

停车泊位有限供给条件下最佳停车泊位规模

陈群¹, 史峰¹, 晏克非²

(1. 中南大学 交通运输工程学院, 湖南 长沙 410075; 2. 同济大学 交通运输工程学院, 上海 200092)

摘要: 为了确定城市中心区的合理停车泊位数量, 使之既能满足基本出行需要, 又能抑制过量出行造成路网拥堵, 首先对停车泊位有限供给条件下驾驶员出行行为进行了分析, 划分了不同驾驶员属性以反映不同驾驶员的出行意愿与决策特征, 并在此基础上构建了最佳泊位规模优化模型, 以使得在道路网络最大容量允许范围内可满足的停车总需求最大并做到泊位利用最大化. 介绍了模型求解算法, 数值算例表明, 通过该模型的优化可确定城市中心区的最佳停车泊位数量, 为停车需求管理提供科学依据.

关键词: 停车泊位; 出行行为; 路网容量; 双层规划; 遗传算法

中图分类号: U 491; U 121

文献标识码: A

Optimum Berth Scale Under a Restricted Supply of Parking Berths

CHEN Qun¹, SHI Feng¹, YAN Kefei²

(1. School of Transportation Engineering, Central South University, Changsha 410075, China; 2. College of Transportation Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: In order to determine the reasonable number of midtown berths to not only satisfy the need of basic trips but also be able to restrain excessive trips causing network congestions, an analysis was first made of the trip behavior of drivers under a restricted supply of parking berths, and different attributes of drivers were defined to characterize the trip desirability and decision behavior of different drivers. Then, a model for optimizing the number of parking berths was constructed to satisfy the maximum parking demand and to maximize berth utilization within the maximum capacity of road network. The solution of the model was introduced. A numerical example shows that with the model the optimal number of parking berths of the midtown can be determined, which can provide scientific bases for parking demand

management.

Key words: parking berth; trip behavior; road network capacity; bi-level programming; genetic algorithm

城市中心区的合理停车泊位数量的确定是至关重要的, 也是困难复杂的. 停车泊位数量过少的话, 将会造成基本出行的停车问题无法解决, 结果大量车辆因无法有效停车而不得不在路网中巡游以寻找合适的停车泊位停车, 以致产生大量无效交通而造成路网的拥挤. 另一方面, 停车泊位数量过多的话, 也将会诱使更多的车辆进入中心区, 同样造成中心区路网的拥挤. 因此合理的停车泊位数量是便利驾驶员停车而又避免交通拥挤的关键. 现在许多研究探讨了静态交通对动态交通的反作用, 并且利用这种反作用规律制定停车需求管理策略, 即对停车泊位进行有限供给, 使之既可满足基本出行的需要, 而又不致于诱使超出路网容量负荷的过量停车交通需求. 19世纪80年代以来美国许多城市停车政策从尽量满足需求开始转向使用停车需求管理策略来缓解日益突出的停车矛盾^[1]. Scully^[2]研究了美国小城镇的停车管理问题. Morrall和Bolger^[3]研究了商业区停车供应与交通使用及交通模式划分之间的关系, 考虑了停车供应对交通使用的约束. 英国运输部对停车和交通需求关系进行分析^[4-5], 目的是研究在城市拥挤区域使用停车控制策略来减少交通需求的方式. 国内方面, 吴涛^[6]运用微观经济学原理分析停车需求管理的机理, 认为停车需求管理不但可以优化停车活动本身, 还能够削减交通量. 詹晓兰^[7]、冷杰^[8]分析了城市中心区停车设施供给与路网容量平衡关系. 安实等^[9]也对停车控制管理进行了分析. 虽然国内外对静态交通对动态交通反作用规律有了一

收稿日期: 2009-08-22

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(50908235); 教育部博士点基金资助项目(20070533111); 中国博士后科学基金资助项目(20080430150)

作者简介: 陈群(1977—), 男, 博士后, 讲师, 主要研究方向为城市交通规划. E-mail: chenqun631@mail.csu.edu.cn

些认识与研究,但现在这些工作还主要是一些定性的分析居多,没有对停车泊位有限供给条件下驾驶员出行行为进行定量的分析建模,以致制定的策略有效性降低.因此本文将在分析停车泊位有限供给条件下驾驶员出行行为特征基础上,建立最优化模型来求解中心区停车设施的合理泊位规模,为停车需求管理提供科学依据.

1 停车泊位有限供给条件下驾驶员出行行为分析

一天内交通状况总是随时段而波动,常表现为交通高峰与交通平峰.因为交通高峰期间常出现交通的拥堵,所以应主要研究交通高峰时的问题.如,上班高峰可属于一个交通繁忙时段,此时主要为交通产生地向交通吸引地(停车集中区)的车流,此时停车位的供应量对停车需求具有调节与控制作用,适度的泊位供给可控制停车需求的大小(驾驶员根据经验判断停车难易然后作是否出行的决策).

研究问题前需划分各个停车区与交通区.停车区主要为交通吸引区(如城市中心区),停车区的大小通常可在步行半径范围内(如半径 300~500 m 的区域范围),并将服务对象大致相同的多个位置在一起的停车场(或停车库、路边停车位等)划在一起.通常对每个停车区的总泊位数进行确定,而不具体讨论每一停车场(或停车库、路边停车位等)的泊位规模.而对于交通区(也即交通的产生源),其分区方法可参照一般的城市交通规划方法^[10].

设交通网络 $N = (V, A)$, 其中 V 为节点集, A 为路段集. 假设各停车区为 $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$, 总共 n 个停车区; 交通分区为 $Z_1, Z_2, Z_3, \dots, Z_m$, 总共 m 个交通分区. 交通分区为交通产生地, 而停车区为交通吸引地(不研究返回的情况, 一般自停车区返回的车流集中程度要小一些). 对各停车分区 $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$, 调查并预测其停车需求(OD)的组成来源, 假设对停车分区 P_j , 来自交通分区 Z_i 的车流记为 $q_{i,j}$. 再划分不同的驾驶员类属, 不同类属的驾驶员出行意愿不同、出行决策也不同, 最终影响到出行的量. 如所在地及目标停车区均相同的驾驶员, 当停车区泊位数假设为 500 (足够停车, 不需等待时间), 则所有的驾驶员都觉得可以停车, 因此都选择出行; 当停车区泊位数降低到 300 (假设此时 50% 的可能性需要等待停车), 则偏于保守的驾驶员出行的

比例就会降低, 而喜好冒险的驾驶员可能会继续选择出行; 当停车区泊位数再降低到 200 (假设此时 80% 的可能性需要等待停车), 则偏于保守的驾驶员可能就不会选择出行并且冒险型驾驶员的出行比例也会降低. 因此, 划分不同的驾驶员类属是必要的, 对于不同的停车泊位供给水平可估计其出行的比例(可通过交通调查问询得到), 从而为确定最后出行的量作准备.

假设第 k 类驾驶员其自交通分区 Z_i 向停车分区 P_j 的总需求为 $q_{i,j}^k$, 满足

$$\sum_k q_{i,j}^k = q_{i,j}, i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

其自交通分区 Z_i 向停车分区 P_j 的出行可能性(也即概率) $\gamma_{i,j}^k(X_j)$ 为停车分区 P_j 泊位规模 X_j 的函数, 因此, 相应的自交通分区 Z_i 向停车分区 P_j 的车流量即为 $q_{i,j}^k \gamma_{i,j}^k(X_j)$. 不同停车泊位数和不同属性驾驶员的选择概率不同, 通常此值可利用问卷调查方法获得.

对于驾驶员类属的划分, 其与驾驶员性别、年龄、性格、职业、所在地与目的地的远近、出行目的、备选交通方式的便利性等有关. 按其出行意愿与愿望的差异对驾驶员的类属进行划分, 对于出行意愿与愿望的差异可按驾驶员性别、年龄、性格、职业等进行打分确定, 从而可按分值段高低确定不同的驾驶员类属.

2 停车设施泊位规模优化模型

在停车泊位有限供给条件下驾驶员出行行为分析基础上, 可建立停车设施的最佳泊位规模优化模型.

停车规划的最终目标是满足停车的需要, 因此模型最基本的目标即为: 在道路网络最大容量允许范围内使得可满足的停车总需求最大, 这样可做到充分地利用现有道路网络资源并能最大程度地满足人们的出行停车需要. 即

$$\max \sum_i \sum_j OD_{i,j} = \sum_i \sum_j \sum_k OD_{i,j}^k \quad (2)$$

式中: $OD_{i,j}$ 为交通分区 Z_i (交通产生地) 向停车分区 P_j (交通吸引地) 的车流量; $OD_{i,j}^k$ 为其中第 k 类驾驶员的出行量, $OD_{i,j}^k$ 即为 $q_{i,j}^k \gamma_{i,j}^k(X_j)$, 因此优化目标即为

$$\max \sum_i \sum_j \sum_k q_{i,j}^k \gamma_{i,j}^k(X_j) \quad (3)$$

但是对每个停车分区 P_j , 应满足

$$\sum_i \sum_k q_{i,j}^k \gamma_{i,j}^k(X_j) \leq X_j V_j, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (4)$$

式中, V_j 为停车分区 P_j 的停车周转率. 即对任何停车区 P_j , 都应满足泊位供应大于停车需求, 这可通过各处停车设施泊位规模 X_j 的调节来实现. 但是, 还希望使得泊位的供应量尽量接近停车需求, 否则可能造成空闲泊位资源浪费, 因此又有了另外一个目标:

$$\min \{X_j V_j - \sum_i \sum_k q_{i,j}^k \gamma_{i,j}^k(X_j)\}, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (5)$$

同时, 停车需求的大小与分布应满足道路网络最大容量的限制基本要求, 即:

$$x(a) + x_0(a) \leq S(a)C(a), \quad a \in A \quad (6)$$

式中: $x(a)$ 为路段 a 新增流量, 可通过交通分配模型求得; $x_0(a)$ 为背景交通流量; $C(a)$ 为路段 a 的最大通行能力; $S(a)$ 为最大容许饱和度.

另外, 对每个停车区, 通常还有一个最大最小泊位数的约束. 最小泊位数为满足最基本出行所需的泊位数, 最大泊位数通常根据土地与空间、经济等条件最大可规划的泊位数. 最大最小泊位数要求通常在规划初期作为边界条件给出. 此约束条件表示为

$$X_{j,\min} \leq X_j \leq X_{j,\max}, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (7)$$

式中, $X_{j,\min}$, $X_{j,\max}$ 分别为泊位规划的下限与上限.

以上介绍的是模型的上层目标与约束. 下层模型为停车需求(OD)在路网上的交通分配, 这里采用用户均衡交通分配模型(UE)求解 $x(a)$, $a \in A$. 因此, 通过上面的分析, 可得到停车设施的最佳泊位规模优化模型(双层规划)为

$$\begin{aligned} & \max \sum_i \sum_j \sum_k q_{i,j}^k \gamma_{i,j}^k(X_j) \\ & \min \{X_j V_j - \sum_i \sum_k q_{i,j}^k \gamma_{i,j}^k(X_j)\}, \quad j = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

这两个目标为模型的优化目标, 这属于多目标规划问题. 多目标规划求解方法很多^[11], 这里采用线性加权方法, 采用当量因子 ξ 将上层两个目标转换成单目标函数得:

$$\begin{aligned} & \max \left\{ \xi \sum_i \sum_j \sum_k q_{i,j}^k \gamma_{i,j}^k(X_j) - (1 - \xi) \right. \\ & \left. \sum_j (X_j V_j - \sum_i \sum_k q_{i,j}^k \gamma_{i,j}^k(X_j)) \right\} \quad (8) \end{aligned}$$

式中, X_j 为决策变量.

s. t.

$$\sum_i \sum_k q_{i,j}^k \gamma_{i,j}^k(X_j) \leq X_j V_j, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$x(a) + x_0(a) \leq S(a)C(a), \quad a \in A$$

$$X_{j,\min} \leq X_j \leq X_{j,\max}, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

其中, $x(a)$, $a \in A$ 满足下层规划:

$$\min \sum_{a \in A} \int_0^{x(a)} t_a(w, x_0(a)) dw \quad (9)$$

s. t.

$$\sum_{k=1}^{L(i,j)} f_k^{i,j} = OD_{i,j}, \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n \quad (10)$$

$$x(a) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{L(i,j)} f_k^{i,j} \delta_{a,k}^{i,j}, \quad a \in A \quad (11)$$

$$f_k^{i,j} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m;$$

$$j = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, L(i,j) \quad (12)$$

在上述规划式(9)~(12)中, $L(i,j)$ 为 OD 对 (i,j) 间的路径数, $f_k^{i,j}$ 为 OD 对 (i,j) 间的第 k 条路径的交通流量. 如果路段 a 在点对 (i,j) 的第 k 条路径上, 则 $\delta_{a,k}^{i,j}$ 为 1, 否则为 0. $t_a(x(a), x_0(a))$ 为路阻函数(可调查、回归得到).

上面所建立的模型适用于城市中心区停车泊位有限供给条件下的停车设施泊位规模优化, 在充分利用现有道路网络资源条件下最大程度满足人们的出行停车需要. 模型主要需调查的参数为出行的 OD 分布及不同停车泊位数和不同属性驾驶员的选择概率, 这些参数的选取通常可通过交通量调查及问卷调查方法获得.

3 模型求解算法

双层规划问题是多项式复杂程度的非确定性(non-deterministic polynomial, NP)完全问题, 有多种近似求解算法. 由于遗传算法原理简单、技术相对成熟且具有较好的求解准确性, 所以本文拟采用遗传算法^[12]对模型进行求解. 下面是遗传算法求解的步骤.

步骤 1 初始化. 以 X_j 为优化变量进行实数编码, 染色体长度 n . 设定遗传算法的交叉概率 p_c 、变异概率 p_m 、种群数目 N 、最大进化代数 g_m . 种群数太大则运算时间大, 太小则难以求得合理解, 一般取 10~160 之间; 交叉概率控制交叉算子被使用的频率, 一般取 0.25~1.00 之间; 变异概率影响群体多样性, 防止算法过早收敛, 常取 0.000 1~0.1. 令 $g=0$.

步骤 2 根据上层模型的优化目标确定合理的适应度函数, 可取 $F(r) = O(r)$, $F(r)$ 为第 r 个个

体的适应度, $O(r)$ 为第 r 个个体的目标函数值. 随机产生初始种群, 置 $g = 1$.

步骤 3 上层模型中给出 X_j 值, 可利用式(1)~(3)得到相应的停车需求分布, 代入下层模型, 利用 Frank-Wolf 算法^[13] 计算路段流量, 然后返回上层计算个体适应度及约束满足情况(即计算超出约束的程度, 对可行解个体超出约束为 0). 如果 $g = g_m$, 满足约束条件的适应度最大的染色体即为问题最优解, 否则转步骤 4.

步骤 4 采用基于排名的轮盘式选择算子复制选择下一代种群. 对待选个体先将可行解按适应值由高到低排在前面, 再将不可行解按超出约束程度由小到大继续往后排, 排名第 r 个体生存概率为

$$S(r) = p(1-p)^{r-1} \quad (13)$$

式中, $p \in (0, 1)$ 为选择压力. 求出生存概率 $S(r)$ 后, 即可计算个体选择概率 $S'(r) = S(r) / \sum S(r)$, 再按轮盘赌方式选择产生后代.

步骤 5 根据交叉概率 p_c , 执行交叉操作. 对种群中所有个体随机配对, 对每一配对, 在 $[0, 1]$ 中产生随机数 e_1 , 若 $e_1 < p_c$, 则该配对进行交叉操作. 对每一需进行交叉操作的配对, 在 $[0, 1]$ 中产生随机数 c , 进行交叉操作如下:

$$R'_1 = cR_1 + (1-c)R_2 \quad (14)$$

$$R'_2 = (1-c)R_1 + cR_2 \quad (15)$$

式(14), (15)中, R_1 和 R_2 为当前个体, R'_1 和 R'_2 为新个体.

步骤 6 根据变异概率 p_m , 执行变异操作, 令 $g = g + 1$, 转步骤 3. 对个体 R , 在 $[0, 1]$ 中产生随机数 e_2 , 若 $e_2 < p_m$, 则该个体发生变异操作:

$$R' = R + hd \quad (16)$$

式中, d 为随机产生的一个方向矢量, $d = [d_1 \ d_2 \ \dots \ d_n]$, 其中每个元素取值在 $[-1, 1]$ 之间; $h \in \max_j [0, f_{Uj} - f_{Lj}]$ (j 为染色体中每个基因变量序号, f_{Uj} 为第 j 个变量取上限值, f_{Lj} 为第 j 个变量取下限值).

4 数值算例

如图 1 所示, 节点 1, 2, 3 处为三个交通区(交通产生地), 节点 13, 15 处为两个停车区(交通吸引地). 所有路段均包含两个相向方向且自由流行驶时间均为 1 min, 通行能力均为 400 辆 \cdot h⁻¹. 驾驶员分两种类型: 保守型(以“0”表示)和冒险型(以“1”表示), 并且对不同类型的驾驶员其潜在的出行需求

如下:

$$q_{1,13}^0 = 100, q_{1,13}^1 = 100, q_{2,13}^0 = 150,$$

$$q_{2,13}^1 = 100, q_{3,13}^0 = 150, q_{3,13}^1 = 50;$$

$$q_{1,15}^0 = 150, q_{1,15}^1 = 100, q_{2,15}^0 = 150,$$

$$q_{2,15}^1 = 50, q_{3,15}^0 = 150, q_{3,15}^1 = 100.$$

第 k ($k = 0, 1$) 类驾驶员自交通区 Z_i ($i = 1, 2, 3$) 向停车区 P_j ($j = 13, 15$) 的出行可能性(概率) $\gamma_{i,j}^k(X_j)$ 如下:

$$r_{i,j}^0(X_j) = \begin{cases} 1 & X_j \geq 600 \\ 0.0025X_j - 0.5 & 200 \leq X_j \leq 600, \\ 0 & X_j \leq 200 \end{cases}$$

$i = 1, 2, 3; j = 13, 15$

$$r_{i,j}^1(X_j) = \begin{cases} 1 & X_j \geq 400 \\ 0.0033X_j - 0.3333 & 100 \leq X_j \leq 400, \\ 0 & X_j \leq 100 \end{cases}$$

$i = 1, 2, 3; j = 13, 15$

所有道路均要求饱和度不超过 0.8. 停车区 13, 15 处的泊位数要求均不小于 200 个, 但不超过 600 个, 停车周转率设均为 1. 背景交通量为 0.

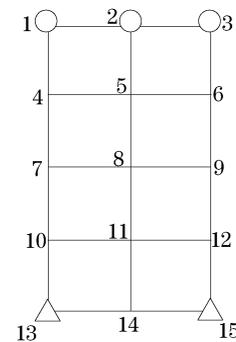


图 1 交通网络结构

Fig.1 Traffic network structure

求解过程与结果如下:

根据式(1)~(12)建立双层规划模型, 通过试取值 ξ 取 0.7, 将具体参数代入模型, 路阻函数采用美国联邦公路局(U. S. Bureau of Public Roads)BPR 函数^[10]. 按文中所述求解算法求解模型, 编写遗传算法程序, 经多次试算, 种群数取 100, 交叉率 0.7, 变异率 0.1, 程序运行 50 代得到较好的优化结果: 停车区 13, 15 处的最佳泊位数分别为 344, 321 个, 目标函数最大值为 462, 总的出行需求为 662, 优化后泊位总数比出行需求大 3, 泊位利用较好.

并可得到相应的出行需求分布为: 对于停车区 11, 自交通区 1, 2, 3 来的车流分别为 116, 134, 94 辆 \cdot h⁻¹; 对于停车区 15, 自交通区 1, 2, 3 来的车流分别为

118.82, 118 辆·h⁻¹. 出行比例分别为: $\gamma_{1,13}^0(X_{13}) = 0.3586$; $\gamma_{1,13}^1(X_{13}) = 0.8000$; $\gamma_{2,13}^0(X_{13}) = 0.3586$; $\gamma_{2,13}^1(X_{13}) = 0.8000$; $\gamma_{3,13}^0(X_{13}) = 0.3586$; $\gamma_{3,13}^1(X_{13}) = 0.8000$; $\gamma_{1,15}^0(X_{15}) = 0.3035$; $\gamma_{1,15}^1(X_{15}) = 0.7273$; $\gamma_{2,15}^0(X_{15}) = 0.3035$; $\gamma_{2,15}^1(X_{15}) = 0.7273$; $\gamma_{3,15}^0(X_{15}) = 0.3035$; $\gamma_{3,15}^1(X_{15}) = 0.7273$.

路段上的流量及饱和度结果见表1.

表1 路段流量及饱和度
Tab.1 Link flows and saturation

路段	流量/(辆·h ⁻¹)	饱和度/%
1→2	118	29.6
2→1	107	26.7
2→3	100	25.0
3→2	91	22.8
14→13	121	30.2
14→15	100	25.1
15→14	3	0.7
1→4	223	55.7
4→7	223	55.7
7→10	223	55.7
10→13	223	55.7
2→5	218	54.6
5→8	218	54.6
8→11	218	54.6
11→14	218	54.6
3→6	221	55.2
9→12	221	55.2
12→15	221	55.2

注:其他未列路段流量为0.

由上面的结果可知,路段流量、饱和度满足要求,且各停车区泊位数都在最大与最小值之间.

5 结论

(1) 合理的停车泊位数量是便利驾驶员停车而又避免交通拥挤的关键.对停车泊位的供给,应既能满足基本出行的需要,而又不致于诱使超出道路网络最大容量允许的停车交通需求.

(2) 分析了停车泊位有限供给条件下的驾驶员出行行为,划分了不同的驾驶员类属以反映不同驾驶员的出行意愿与决策特征,并最终决定出行的量.

(3) 在泊位有限供给条件下出行行为分析基础上,建立了最优化模型来求解中心区停车设施的合理泊位数量,使得在道路网络容量允许范围内可满足的停车总需求最大并做到泊位利用最大化,这样可做到充分地利用现有道路网络资源并能最大程度地满足人们的出行停车需要.

(4) 数值算例表明通过模型优化可确定城市中心区停车设施的合理泊位规模,为停车需求管理提供科学依据.但本文模型还属理论研究,因此今后还需作进一步的实证研究工作,以充分验证理论模型的有效性并实地调查各种参数的取值.

参考文献:

- [1] Martin S T, Marcia A. Synopsis of the new orleans on-street parking management program evaluation report [J]. ITE Journal, 1986, 56(5): 29.
- [2] Scully W J. Parking management in a small community: back to basics [J]. ITE Journal, 1988, 58(11): 32.
- [3] Morrall J, Bolger D. Relationship between downtown parking supply and transit use [J]. ITE Journal, 1996, 66(2): 32.
- [4] Coombe D, Guest P, Bates J, et al. Study of parking and traffic demand: the research program [J]. Traffic Engineering & Control, 1997, 38(2): 62.
- [5] Scholefield G, Bradley R, Skinner A, et al. Study of parking and traffic demand: a traffic restraint analysis model (TRAM) [J]. Traffic Engineering & Control, 1997, 38(3): 135.
- [6] 吴涛, 晏克非. 停车需求管理的机理研究 [J]. 城市规划, 2002, 26(10): 85.
WU Tao, YAN Kefei. The mechanism study on the parking demand management [J]. City Planning Review, 2002, 26(10): 85.
- [7] 詹晓兰. 城市中心区停车设施供给与路网容量平衡关系的研究 [J]. 交通与运输, 2005(7): 77.
ZHAN Xiaolan. Study on the equilibrium about supply of parking facilities and capacity of road network of urban center district in China [J]. Traffic and Transportation, 2005(7): 77.
- [8] 冷杰. 大城市中心区停车设施供应与路网容量关系 [J]. 中国市政工程, 2006(2): 7.
LENG Jie. Studies on relation of parking facilities and road capacity in downtowns of big cities [J]. China Municipal Engineering, 2006(2): 7.
- [9] 安实, 王健. 停车需求预测与管理 [J]. 交通运输系统工程与信息, 2001, 1(3): 212.
AN Shi, WANG Jian. Study on parking demand forecasting and management [J]. Journal of Communication and Transportation Systems Engineering and Information, 2001, 1(3): 212.
- [10] 陆化普. 交通规划理论与方法 [M]. 北京: 清华大学出版社, 1998.
LU Huapu. Traffic planning theory and ways [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1998.
- [11] 钱颂迪. 运筹学 [M]. 北京: 清华大学出版社, 1990.
QIAN Shongdi. Operation research [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1990.
- [12] 王小平, 曹立明. 遗传算法——理论、应用与软件实现 [M]. 西安: 西安交通大学出版社, 2002.
WANG Xiaoping, CAO Liming. Genetic algorithm——theory, application and software implementation [M]. Xi'an: Xi'an Jiaotong University Press, 2002.
- [13] Frank M, Wolfe P. An algorithm for quadratic programming [J]. Naval Research Logistics Quarterly, 1956, 3(2): 95.