $(\sigma - u_a)$ 为净法向应力; φ^b 为与基质吸力有关的角, 用来反映 $(u_a - u_w)$ 对抗剪强度的贡献, 可通过不同 $(\sigma - u_a)$ 下, τ_f 与 $(u_a - u_w)$ 之间直线关系的斜率确定.

根据式(1), 用 c'_t , φ'_t 和 φ_t^b (因基质吸力各向等值, 故 $m=1$) 分别替换式(2)中的 c' , φ' 和 φ^b , 得非饱和土双应力状态变量抗剪强度统一解为

$$\tau_f = c'_t + (\sigma - u_a) \tan \varphi'_t + (u_a - u_w) \tan \varphi_t^b \quad (3)$$

式中: c'_t , φ'_t 为统一有效粘聚力和统一有效内摩擦角; φ_t^b 为与基质吸力有关的统一角.

其中:

$$\sin \varphi'_t = \frac{b(1-m) + (2+b+bm)\sin \varphi'}{2+b(1+\sin \varphi')},$$

$$c'_t = \frac{2(1+b)c' \cos \varphi'}{2+b(1+\sin \varphi')} \frac{1}{\cos \varphi'_t},$$

$$\sin \varphi_t^b = \frac{2(1+b)\sin \varphi^b}{2+b(1+\sin \varphi^b)}$$

非饱和土双应力状态变量抗剪强度统一解的详细推导过程及试验验证见文献[9], 为便于工程应用及与饱和土抗剪强度公式的衔接, 设统一总粘聚力 $c_{tt} = c'_t + (u_a - u_w) \cdot \tan \varphi_t^b$, 则式(3)可写成饱和土的抗剪强度形式为

$$\tau_f = c_{tt} + (\sigma - u_a) \tan \varphi'_t \quad (4)$$

2 临界荷载解析解

图1为平面应变状态($m=1$)下宽度为 B 、埋深为 D 的非饱和土条形地基, 设均质土中总应力的变化不影响孔隙压力, 且外界环境保持不变. 图中 P 为上部基础传来的总应力, Z 为 M 点距基底的距离, $k_0 = (1 - \sin \varphi')\sqrt{\lambda}$, λ 为非饱和土超固结比, $\lambda \geq 1$; α , β 和 β_0 均为图中所示的夹角. 由附加应力 $(P - \gamma D)$ 和自重应力 γD 引起的 M 点有效应力为^[1]

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \frac{p - \gamma D}{\pi} (\beta_0 + \sin \beta_0) + \frac{\gamma(D+Z)(1+k_0)}{2} + \\ &\quad \frac{\gamma(D+Z)(1-k_0)}{2} \cos 2\beta \\ \sigma_x &= \frac{p - \gamma D}{\pi} (\beta_0 - \sin \beta_0) + \frac{\gamma(D+Z)(1+k_0)}{2} - \\ &\quad \frac{\gamma(D+Z)(1-k_0)}{2} \cos 2\beta \\ \tau_{xz} &= \frac{\gamma(D+Z)(1-k_0)}{2} \sin 2\beta \end{aligned} \quad (5)$$

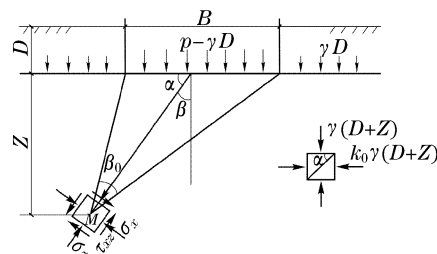


图1 条形地基中 M 点的有效应力图

Fig.1 Effective stresses of the point M in a strip foundation

当式(5)满足式(4)时, 分别对 β_0 和 β 求导, 得

塑性区最大开展深度 Z_{\max} 为

$$Z_{\max} = \frac{2 \frac{p - \gamma D}{\pi} \left[\left(\frac{\pi}{2} - \varphi'_t \right) \tan \varphi'_t - 1 \right] + 2 [c'_t + (u_a - u_w) \tan \varphi'_t]}{1.07 \gamma (1 - k_0) / \cos \varphi'_t - \gamma (1 + k_0) \tan \varphi'_t} - D \quad (6)$$

令 $Z_{\max} = D/4$, 整理得非饱和土条形地基临界荷载解析解 $P_{1/4}$ 为

$$p_{1/4} = \gamma B M_B + \gamma_D D M_D + [c'_t + (u_a - u_w) \tan \varphi'_t] M_C \quad (7)$$

式中: M_B, M_D, M_C 为承载力系数, 均为 φ' , b 和 (或) k_0 的函数, 与 $(u_a - u_w)$ 和 φ^b 无关; γ 为基底以下土的重度, γ_D 为基底以上埋深范围内土的平均重度.

其中:

$$M_B = \frac{\pi [1.07(1 - k_0) / \cos \varphi'_t - (1 + k_0) \tan \varphi'_t]}{8 [(\pi/2 - \varphi'_t) \tan \varphi'_t - 1]},$$

$$M_D = 4M_B + 1, M_C = \frac{\pi}{1 - (\pi/2 - \varphi'_t) \tan \varphi'_t}$$

3 太沙基极限承载力解析解

条形地基太沙基极限承载力的基本假定为^[5-6]

$$r = r_0 \exp \left[\frac{\theta [b(1 - m) + (2 + b + bm) \sin \varphi']}{\sqrt{[2 + b(1 + \sin \varphi')]^2 - [b(1 - m) + (2 + b + bm) \sin \varphi']^2}} \right] \quad (8)$$

式中: r_0 为起始矢径; θ 为任一矢径与 r_0 之间的夹角.

(3) 不考虑基底以上两侧土体的抗剪强度, 而用均布荷载 $q = \gamma D$ 表示.

基于以上假定, 建立弹性楔体 I 的静力平衡, 可得整体剪切破坏时太沙基极限承载力 P_u 为

$$p_u = \frac{1}{2} \gamma B N_\gamma + q N_q + [c'_t + (u_a - u_w) \tan \varphi'_t] N_c \quad (9)$$

式中: N_γ, N_q, N_c 为太沙基承载力系数, 均为 φ' 和 b 的函数, 与 $(u_a - u_w)$ 和 φ^b 无关, 当基底完全粗糙时, $\psi = \varphi'_t$; 当基底完全光滑时, $\psi = 45^\circ + \varphi'_t/2$. 结合太沙基经验公式^[5-6], 取 $N_\gamma = 1.8(N_q - 1) \tan \varphi'_t$.

其中:

$$N_q = \frac{\cos(\psi - \varphi'_t)}{\cos \psi} e^{\left[\frac{3\pi}{2} + \varphi'_t - 2\psi \right] \tan \varphi'_t} \cdot \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi'_t}{2} \right),$$

$$N_c = \tan \psi + \frac{\cos(\psi - \varphi'_t)}{\cos \psi \sin \varphi'_t} \cdot$$

$$\left[(1 + \sin \varphi'_t) e^{\left[\frac{3\pi}{2} + \varphi'_t - 2\psi \right] \tan \varphi'_t} - 1 \right]$$

(1) 基础底面粗糙, 当地基发生整体剪切破坏时, 基底楔体 I 始终处于弹性状态, 边界 ab 为滑动区的内边界, 与水平面的夹角为 ψ , 如图 2 所示, 图中 P_u 为地基极限承载力, q 为基底两侧附加荷载.

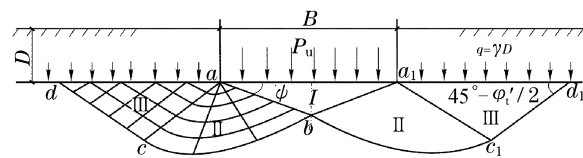


图 2 粗糙基底条形地基破坏模式图

Fig. 2 Destruction pattern of a rough strip foundation

(2) 滑动区范围内非饱和土体均处于塑性平衡状态, 由径向剪切区 II 和朗肯被动区 III 组成. 边界 bc 可由对数螺旋线表示为

4 解的可比性与参数影响分析

4.1 解的可比性分析

本文非饱和土条形地基临界荷载和太沙基极限承载力解析解建立在非饱和土双应力状态变量抗剪强度统一解的基础上, 具有广泛的理论意义. b 反映中间主应力 σ_2 效应和强度准则的选择, $b = 0$ 时式 (3) 退化为 Fredlund 式 (2), 未考虑 σ_2 的影响; $b = 1$ 为基于双剪应力强度准则的抗剪强度; $(u_a - u_w) > 0$, 对应非饱和土, $(u_a - u_w) = 0$ 为饱和土; $\lambda \geq 1$, 反映不同侧压力系数 k_0 的影响.

因此对于任何 k_0 , 基于 M-C 强度准则^[1-2] 或统一强度理论^[3-4] 的饱和土, 及非饱和土基于 M-C 强度准则或双剪应力强度理论的临界荷载; 基于 M-C 强度准则或统一强度理论^[5-6] 的饱和土, 及非饱和土基于 M-C 强度准则^[7] 或双剪应力强度准则的太沙基极限承载力, 均为本文解的特例. 因此本文解析解具有很好的可比性, 同时也从必要性上对本文解析

解进行了验证.

4.2 参数影响分析

某均质非饱和土条形基础宽 4 m,埋深 3 m,重度为 $19.5 \text{ kN} \cdot \text{m}^{-3}$,抗剪强度参数为 $c' = 20 \text{ kPa}$, $\varphi' = 22^\circ$ 和 $\varphi^b = 14^\circ$. 因埋深较浅,设 $(u_a - u_w)$ 处于低基质吸力范围内,且不随深度发生变化.

图 3 给出了正常固结($\lambda = 1$)非饱和土临界荷载 $P_{1/4}$ 与 $b, (u_a - u_w)$ 的变化关系. 图 4 给出了 $b = 0$ 时,超固结($\lambda > 1$)非饱和土 $P_{1/4}$ 与 $(u_a - u_w)$ 的变化关系.

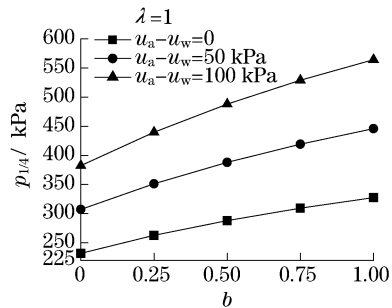


图 3 $P_{1/4}$ 与 b 及 $(u_a - u_w)$ 的关系

Fig. 3 Relationship among $P_{1/4}, b$ and $(u_a - u_w)$

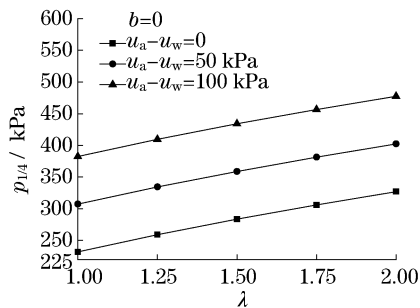


图 4 $P_{1/4}$ 与 λ 及 $(u_a - u_w)$ 的关系

Fig. 4 Relationship among $P_{1/4}, \lambda$ and $(u_a - u_w)$

由图 3 可以看出,随着 b 和 $(u_a - u_w)$ 的增大,正常固结非饱和土 $P_{1/4}$ 不断增大. 当 $b = 0.5$ 时,基质吸力从 0(饱和土)增加到 100 kPa,对应的 $P_{1/4}$ 从 288.2 kPa 增加到 487.9 kPa,可见基质吸力对 $P_{1/4}$ 的影响非常显著. 在 $(u_a - u_w) = 50 \text{ kPa}$ 时, $b = 1$ 时 $P_{1/4}$ 比 $b = 0$ 时增大了 48.3%,说明考虑中间主应力 σ_2 可以更好地发挥非饱和土的强度潜能. 由图 4 可看出,随着 λ 和 $(u_a - u_w)$ 的增大,超固结非饱和土 $P_{1/4}$ 不断增大, $\lambda = 2$ 时 $P_{1/4}$ 比 $\lambda = 1$ 时增大了 30.9%. $P_{1/4}$ 与 λ 近似成线形关系,且不同 $(u_a - u_w)$ 所对应的 $P_{1/4}$ 间相互平行, $(u_a - u_w)$ 每增加 50 kPa, $P_{1/4}$ 平均增加约 75 kPa.

图 5 给出了太沙基承载力系数与 b 的变化关

系. 图 6 给出了非饱和土太沙基极限承载力 P_u 与 $b, (u_a - u_w)$ 的变化关系.

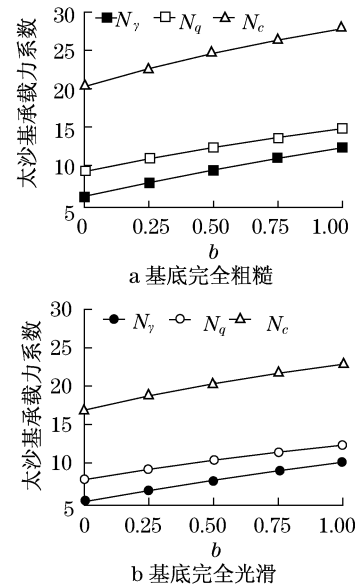


图 5 太沙基承载力系数与 b 的关系

Fig. 5 Relationship between Terzaghi's bearing capacity factors and b

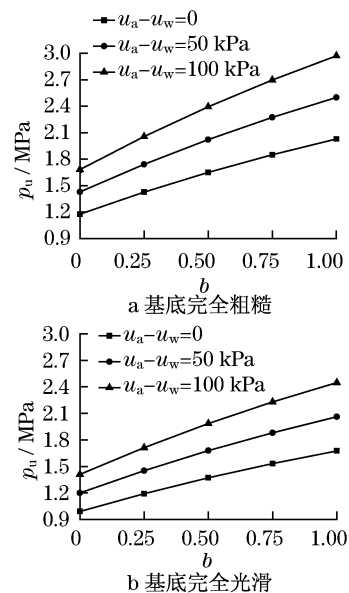


图 6 P_u 与 b 及 $(u_a - u_w)$ 的关系

Fig. 6 Relationship among P_u, b and $(u_a - u_w)$

由图 5 和图 6 可以看出,随着 b 的增大,太沙基承载力系数和 P_u 均不断增大. $b = 1$ 时 N_γ, N_q, N_c 和 P_u 分别比 $b = 0$ 时增大了 106.5%, 61%, 37.3%, 75% (基底完全粗糙) 和 103.6%, 57.5%, 35.3%, 70% (基底完全光滑). P_u 随着 $(u_a - u_w)$ 的增大而不断增大, $b = 0.5$ 时基质吸力从 0(饱和土)增加到 100 kPa, 对应的 P_u 从 1 649.2 kPa 增加到 2 393.3

kPa(基底完全粗糙)和从 1 371.0 kPa 增加到 1 985.1 kPa(基底完全光滑),可见基质吸力和中间主应力 σ_2 对 P_u 的影响同样非常显著. 由图 5 和图 6 知,在相同条件下基底完全粗糙时太沙基承载力系数和 P_u 均大于基底完全光滑时.

5 结论

(1) 将统一强度理论引入非饱和土抗剪强度,建立了非饱和土双应力状态变量抗剪强度统一解,进而考虑中间主应力、基质吸力和超固结比等综合影响,推导了非饱和土条形地基临界荷载和太沙基极限承载力解析解,其中临界荷载公式对任意侧压力系数均适用.

(2) 本文解析解有很好的可比性,饱和土与非饱和土基于 Mohr-Coulomb 强度准则或统一强度理论的条形地基临界荷载和太沙基极限承载力均为本文解的特例,从必要性上对该解析解进行了验证.

(3) 临界荷载 $P_{1/4}$ 和太沙基极限承载力 P_u 均随着统一强度理论参数 b 、基质吸力($u_a - u_w$)的增大而不断增大,且 $P_{1/4}$ 与超固结比 λ 近似成线形递增关系,不同($u_a - u_w$)所对应的 $P_{1/4}$ 间相互平行;太沙基承载力系数随着 b 的增大而显著增加,且基底粗糙时太沙基承载力系数和 P_u 均大于基底完全光滑时. 这些都说明考虑中间主应力 σ_2 、($u_a - u_w$)和 λ ,可以更客观地认识非饱和土的工程特性,要设法保护非饱和土中的基质吸力,充分发挥其强度潜能,降低工程造价.

参考文献:

- [1] 赵树德. 地基弹性承载力 $K \neq 1.0$ 时的计算公式[J]. 西安建筑科技大学学报, 1995, 27(3): 294.
- [2] 周安楠, 姚仰平. 侧压力系数对临界荷载的影响分析[J]. 建筑结构, 2005, 35(12): 27.
ZHOU Annan, YAO Yangping. Analysis of the influence of lateral pressure coefficient on critical bearing capacity [J]. Building Structure, 2005, 35(12): 27.
- [3] 范文, 林永亮, 秦玉虎. 基于统一强度理论的地基临界荷载公式[J]. 长安大学学报: 地球科学版, 2003, 25(3): 48.
FAN Wen, LIN Yongliang, QIN Yuhu. Formula for critical load of foundation based on the unified strength theory [J]. Journal of Chang'an University: Earth Science Edition, 2003, 25(3): 48.
- [4] 王祥秋, 杨林德, 高文华. 基于双剪统一强度理论的条形地基承载力计算[J]. 土木工程学报, 2006, 39(1): 79.
WANG Xiangqiu, YANG Linde, GAO Wenhua. Calculation of bearing capacity about the strip foundation based on the twin shear unified strength theory [J]. China Civil Engineering Journal, 2006, 39(1): 79.
- [5] 高江平, 俞茂宏, 李四平. 太沙基地基极限承载力的双剪统一解[J]. 岩石力学与工程学报, 2005, 24(15): 2736.
GAO Jiangping, YU Maohong, LI Siping. Double-shear unified solution of Terzaghi ultimate bearing capacity of foundation [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2005, 24(15): 2736.
- [6] 范文, 白晓宇, 俞茂宏. 基于统一强度理论的地基极限承载力公式[J]. 岩土力学, 2005, 26(10): 1617.
FAN Wen, BAI Xiaoyu, YU Maohong. Formula of ultimate bearing capacity of shallow foundation based on unified strength theory [J]. Rock and Soil Mechanics, 2005, 26(10): 1617.
- [7] Fredlund D G, Rahardjo H. Soil mechanics for unsaturated soils [M]. New York: John Wiley and Sons Inc, 1993.
- [8] 俞茂宏. 双剪理论及其应用 [M]. 北京: 科学出版社, 1998.
YU Maohong. Twin-shear theory and its application [M]. Beijing: Science Press, 1998.
- [9] 张常光, 张庆贺, 赵均海. 非饱和土抗剪强度及土压力统一解[J]. 岩土力学, 2010, 31(6): 1871.
ZHANG Changguang, ZHANG Qinghe, ZHAO Junhai. Unified solutions of shear strength and earth pressure for unsaturated soils [J]. Rock and Soil Mechanics, 2010, 31(6): 1871.