

## 砂土速率相关黏性特性的有限元分析

李福林<sup>1,2</sup>, 彭芳乐<sup>1,2</sup>, KONGKITKUL Warat<sup>3</sup>, 龙冈文夫<sup>4</sup>

(1. 同济大学 地下建筑与工程系, 上海 200092; 2. 同济大学 岩土及地下工程教育部重点实验室, 上海 200092;  
3. 吞武里蒙库国王科技大学 土木工程系, 泰国 曼谷 10140; 4. 东京理科大学 土木工程系, 日本 千叶 278-8510)

**摘要:** 根据复杂加载条件下饱和砂土排水平面应变压缩试验, 分析了砂土的速率相关的黏性特性. 试验发现砂土存在显著的加载速率效应、蠕变变形和应力松弛, 并且在应变速率突变、蠕变或应力松弛之后, 以新的应变速率重新加载时呈现出高刚度行为. 针对砂土的变形强度特性提出了一种非线性有限元计算方法, 砂土本构关系采用了三要素弹黏塑性本构模型. 将有限元计算结果与试验结果进行比较, 表明建议的有限元计算方法不仅可以较为精确地模拟砂土的平均应力-应变关系, 同时也可以模拟包含应变速率加载、蠕变加载、应力松弛加载的全过程黏塑特性.

**关键词:** 砂土; 弹黏塑性; 加载速率; 有限元; 蠕变

**中图分类号:** TU 441

**文献标识码:** A

rate or following a creep loading or stress relaxation stage, the stress-strain relation showed a very high tangent stiffness. A nonlinear finite element method(FEM) analysis technique was developed. In the FEM analyses, the sand was described by the three-component elasto-viscoplastic constitutive model. It was shown that the present FEM analyses can properly simulate the global stress-strain relationships obtained from the experiments. And the whole process including the variable strain rate loadings, the creep loading and stress relaxation stages were implemented in the FEM analyses.

**Key words:** sand; elasto-viscoplastic properties; loading rate; finite element method; creep

### FEM Analyses on Rate-dependent Behaviors of Sand Due to Its Viscous Properties

LI Fulin<sup>1,2</sup>, PENG Fangle<sup>1,2</sup>, KONGKITKUL Warat<sup>3</sup>, TATSUOKA Fumio<sup>4</sup>

(1. Department of Geotechnical Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. Key Laboratory of Geotechnical and Underground Engineering of the Ministry of Education, Tongji University, Shanghai 200092, China; 3. Department of Civil Engineering, King Mongkut's University of Technology Thonburi, Bangkok 10140, Thailand; 4. Department of Civil Engineering, Tokyo University of Science, Chiba 278-8510, Japan)

**Abstract:** Based on the experimental results from drained plane strain compression(PSC) tests on saturated sand under complex loading histories, the rate-dependent behaviors of sand due to its viscous properties were studied. It was found that sand exhibits obvious loading rate effects, creep deformation and stress relaxation. When monotonic loading was restarted immediately after a step-change in the strain

砂土属于典型的颗粒状岩土材料, 广泛地应用于各类建筑物基础及铁路、公路的路基. 大量的试验表明, 砂土具有明显的黏性特性, 因而其变形和强度特征与时间密切相关. 过去关于砂土黏性特性的研究多集中在蠕变和应力松弛<sup>[1-6]</sup>, 而加载速率, 尤其是加载速率变化时所引起的黏性问题的研究相对较少. Casagrande 等<sup>[7]</sup> 和 Lee 等<sup>[8]</sup> 最先研究了加载速率对砂土强度的影响. Yamamuro 等<sup>[9]</sup> 对砂土在不同恒定应变速率下进行不排水三轴压缩试验研究时, 发现砂土的变形和强度特性受加载速率的影响较大, 这主要是因为试验中砂土颗粒呈现出明显的压碎性. Matsushita 等<sup>[10]</sup> 对法国 Hostun 砂进行了多种恒定应变速率(0.000 001 25~0.001 25 min<sup>-1</sup>) 连续单调加载的排水平面应变压缩试验, 结果表明恒定应变速率对砂土应力-应变关系几乎没有影响. Lade 等<sup>[6,11]</sup> 通过一系列的排水三轴压缩试验也证实了美国 Antelope Valley 砂和碎珊瑚砂在不同恒定应

收稿日期: 2009-08-19

基金项目: 国家自然科学基金(50679056, 40972176); 教育部新世纪优秀人才支持计划(NCET-06-0378); 上海市曙光计划(05SG25); 上海市重点学科建设项目(B308)

第一作者: 李福林(1980—), 男, 讲师, 工学博士, 主要研究方向为岩土力学及数值计算. E-mail: lflmail@163.com

通讯作者: 彭芳乐(1965—), 男, 教授, 博士生导师, 工学博士, 主要研究方向为岩土力学、基础工程及地下空间与工程等.

E-mail: pengfangle@tongji.edu.cn

变速率时的应力-应变关系基本唯一,同时考察了碎珊瑚砂在变应变速率加载条件下的黏性特性.

本文在以往研究的基础上,对砂土的速率相关黏性特性,尤其是加载速率变化时砂土所呈现出的黏性行为进行分析.另外,还针对砂土的以上特性提出了砂土的三要素弹黏塑性本构模型,并将该模型嵌入到有限元程序中.最后对砂土复杂加载条件下的试验结果进行弹黏塑性有限元分析,并与试验结果进行了比较,验证了砂土本构模型及非线性有限元数值计算方法的合理性和可靠性.

## 1 砂土速率相关的黏性特性

图 1,2 为一对相似的排水平面应变压缩试验 (VRS30 和 VRS80) 的结果,其中  $R$  为主应力比,  $\varepsilon_v$  为垂直应变,试验砂为饱和的 Toyoura 砂(平均粒径  $D_{50} = 0.21$  mm, 均匀系数  $U_c = 1.2$ , 最大孔隙比  $e_{\max} = 0.98$ , 最小孔隙比  $e_{\min} = 0.62$ ). 风干的砂土颗粒从空中自由落下形成试验体并使其饱和,试样尺寸为  $9.6$  cm(宽)  $\times$   $12$  cm(高)  $\times$   $6.2$  cm(长). 试验过程中首先在初始围压  $\sigma_c = 20$  kPa 时安装测量装置,随后等向固结到某个较低的围压,最后在恒定围压下进行平面应变压缩剪切,基本轴向应变速率  $\dot{\varepsilon}_0$  为  $0.0004$   $\text{min}^{-1}$ . 试验 VRS30 和 VRS80 的区别在于剪切时的围压不同,分别为  $30$  kPa 和  $80$  kPa. 两个试验的加载历程相同,加载过程中应变速率不断发生变化,期间还包含一对蠕变加载段和一个应力松弛段,各阶段蠕变和应力松弛持续的时间均为  $3$  h,具体加载历程见图 1,2,图中  $e_0$  为初始孔隙比,  $D_r$  为相对密度.

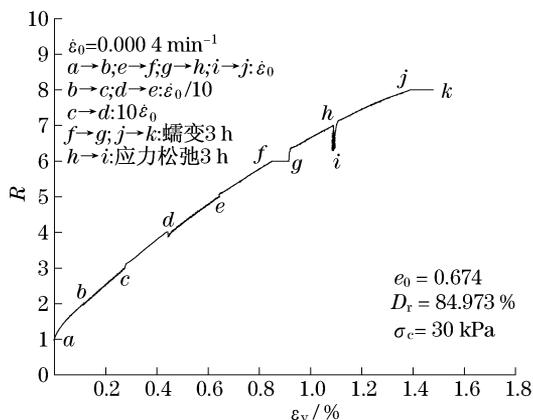


图 1 饱和 Toyoura 砂的平面应变压缩试验 (VRS30) 结果  
Fig.1 Measured result from drained PSC test (VRS30) on saturated Toyoura sand

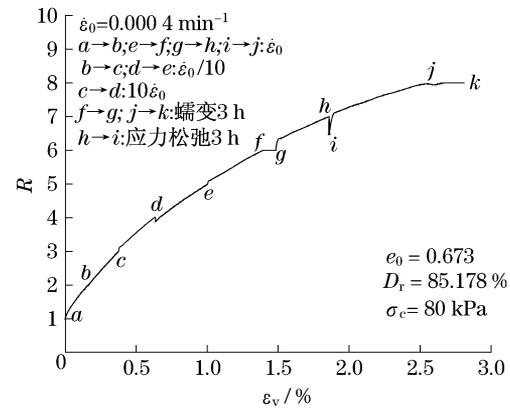


图 2 饱和 Toyoura 砂的平面应变压缩试验 (VRS80) 结果  
Fig.2 Measured result from drained PSC test (VRS80) on saturated Toyoura sand

根据图 1,2 所示的包含多种加载历史的试验结果,可以看出砂土存在重要的加载速率效应、蠕变变形和应力松弛等现象.所谓加载速率效应,是指加载速率变化对应力-应变关系的影响.对于砂土,当应变速率突然增加或减小时,应力-应变关系相应地上移或下移,呈现出非常高的切线模量.随着加载的进行,相应的应力-应变曲线又重新回归到以变化后的应变速率进行连续单调加载时所对应的应力-应变关系.由此可见,加载速率变化对砂土应力-应变关系的影响是瞬时的,随着加载的进行,加载速率变化的影响逐渐消失,应力-应变趋近于基本唯一的应力-应变关系.同样,蠕变加载之后以及应力松弛之后,重新以新的应变速率进行单调加载时,应力-应变关系也呈现出类似的行为特性.因此可以判断砂土的加载速率效应、蠕变以及应力松弛均是材料本身黏性的一种外在反映.砂土的这种特殊的黏性特性称之为瞬时黏性(temporary effects of strain rate and acceleration, TESRA),它与黏性土的等速黏性不同,其加载速率变化对应力-应变关系的影响是永久的.为了描述上述所观察的行为特性,必须在本构模型中考虑砂土的黏性特性,而传统的弹塑性模型不能解释和模拟上述现象.

## 2 砂土弹黏塑性本构模型

砂土材料本构关系采用非线性三要素弹黏塑性模型<sup>[12-14]</sup>,它包含 3 个分量,分别是亚弹性分量  $E$ 、非线性塑性分量  $P$  和非线性黏性分量  $V$ ,如图 3 所示.存在如下关系:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^{ir} \quad (1)$$

$$\sigma = \sigma^f + \sigma^v \quad (2)$$

式中:  $\dot{\epsilon}$ ,  $\dot{\epsilon}^e$ ,  $\dot{\epsilon}^{ir}$  分别为总应变速率、弹性应变速率和不可恢复应变速率;  $\sigma$ ,  $\sigma^f$ ,  $\sigma^v$  分别为总应力、无黏性应力和黏性应力。

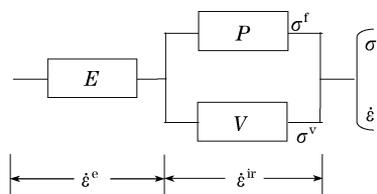


图3 非线性三要素弹黏塑性模型

Fig.3 Nonlinear three-component elasto-viscoplastic model

### 2.1 横观各向同性的亚弹性模型

三要素模型中的分量  $E$  采用亚弹性模型<sup>[15]</sup> 描述,其在某一主应变增量方向上确定的弹性模量是此方向上对应主应力的函数,应力状态的各向异性程度越大,砂土弹性形变的各向异性程度也越大,表现为应力诱发各向异性的形变特性.此外,泊松比与主应力的比值有关.

### 2.2 能量型硬软化塑性模型

三要素模型中的分量  $P$  采用基于能量的非关联流动的等向硬-软化模型描述,其中屈服函数和势函数分别表示为 Mohr-Coulomb 和 Drucker-Prager 形式.硬-软化参量为应力路径不相关的修正不可恢复应变能  $W^{ir*}$ ,在平面应变条件下具体形式为

$$W^{ir*} = \int [\sigma_{ij}^f d\epsilon_{ij}^{ir} / (p^f / p_a')^n] = \int [(t^f d\gamma^{ir} + s^f d\epsilon_{vol}^{ir}) / (s^f / p_a')^n] \quad (3)$$

式中:  $\sigma_{ij}^f d\epsilon_{ij}^{ir}$  为不可恢复应变能增量;  $\sigma_{ij}^f$  为无黏性应力;  $d\epsilon_{ij}^{ir}$  为不可恢复应变;  $p^f$  为无黏性平均应力;  $p_a' = 98 \text{ kPa}$ ;  $t^f = (\sigma_v^f - \sigma_h^f) / 2$ ;  $s^f = (\sigma_v^f + \sigma_h^f) / 2$ ;  $\sigma_v^f$  和  $\sigma_h^f$  为作用于分量  $P$  的垂直和水平无黏性应力;  $d\gamma^{ir}$  和  $d\epsilon_{vol}^{ir}$  分别为不可恢复剪切应变和体积应变增量;  $n = 0.9$  (Toyoura 砂).

在能量模型中,峰值前的硬化函数为

$$X^f(W^{ir*}) = a \ln(W^{ir*} / b + h) \quad (4)$$

式中:  $X^f$  为应力函数,具体形式为

$$X^f = t^f / s^f + r \ln(s^f / p_a') \quad (5)$$

式(4)~(5)中:  $a$ ,  $b$ ,  $h$  和  $r$  为材料常数,对于密实 Toyoura 砂,分别为  $a = 0.1288$ ,  $b = 3.4505 \times 10^{-5}$ ,  $h = 0.4310$ ,  $r = 0.09$ .

由于峰值前的硬化函数没有峰值,因此在峰值应力状态处无法与描述峰后的函数光滑连接.为了

克服这一缺点,在峰值应力状态之前某一小范围内采用如下过渡函数:

$$X^f(W^{ir*}) = X_{\max}^f \left[ \frac{2\sqrt{W^{ir*} W_p}}{W^{ir*} + W_p} \right]^K \quad (6)$$

式中:  $X_{\max}^f$  和  $W_p$  分别为  $X^f(W^{ir*})$  和  $W^{ir*}$  在峰值应力状态处的值,它们均是应力水平  $s^f$ 、堆积面夹角  $\delta$  和孔隙比  $e$  的函数.指数  $K$  采用三点拟合法确定:

$$K = \lg\left(\frac{X_1^f}{X_{\max}^f}\right) / \lg\left[\frac{2\sqrt{W_1 W_p}}{W_1 + W_p}\right] \quad (7)$$

对于密实 Toyoura 砂,  $X_1^f = 0.8X_{\max}^f$ ;  $W_1$  为  $X_1^f$  处对应的  $W^{ir*}$  值.

为了模拟峰值后应变局部化引起的软化和剪切带现象,软化函数可假设为

$$X^f(W^{ir*}) = X_r^f + (X_{\max}^f - X_r^f) \exp\left[-\left(\frac{W^{ir*} - W_p}{W_r}\right)^2\right] \quad (8)$$

式中:  $W_r$  为不可恢复软化参量,确定了  $X^f(W^{ir*})$  从  $X_{\max}^f$  衰减至残余值  $X_r^f$  的速率.关于能量型硬软化弹塑性模型的详细介绍,可参考文献[14].

### 2.3 速率相关的非线性黏性模型

根据岩土材料(黏土、砂土、砾石、软岩等)的平面应变压缩、三轴压缩、三轴拉伸试验的结果,岩土材料的黏性特性可以通过作用于分量  $V$  的  $\sigma^v$  表征.  $\sigma^v$  是不可恢复应变  $\epsilon^{ir}$ ,  $\dot{\epsilon}^{ir}$  以及应变历史  $h_s$  的函数.对于黏性土,可用等速黏性表示.对于单调加载情形,等速黏性应力  $\sigma_{iso}^v$  仅是  $\epsilon^{ir}$  和  $\dot{\epsilon}^{ir}$  的函数,且与  $\sigma^f$  成如下比例关系:

$$\sigma^v = \sigma_{iso}^v(\epsilon^{ir}, \dot{\epsilon}^{ir}) = \sigma^f(\epsilon^{ir}) g_v(\dot{\epsilon}^{ir}) \quad (9)$$

式中:  $g_v(\dot{\epsilon}^{ir})$  称为黏性函数,是  $\dot{\epsilon}^{ir}$  的非线性函数.对于岩土材料,  $g_v(\dot{\epsilon}^{ir})$  可表示为<sup>[12-13]</sup>

$$g_v(\dot{\epsilon}^{ir}) = \alpha \{1 - \exp[1 - (|\dot{\epsilon}^{ir}| / \dot{\epsilon}_r^{ir} + 1)^m]\} \quad (10)$$

式中:  $\alpha$ ,  $m$  和  $\dot{\epsilon}_r^{ir}$  均为正的材料常数;  $g_v(0) = 0$ ,  $g_v(\infty) = \alpha$ .

如前所述,砂土呈现出瞬时黏性特性,应变速率及应变加速度对材料黏性的影响是瞬时的,因此其应力-应变关系受新近加载历史的影响,而等速黏性模型不能模拟这一特性.在三要素模型中通过引入衰减函数  $r_d^{(\epsilon^{ir}-\tau)}$  表示砂土的瞬时黏性.在单调加载情形下,瞬时黏性应力为

$$\sigma^v = \sigma_{\text{TESRA}}^v(\epsilon^{ir}, \dot{\epsilon}^{ir}, h_s) = \int_{\tau=\epsilon_1^{ir}}^{\epsilon^{ir}} [d\sigma_{iso}^v]_{(\tau)} r_d^{(\epsilon^{ir}-\tau)} \quad (11)$$

式中:  $\epsilon_{ir}^v$  为加载开始时的不可恢复应变, 此时  $\sigma^v = 0$ ;  $\tau$  为积分变量, 当  $\epsilon_{ir}^v$  为  $\tau$  时对应的等速黏性应力增量为  $[d\sigma_{iso}^v]_{(\tau)}$ ; 衰减参数  $r_d$  为小于 1 的正常数. 从而,  $\sigma_{TESRA}^v$  的当前值 ( $\epsilon_{ir}^v = \epsilon_{ir}^v$  时) 依赖于  $\epsilon_{ir}^v$  的历史. 当  $r_d = 1.0$  时, 即为等速黏性  $\sigma_{iso}^v$ .

### 3 有限元分析

#### 3.1 非线性计算方法

将上述砂土三要素模型嵌入到有限元程序中, 从而构建能够求解材料非线性的弹黏塑性有限元分析方法. 有限元的非线性计算采用了动态松弛法, 它在求解强非线性方程方面具有显著优势, 特别适合于类似于砂土的高摩擦角材料. 对于无黏性弹塑性方程的积分, 采用了回归映射算法, 它是一种近似的一阶向后欧拉积分算法. 在无黏性应力回映迭代的同时, 根据三要素模型中的速率相关的非线性黏性模型计算黏性应力, 进而求得总应力, 使之满足屈服条件. 计算时, 收敛状态由以下两个标准来判定:

(1) 整体残余力相对标准:

$$\frac{(\|\mathbf{F} - \mathbf{P} + \mathbf{P}^{init}\|)^2}{(\|\mathbf{F}\|)^2} \leq \epsilon_F \quad (12)$$

(2) 两次相邻迭代 ( $n$  和  $n+1$ ) 间的整体残余力绝对标准:

$${}^n(\|\mathbf{F} - \mathbf{P} + \mathbf{P}^{init}\|)^2 - {}^{n+1}(\|\mathbf{F} - \mathbf{P} + \mathbf{P}^{init}\|)^2 \leq \epsilon_D \quad (13)$$

式(12)—(13)中:  $\mathbf{F}$  为外力矢量;  $\mathbf{P}$  为内力矢量;  $\mathbf{P}^{init}$  为初始应力引起的节点力矢量;  $\epsilon_F$  和  $\epsilon_D$  为收敛容差, 为了保证非线性计算有效地收敛, 在有限元计算过程中取  $\epsilon_F = \epsilon_D = 10^{-6}$ .

#### 3.2 有限元分析步骤

根据图 1, 2 所对应的砂土试样创建有限元网格计算模型如图 4 所示, 有限元网格尺寸与试样相同, 水平和垂直方向上分别分成 16 和 20 等分. 单元类型为四边形平面应变单元, 单元尺寸为  $0.6 \text{ cm} \times 0.6 \text{ cm}$ , 单元数和节点数分别为 320 和 357.

有限元计算时, 首先在试样的各主应力面上施加等向围压 (试验 VRS30 为 30 kPa, 试验 VRS80 为 80 kPa), 然后在试样上下两端节点上施加垂直方向的随时间变化的位移速度. 位移速度根据试验过程中垂直应变的时间历程确定, 应力松弛对应的位移速度为零. 蠕变加载采用载荷控制法, 蠕变时在试样上下两端施加恒定的节点力. 有限元分析时, 应力比  $R$  和垂直应变  $\epsilon_v$  均取整个有限元网格的平均值.

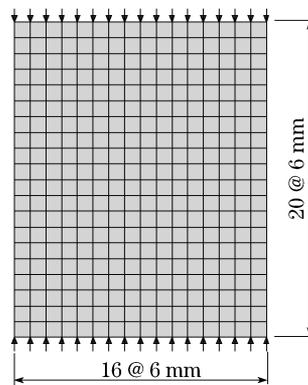


图 4 有限元网格

Fig. 4 FEM mesh

#### 3.3 有限元分析与试验结果的比较

首先, 通过对恒定应变速率连续单调加载试验进行有限元分析, 验证所提非线性有限元计算方法在分析砂土材料强非线性问题的可靠性. 连续单调加载试验的试验条件与试验 VRS30 相同, 恒定应变速率为  $0.0004 \text{ min}^{-1}$ . 有限元计算结果如图 5 所示, 可以看出, 该方法能够模拟砂土材料的硬化  $\rightarrow$  峰值  $\rightarrow$  软化  $\rightarrow$  残余的变形破坏的全过程, 且应力-应变关系与试验结果非常吻合.

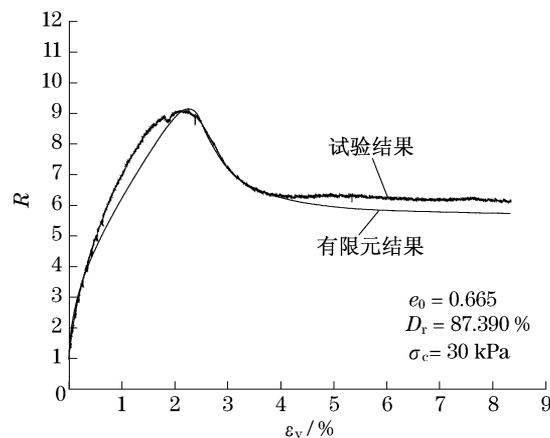


图 5 饱和 Toyoura 砂连续单调加载试验的有限元模拟

Fig. 5 FEM simulation of continuous monotonic loading test on saturated Toyoura sand

图 6, 7 分别为图 1, 2 所示的砂土复杂加载条件下平面应变压缩试验的有限元计算结果, 同时给出了相应的试验结果. 由图 6, 7 可以看出, 无论是应力-应变关系还是应变或应力的时间历程, 有限元计算结果与试验结果在整体趋势上均吻合得较好, 特别是应变随时间的发展历程, 两者几乎一致. 此外, 砂土的黏性特征也能够进行有效的有限元模拟, 如加载速率效应、蠕变和应力松弛. 这说明所提出的非

线性有限元分析方法和砂土三要素弹黏塑性本构模型能够合理地模拟砂土材料的速率相关黏性特性.同时,该方法能够模拟包含应变速率变化加载、蠕变加载、应力松弛加载的全过程.

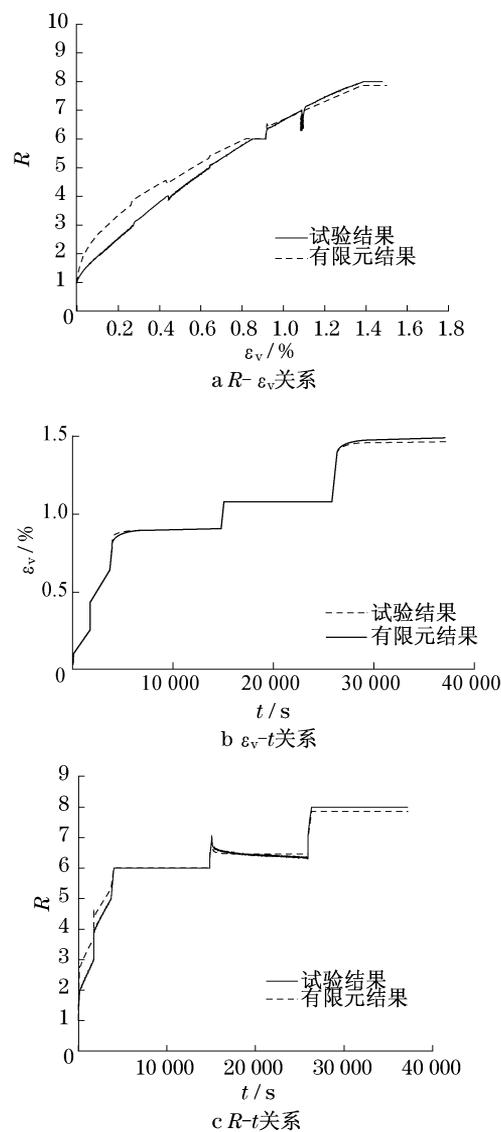


图6 试验 VRS30 的实测结果和有限元计算结果的比较  
Fig.6 Comparison between measured and FEM simulated results for test VRS30

## 4 结论

(1) 砂土存在显著的速率相关黏性特性,加载速率效应、蠕变变形和应力松弛均是砂土材料本身黏性特性的外在反映.砂土表现为瞬时黏性特性:在恒定应变速率加载时,砂土应力-应变关系基本唯一;加载速率变化对应力-应变关系的影响是瞬时的.

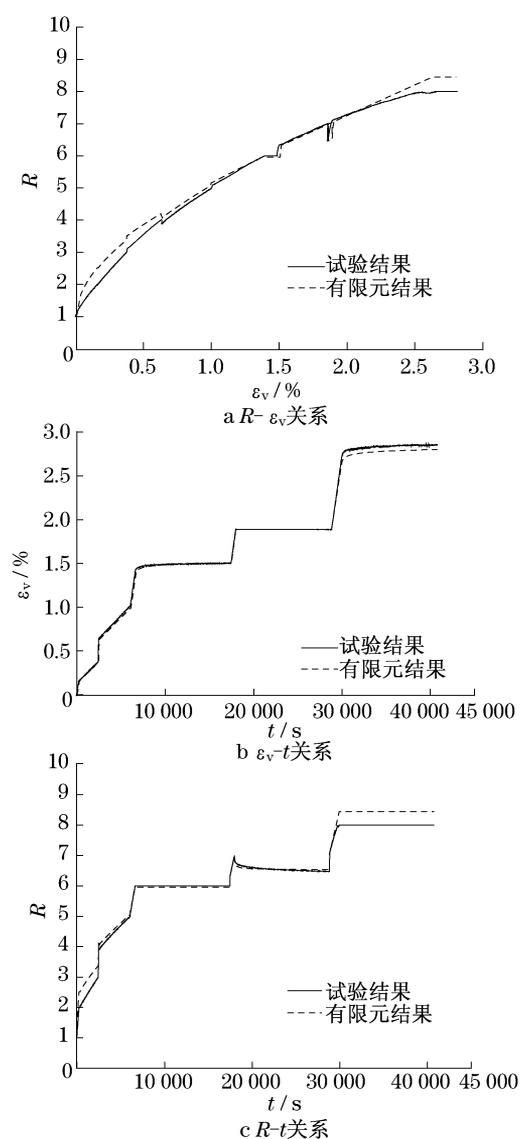


图7 试验 VRS80 的实测结果和有限元计算结果的比较  
Fig.7 Comparison between measured and FEM simulated results for test VRS80

(2) 提出一种三要素弹黏塑性本构模型用于描述砂土材料的弹性、塑性和黏性特征.该模型能够模拟包含应变速率变化加载、蠕变加载、应力松弛加载的全过程.

(3) 基于动态松弛法的弹黏塑性有限元分析方法能合理地模拟砂土的速率相关黏性特性进行数值分析,有限元计算结果与试验结果吻合较好,特别是能够反映砂土的加载速率效应、蠕变变形和应力松弛.

## 参考文献:

- [1] Kuwano R, Jardine R J. On measuring creep behaviour in granular materials through triaxial testing [J]. Canadian Geotechnical Journal, 2002, 39(5): 1061.

(下转第 47 页)