

考虑中间主应力与剪胀的新邓肯-张模型

赵春风^{1,2}, 杨砚宗^{1,2}, 张常光^{1,2}, 赵程^{1,2}

(1. 同济大学 岩土及地下工程教育部重点实验室, 上海 200092; 2. 同济大学 地下建筑与工程系, 上海 200092)

摘要: 邓肯-张模型是岩土工程中广泛应用的非线性弹性模型,但由于其建立在 Mohr-Coulomb 强度准则基础上,不能考虑中间主应力的影响,且邓肯-张模型应用广义胡克定律时,假定体应变与轴应变之间为双曲线,不能反映岩土材料的剪胀性. 基于统一强度理论,在沈珠江模型的基础上,采用二次抛物线体变公式,改进其参数形式,建立同时考虑中间主应力和剪胀的新邓肯-张模型. 经与粗粒土和粘性土等试验结果比较,验证了新模型的正确性. 研究结果表明:该新模型克服了邓肯-张模型的不足,可以合理地反映岩土材料的中间主应力效应和剪胀性. 该结果为邓肯-张模型的改进提供了理论依据,对实际工程设计具有一定的参考价值.

关键词: 邓肯-张模型; 统一强度理论; 中间主应力; 剪胀
中图分类号: TU 521 **文献标识码:** A

An Improved Duncan-Chang Model Considering Effects of Intermediate Principal Stress and Shear Dilatancy

ZHAO Chunfeng^{1,2}, YANG Yanzong^{1,2}, ZHANG Changguang^{1,2}, ZHAO Cheng^{1,2}

(1. Key Laboratory of Geotechnical and Underground Engineering of the Ministry of Education, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. Department of Geotechnical Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: Duncan-Chang model is a nonlinear elastic model, which has been widely used in geotechnical engineering. For building on Mohr-Coulomb strength criterion and bulk strain assuming to be hyperbola in generalized Hooke's law, Duncan-Chang model can not take the effects of intermediate principal stress and shear dilatancy into consideration. In order to reflect the effects of intermediate principal stress and shear dilatancy rationally, a new Duncan-Chang model is derived on the basis of unified strength theory and SHEN Zhujiang model. A novel parabolic bulk strain expression is adopted in

the new model, and some forms of old parameter are improved. The modified model is validated with triaxial compression test results of coarse grained soil and clay. The results show that the new model can overcome the deficiency of the old Duncan-Chang model and reflect the effects of intermediate principal stress and shear dilatancy properly.

Key words: Duncan-Chang model; unified strength theory; intermediate principal stress; shear dilatancy

就土本构模型的研究而言,目前已提出各式各样的建模理论方法,所建立的模型更是不计其数,而真正广泛应用于工程实践的模型却是寥寥无几.

邓肯-张模型^[1-2]是一种建立在增量广义胡克定律基础上的非线性弹性模型,因其形式简单,参数较少且易于确定,得到广泛应用. 但由于邓肯-张模型采用 Mohr-Coulomb 强度准则且基于 $\sigma_2 = \sigma_3$ 的常规三轴试验基础上建立起来的,故不能考虑中间主应力 σ_2 的影响. 在工程实践中最常见的是平面应变和三维应力状态,如挡土墙,土(石)坝等,均涉及到了中间主应力,使得邓肯-张模型在应用时与实际情况有较大的差异. 大量的真三轴试验已经验证了岩土材料强度和中间主应力有关^[3-4],考虑中间主应力的影响,可以更充分发挥材料的自承载能力.

另外,粗粒土是岩土工程常见的材料,具有明显的剪胀性^[5-6]. 邓肯-张模型应用广义胡克定律时,假定体积应变 ϵ_v 与轴向应变 ϵ_a 成双曲线,不能反映土的剪胀性. 目前,国内学者对邓肯-张模型的改进进行了大量的研究,沈珠江^[7]建议用抛物线函数来表示 $\epsilon_v \sim \epsilon_a$ 关系,有学者提出三参数模型来考虑剪胀性^[8-9],但会造成刚度矩阵不对称或需迭代法求解,增加了计算的复杂性. 张嘎^[10]基于粗颗粒土的

收稿日期: 2009-11-06

基金项目: 国家自然科学基金项目(40972180); 上海市重点学科建设项目资助(B308); 浙江省交通运输厅科技计划项目(2010h35)

第一作者: 赵春风(1964—),男,教授,博士生导师,工学博士,主要研究方向为岩土工程理论与应用. E-mail: tjzhchf @sohu.com

通讯作者: 杨砚宗(1982—),男,博士生,主要研究方向为土体本构和桩土作用理论研究. E-mail: yangyanzong @163.com

大型三轴试验结果,提出了新的体变公式,刘萌成^[11-12]对粗粒料大三轴试验进行了研究,并提出堆石料应力-应变关系、侧向应变与轴向应变关系的指数函数表达式.罗刚^[5]对沈珠江模型在高围压下剪胀偏大的不足进行改进,取得了一定的效果,但在低围压模拟存在较大的误差.

现有研究都是集中在某一方面,同时考虑中间主应力和剪胀性影响的模型鲜有报道.本文基于统一强度理论^[13-15],在沈珠江模型的基础上,建立考虑中间主应力和剪胀性影响的新邓肯-张模型,经与实验结果比较,对新模型的适用性进行了探讨.

1 新模型的建立

1.1 邓肯-张模型

邓肯-张模型中,假定偏差应力 $(\sigma_1 - \sigma_3)$ 与轴向应变 ϵ_a 及体应变 ϵ_v 与轴向应变 ϵ_a 均为双曲线关系,如图 1 所示.邓肯-张模型中的 $E-K$ 模型,切线模量 E_t 和体积变形模量 K_t 表达式为

$$E_t = K p_a \left(\frac{\sigma_3}{p_a} \right)^n \left[1 - \frac{R_f (\sigma_1 - \sigma_3) (1 - \sin \varphi)}{2 c \cos \varphi + 2 \sigma_3 \sin \varphi} \right]^2 \quad (1)$$

$$K_t = K_b p_a \left(\frac{\sigma_3}{p_a} \right)^m \quad (2)$$

式中: R_f 称为破坏比, $R_f = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)_f}{(\sigma_1 - \sigma_3)_u}$; p_a 为大气压强; c 和 φ 分别为材料的黏聚力和内摩擦角.

邓肯-张模型建立在 Mohr-Coulomb 强度准则基础上,且假定 $\epsilon_v \sim \epsilon_a$ 为单调递增的双曲线关系,因而该模型不能考虑中间主应力 σ_2 和剪胀性的影响.

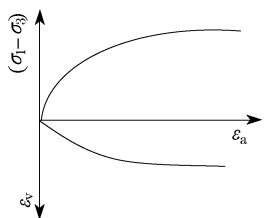


图 1 邓肯-张模型应力-应变曲线

Fig. 1 Stress-strain curve of Duncan-Chang model

1.2 中间主应力效应

中间主应力 σ_2 对岩土材料的变形和强度都有着显著的影响,统一强度理论能合理的考虑中间主应力 σ_2 的效应,适用于各种拉压特性不同的材料.令 $\sigma_2 = \zeta (\sigma_1 + \sigma_3)/2$, 式中 ζ 称为中间主应力系数,

应力以压为正,其数学表达式为^[16-18]

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \sin \varphi_t + c_t \cos \varphi_t \quad (3)$$

(1) 当 $\zeta \leq 1 - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3} \sin \varphi$ 时

$$\sin \varphi_t = \frac{b(1 - \zeta) + (2 + b + b\zeta) \sin \varphi}{2 + b + b \sin \varphi}$$

$$c_t = \frac{2(b+1)c \cos \varphi}{2 + b + b \sin \varphi} \frac{1}{\cos \varphi_t}$$

(2) 当 $\zeta \geq 1 - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3} \sin \varphi$ 时

$$\sin \varphi_t = \frac{b(\zeta - 1) + (2 + b + b\zeta) \sin \varphi}{2 + b - b \sin \varphi}$$

$$c_t = \frac{2(b+1)c \cos \varphi}{2 + b - b \sin \varphi} \frac{1}{\cos \varphi_t}$$

$$\alpha = \frac{\sigma_t}{\sigma_c} = \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi}$$

式中: c_t , φ_t 分别为材料的统一粘聚力和统一内摩擦角; α 为材料的拉压比. b 为反映中间主应力及其面上正应力对材料屈服或破坏影响程度的参数,称为统一强度理论参数, $0 \leq b \leq 1$.

不同材料具有不同的 b 值,其值可由材料的抗拉强度 σ_t , 抗压强度 σ_c 和抗剪强度 τ_s 确定,

$$b = \frac{(\sigma_c + \sigma_t) \tau_s - \sigma_c \sigma_t}{\sigma_c (\sigma_t - \tau_s)} = \frac{(1 + \alpha) \tau_s - \sigma_t}{\sigma_t - \tau_s} \quad (4)$$

根据式(4),对于粗粒土, b 值较小;对于粘性土, b 值较大.

当缺少材料参数时, b 值可根据材料部分试验结果在 0-1 范围内进行试算,再将适合该材料的 b 值应用于其他试验结果.

式(3)与 Mohr-Coulomb 强度准则形式完全一样.中间主应力系数 ζ 反映中间主应力 σ_2 与第一主应力 σ_1 , 第三主应力 σ_3 之间的大小关系,可根据所处应力状态取值;统一强度理论参数 b 反映中间主应力 σ_2 对材料屈服或破坏的影响程度,可通过材料强度指标确定.故参数 ζ 和 b 分别从中间主应力的大小和对材料屈服或破坏的影响程度 2 个不同方面来反映中间主应力效应.

1.3 剪胀性

文献[5]的计算结果在一定程度上能够反映土的剪胀性,但当剪应变较大时,其剪胀体变与试验曲线有所偏差,特别是低围压下,其偏差比较明显.为了更加合理的描述了材料在三轴试验条件下的体变关系,本文对罗刚^[5]公式进行了修改,改进的模型仍采用二次抛物线拟合体积应变 ϵ_v 与轴向应变 ϵ_a 之

间的关系,见图2.其表达式为

$$\epsilon_v = \frac{\epsilon_{vm} \epsilon_a}{\epsilon_{am}} \left(2 - \frac{\epsilon_a}{\epsilon_{am}} \right) \quad (5)$$

对式(5)求导,可得 μ_t 为

$$\mu_t = \frac{2\epsilon_{vm}}{\epsilon_{am}} \left(1 - \frac{\epsilon_a}{\epsilon_{am}} \right) \quad (6)$$

$$\epsilon_a = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{E_i \left(1 - R_f \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)(1 - \sin \varphi)}{2c \cos \varphi + 2\sigma_3 \sin \varphi} \right)} \quad (7)$$

$$E_i = K p_a \left(\frac{\sigma_3}{p_a} \right)^n, \quad \epsilon_{vm} = \frac{c_d}{V_c} \left(\frac{\sigma_3}{p_a} \right)^{n_d}$$

$$V_c = e^{k_1 \left(\frac{\sigma_3}{p_a} \right)^m \langle \epsilon_a - \epsilon_{am} \rangle}$$

函数 $\langle x \rangle$ 取值为:当 $x > 0$ 时,取 x ;当 $x \leq 0$ 时,取 $x = 0$; ϵ_{am} 为体应变出现极值 ϵ_{vm} 时的轴向应变,其大小与围压有关,采用幂函数形式为

$$\epsilon_{am} = a \left(\frac{\sigma_3}{p_a} \right)^{n_b} \quad (8)$$

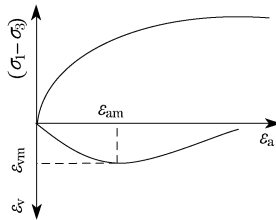


图2 沈珠江模型应力-应变曲线

Fig.2 Stress-strain curve of SHEN Zhujiang model

1.4 新模型的建立及参数确定

对于邓肯-张($E-K$)模型,依据统一强度理论式(3)和 $\epsilon_v \sim \epsilon_a$ 关系式(5),建立了新模型的切线模量 E_t ,以及体应变 ϵ_v 增量与轴向应变 ϵ_a 增量之比 μ_t 的表达式分别为

$$E_t = K p_a \left(\frac{\sigma_3}{p_a} \right)^n \left[1 - \frac{R_f (\sigma_1 - \sigma_3) (1 - \sin \varphi_t)}{2(c_t \cos \varphi_t + \sigma_3 \sin \varphi_t)} \right]^2 \quad (9)$$

$$\mu_t = \frac{\Delta \epsilon_v}{\Delta \epsilon_a} = \frac{2c_d}{aV_c} \left(\frac{\sigma_3}{p_a} \right)^{n_d - n_b} \cdot \left[1 - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{aE_i \left(1 - R_f \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)(1 - \sin \varphi_t)}{2c_t \cos \varphi_t + 2\sigma_3 \sin \varphi_t} \right)} \left(\frac{\sigma_3}{p_a} \right)^{-n_b} \right] \quad (10)$$

该模型的参数为 $c, \varphi, R_f, K, n, c_d, n_d, a, n_b, k_1$ 和 m ,共11个.对于粗粒土,则 $c = 0, \varphi = \varphi_0 - \Delta \varphi \lg(\sigma_3/p_a)$.模型所有参数均可由常规三轴压缩试验确定,前5个参数 c, φ, R_f, K, n 是大家所熟知的.参数 c_d, n_d 为沈珠江模型的参数,其确定方法是:将不同围压下

的最大剪缩体应变 ϵ_{vm} (见图2)和 (σ_3/p_a) 的值描绘在双对数纸上,其截距、斜率就是 c_d 和 n_d .参数 a 和 n_b 的确定方法是:将不同围压下体应变极值对应的轴向应变 ϵ_{am} 与 (σ_3/p_a) 的值描绘在双对数纸上,对应的截距和斜率即为 a 和 n_b ,如图3所示. k_1 和 m 为经验系数,可通过简单试算确定^[5],对于砂土和粘土, k_1 和 m 分别取4和0.1比较合适.平面应变条件下的应力-应变关系可由常规三轴试验确定模型参数,结合本文基于统一强度理论考虑中间主应力效应的新邓肯-张模型建立.

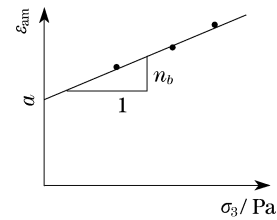


图3 参数 a 和 n_b 确定

Fig.3 Determination of a and n_b

2 模型试验验证

引用粗粒土^[5]的大型三轴排水试验和粘性土^[19]的平面应变排水试验结果,对该新模型的正确性进行验证.依据上述方法确定的各参数列于表1.数值计算的结果与试验结果的对比,如图4~7所示.

表1 模型参数

Tab.1 Model parameters

参数	紫坪铺垫层料	黄河前苇园粘性土
K	800.000	121.500
n	0.500	0.590
R_f	0.850	0.730
c/kPa	0	22.800
$\varphi_0/(\circ)$	47.500	32.000
$\Delta \varphi/(\circ)$	7.500	0
p_a/kPa	100.000	100.000
a	0.013	0.069
n_b	0.570	0.339
k_1	4.000	4.000
m	0.100	0.100
c_d	0.002	0.011
n_d	0.670	0.660

图4为紫坪铺垫层材料的大型三轴试验的应力-应变试验值和计算曲线,试验围压分别为0.2,0.8和1.6 MPa.因缺少 b 值计算参数,取围压为0.2,0.8和1.6 MPa,按0.1步进进行试算知, $b = 0.2$ 时计算值与试验值吻合较好.当参数 $b = 0$ 时,式(9)退化为文献^[5]中的邓肯-张模型式(1).通过比较,不

难看出,在三种围压情况下,中间主应力参数 $b = 0.2$ 的曲线始终高于原始邓肯-张($b = 0$)的曲线,且 $b = 0.2$ 时的曲线更靠近试验值,新模型反映了中间主应力的影响,较文献[5]中的邓肯-张模型式(1)更合理,如图 4 所示。

图 5 为紫坪铺垫层材料的大型三轴试验的轴向应变-体应变试验值和数值计算曲线。邓肯-张模型的体应变-轴向应变关系为双曲线,不能考虑材料的剪胀性,实际试验时,粗粒土刚开始表现为剪缩,达到一定变形后,多表现为剪胀。故曲线后半段与试验值偏离较大。新模型与文献[5]中的计算结果对比如图 5 所示,可看出文献[5]在低围压 0.2 MPa 和 0.8 MPa 时曲线在实测值的上边,其过于考虑了后半段的剪胀,而在高围压 1.6 MPa 时却相反;本文新模型式(10)采用除以 V_c ,对三种围压的体变曲线均给出合理的模拟,较文献[5]更接近试验曲线,特别是围压为 0.2 MPa 和 0.8 MPa 时,新模型计算曲线准确给出了垫层材料体变曲线的拐点和峰值,合理地描述了材料的剪胀性。

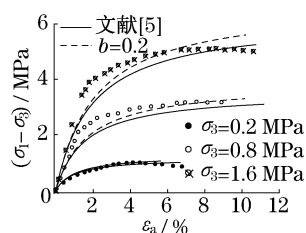


图 4 紫坪铺垫层材料($\sigma_1 - \sigma_3$)- ε_a 关系曲线
Fig.4 ($\sigma_1 - \sigma_3$)- ε_a relation of Zipingpu rockfill

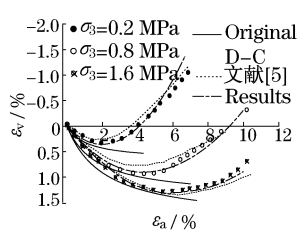


图 5 紫坪铺垫层材料 $\varepsilon_v - \varepsilon_a$ 关系曲线
Fig.5 $\varepsilon_v - \varepsilon_a$ relation of Zipingpu rockfill

图 6 为黄河前苇园粘性土平面应变试验的应力-应变试验值。与上述方法类似,围压为 0.1 MPa 和 0.4 MPa 时, $b = 0.5$ 的计算值与试验值吻合较好。在围压分别为 0.1 MPa 和 0.4 MPa 的不同试验条件下,通过对 $b = 0$, $b = 0.5$ 的计算曲线和试验曲线进行比较,结果表明,与邓肯-张模型($b = 0$)相比,考虑中间主应力的新模型有效地提高了土的切线模量,改善了原来邓肯-张模型土体模量普遍偏小的不足,更加符合实际情况。随着偏应力的增加,邓肯-张模型与试验曲线偏差越来越大,围压越大,偏差越明显,而新模型越来越靠近试验曲线。综合图 4 和图 6,不难发现考虑中间主应力的新模型曲线,较原邓肯-张曲线接近试验值,更符合试验实际情况。可见,考虑中间主应力的影响是合理的,有必要的。

图 7 为黄河前苇园粘性土平面应变试验的体应变-轴应变试验值,新模型式(10)的计算曲线和原邓肯-张模型的曲线。原邓肯-张模型的体应变与轴向应变的关系为双曲线,故随着轴压的增大,曲线呈强化状,如图 7 所示。从图 7 可以看出,在围压为 0.1 MPa 的试验条件下,当轴应变小于 7.15% 时,体应变与轴应变呈单调递增变化;当轴应变大于 7.15% 时,体应变随着轴应变的增加,逐渐减小,此时原邓肯-张曲线与试验值偏差较大,新模型考虑了材料的剪胀性,采用二次抛物线可以较好的描述土工材料的剪胀性,更加真实地反映岩土材料的变形特性。综合图 5 和图 7,对于粗粒土和粘性土改进的模型与原邓肯-张模型相比,都更加符合试验规律,与试验值吻合较好。

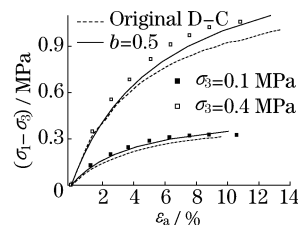


图 6 黄河前苇园粘性土($\sigma_1 - \sigma_3$)- ε_a 关系曲线
Fig.6 ($\sigma_1 - \sigma_3$)- ε_a relation of Yellow River Qianweiyuan clay

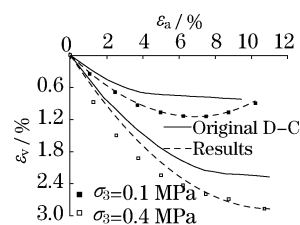


图 7 黄河前苇园粘性土 $\varepsilon_v - \varepsilon_a$ 关系曲线
Fig.7 $\varepsilon_v - \varepsilon_a$ relation of Yellow River Qianweiyuan clay

3 结语

针对邓肯-张模型不能考虑中间主应力和剪胀的不足,以统一强度理论为基础,引入材料统一强度参数 b 来考虑中间主应力的影响,结合邓肯-张模型与沈珠江模型的优点,改进了原邓肯-张模型体应变与轴应变的关系及其参数形式,从而提出一种既能考虑中间主应力效应,又能考虑岩土体变形的剪胀性,参数较少且易获得的非线性弹性模型。

通过紫坪铺垫层材料和黄河前苇园粘土的试验结果的验例分析表明,当 $b = 0.2$ 时,计算结果与紫坪铺垫层材料的试验值吻合较好;当 $b = 0.5$ 时,计算值与黄河前苇园粘土的试验结果相吻合。不同材料具有不同的 b 值,反映不同材料的中间主应力效应差异。

新模型能够更真实地反映垫层材料和粘土的体应变-轴应变关系,采用改进参数形式的二次抛物

线拟合,与试验值吻合很好,较好的描述了岩土材料的剪胀性。

本文新邓肯-张模型和原邓肯-张模型均基于增量广义胡克定律,其参数一般必须并且只需从常规三轴试验确定,对其他复杂应力路径试验都应遵从此前提,结合试验自身特点予以进一步改进^[20]。另本文只取了较典型的垫层材料和粘土的试验结果进行验证,此模型更广的适用范围有待深入研究。

参考文献:

- [1] Duncan J M, Chang C Y. Nonlinear analysis of stress and strain in soils [J]. Journal of the Soil Mechanics and Foundation Division, ASCE, 1970, 96(5): 1629.
- [2] Duncan J M, Byrne P M, Wong K S. Strength, stress - strain and bulk modulus parameters for finite element analysis of stress and movements in soil masses[R]. Berkeley: Department of Civil Engineering of University of California, 1980.
- [3] 卢肇钧. 粘性土抗剪强度研究的现状与展望[J]. 土木工程学报, 1999, 32(4): 3.
LU Zhaojun. Problems on the research of shear strength of clayey soils [J]. China Civil Engineering Journal, 1999, 32(4): 3.
- [4] Habiman J, Labiouse V. Geomechanical characterisation of cataclastic rocks; experience from the Cleuson - Dixence project [J]. International Journal of Rock Mechanics And Mining Sciences, 2002, 39(6): 677.
- [5] 罗刚, 张建民. 邓肯-张模型和沈珠江双曲面模型的改进[J]. 岩土力学, 2004, 25(6): 887.
LUO Gang, ZHANG Jianmin. Improvement of Duncan-Chang nonlinear model and SHEN Zhujiang's elastoplastic model for granular soils[J]. Rock and Soil Mechanics, 2004, 25(6): 887.
- [6] Indraratnab, Ionescu D, Christie H D. Christe. Shear behavior of railway ballast based on large-scale triaxial tests[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, ASCE, 1998, 124(5): 439.
- [7] 沈珠江. 土的重屈服面应力应变模式[J]. 固体力学学报, 1984(6): 164.
SHEN Zhujiang. A stress-strain model for soils with three yield surfaces[J]. Acta Mechanica Solida Sinica, 1984(6): 164.
- [8] 沈珠江. 考虑剪胀性土和石料的非线性应力应变模式[J]. 水利水运科学研究, 1986(4): 1.
SHEN Zhujiang. A nonlinear dilatant stress-strain model for soils and rock materials [J]. Journal of Nanjing Hydraulic Research Institute, 1986(4): 1.
- [9] Al-shawaf T, Powell G H. Variable modulus model for nonlinear analysis of soils [J]. Procedure Symp on Application of Computer Methods in Engineering, 1977(1): 423.
- [10] 张嘎, 张建民. 粗颗粒土的应力应变特性及其数学描述研究[J]. 岩土力学, 2004, 25(10): 1587.
ZHANG Ga, ZHANG Jianmin. Study on behavior of coarse grained soil and its modeling [J]. Rock and Soil Mechanics, 2004, 25(10): 1587.
- [11] 刘萌成, 黄晓明, 高玉峰. 堆石料强度变形特性与非线性弹性本构模型研究[J]. 岩土力学, 2004, 25(5): 798.
LIU Mengcheng, HUANG Xiaoming, GAO Yufeng. Research on strength-deformation characteristics and nonlinear elastic model of rockfills [J]. Rock and Soil Mechanics, 2004, 25(5): 798.
- [12] 刘萌成, 高玉峰, 刘汉龙, 等. 粗粒料大三轴试验研究进展[J]. 岩土力学, 2002, 23(2): 217.
LIU Mengcheng, GAO Yufeng, LIU Hanlong, et al. Development of study on a large scale triaxial test of coarse-grained materials [J]. Rock and Soil Mechanics, 2002, 23(2): 217.
- [13] 俞茂宏, 胥月稳, 范文, 等. 20 世纪岩石强度理论的发展——纪念 Mohr-Coulomb 强度理论 100 周年[J]. 岩石力学与工程学报, 2000, 19(5): 545.
YU Maohong, ZAN Yuewen, FAN Wen, et al. Advances in strength theory of rock in 20 century——100 years in memory of the Mohr-Coulomb strength theory [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2000, 19(5): 545.
- [14] 俞茂宏, 张永强, 杨松岩. 统一强度理论的又一重要推广[J]. 西安交通大学学报, 1998, 32(12): 108.
YU Maohong, ZHANG Yongqiang, YANG Songyan. Another important generalization of the unified strength theory [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 1998, 32(12): 108.
- [15] 俞茂宏. 岩土类材料的统一强度理论及其应用[J]. 岩土工程学报, 1994, 16(2): 1.
YU Maohong. Unified strength theory for geomaterials and its applications [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1994, 16(2): 1.
- [16] 俞茂宏. 双剪理论及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 1998.
YU Maohong. Twin shear theory and its applications [M]. Beijing: Science Press, 1998.
- [17] 李杭州, 廖红建, 冯夏庭, 等. 基于统一强度理论分析不连续面对岩体强度的影响[J]. 岩土力学, 2006, 27(11): 1997.
LI Hangzhou, LIAO Hongjian, FENG Xiating, et al. Analysis of influence of discontinuous plane on strength of rock mass based on unified strength theory [J]. Rock and Soil Mechanics, 2006, 27(11): 1997.
- [18] 李杭州, 廖红建. 复杂应力状态下岩土材料非线性本构模型研究[J]. 应用力学学报, 2006, 23(2): 318.
LI Hangzhou, LIAO Hongjian. Non-linear constitutive model for geomaterials under complicated stress state [J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2006, 23(2): 318.
- [19] 孔德志, 朱俊高. 邓肯-张模型几种改进方法的比较[J]. 岩土力学, 2004, 25(6): 971.
KONG Dezhi, ZHU Jungao. Comparison of several methods for improving Duncan-Chang model [J]. Rock and Soil Mechanics, 2004, 25(6): 971.
- [20] 李广信. 关于 Duncan 双曲线模型参数确定的若干错误做法[J]. 岩土工程学报, 1998, 20(5): 116.
LI Guangxin. Some mistakes in determination of the parameters of Duncan-Chang model [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1998, 20(5): 116.