

# 基于 IHB 的汽车非线性悬架系统定量研究

盛 云<sup>1</sup> 吴光强<sup>1,2</sup>

(1. 同济大学 汽车学院, 上海 201804; 2. 东京大学 生产技术研究所, 东京 153-8505)

**摘要:** 分析了汽车悬架系统和轮胎的非线性弹簧力和阻尼力,建立了二自由度汽车非线性垂向振动系统的动力学模型. 结合增量谐波平衡方法(incremental harmonic balance method, IHB),对该系统的动力学行为进行定量研究. 推导其增量谐波平衡过程,研究增量谐波平衡法的迭代计算过程,采用几个不同的谐波次数,计算系统的近似周期解,确定周期解的稳定性;同时,以路面激励圆频率为参数进行了跟踪计算,得到系统主共振时的幅频响应特性. 近似解的计算结果与数值计算结果的对比表明,增量谐波平衡方法的精度可灵活控制,且收敛速度快,结果可靠,是汽车强非线性动力学行为研究的有效方法.

**关键词:** 定量研究; 非线性系统; 增量谐波平衡法; 近似周期解; 稳定性

**中图分类号:** U 270.1<sup>+</sup>1

**文献标识码:** A

## Quantitative Study of Automotive Nonlinear Suspension System Based on Incremental Harmonic Balance Method

SHENG Yun<sup>1</sup>, WU Guangqiang<sup>1,2</sup>

(1. College of Automotive Studies, Tongji University, Shanghai 201804, China; 2. Institute of Industrial Science, the University of Tokyo, Tokyo 153-8505, Japan)

**Abstract:** Based on an analysis of nonlinear spring forces and damping forces for automotive suspension and tire, a nonlinear dynamic model of automobile heave vibration system with two degrees of freedom (DOF) was built. Then, an incremental harmonic balance method (IHB) was adopted to quantitatively study the system. The process of IHB was derived, and the iterative process was studied. Meanwhile, the steady periodic solution of automobile nonlinear system was obtained with some harmonic numbers and stability of the periodic solution was studied as well. Based on the tracing

calculation with the circular frequency of road excitation as parameter, the amplitude-frequency response characteristic of the system at the primary resonance was obtained. The numerical simulation of the approximate periodic solution by the IHB was compared with the numerical method. Results show that the IHB is an effective way to analyze both weak and strong nonlinear dynamics in engineering practice.

**Key words:** quantitative study; nonlinear system; incremental harmonic balance method; approximate periodic solution; stability

汽车的振动是影响其平顺性、操纵稳定性和零部件疲劳寿命的重要因素. 因此,研究汽车的振动并将其控制在最低水平是十分迫切的任务之一.

作为一种工业产品的高度集成,汽车中的非线性无所不在. 对于汽车垂向振动系统,悬架系统、轮胎等的非线性的影响非常突出. 悬架弹簧在变形较大时会出现非线性特性,阻尼的压缩阻力与复原阻力一般并不相同,压缩、拉伸速度不同时,阻尼力也有较大变化. 轮胎的非线性特征对汽车的平顺性、行驶稳定性及转向性能都有着重大影响. 此外,汽车在行驶过程中还会有许多不确定因素,其非线性因素在一定的载荷和频率域内影响十分突出<sup>[1-2]</sup>.

目前,对于汽车非线性系统的研究,多以数值仿真为主,即采用数值积分方法,计算系统的响应,从而分析系统中存在的分岔、混沌现象<sup>[3-6]</sup>;而在汽车非线性系统的定量研究方面,大多基于摄动法、多尺度法等传统的解析方法开展<sup>[7-9]</sup>,其共同特点是引入小参数  $\epsilon$ ,将原系统处理为弱非线性系统再研究.

然而,汽车系统作为一个复杂的强非线性系统,经典的摄动法等定量分析方法将不再适用. 本文即基于增量谐波平衡方法<sup>[10]</sup>,对汽车非线性系统进行

收稿日期: 2009-12-01

基金项目: 国家“八六三”高技术研究发展计划(2007AA04Z132); 高等学校创新引智计划资助项目(B08019)

第一作者: 盛云(1982—),男,博士后,主要研究方向为汽车非线性动力学及其控制. E-mail: 777shengyun@tongji.edu.cn

通讯作者: 吴光强(1965—),男,工学博士,教授,博士生导师,东京大学生产技术研究所客员教授,主要研究方向为汽车先进设计(虚拟设计、协同设计)与仿真,汽车多体系统动力学与非线性控制. E-mail: wuguangqiang@tongji.edu.cn

定量研究,计算其近似周期解,并确定周期解的稳定性,同时以外激励圆频率为参数进行了跟踪计算,得到系统的幅频特性曲线.

## 1 汽车非线性垂向振动系统建模

简化的二自由度 1/4 汽车非线性垂向振动系统<sup>[11]</sup>如图 1 所示.其中:  $m_1$  为簧上质量;  $m_2$  为簧下质量;  $f_s$  为悬架非线性弹簧力;  $f_d$  为悬架非线性阻尼力;  $f_{ts}$  为轮胎非线性弹簧力;  $f_{td}$  为轮胎阻尼力;  $z_1$  为簧上质量位移;  $z_2$  为簧下质量位移;  $z_0$  为路面激励.

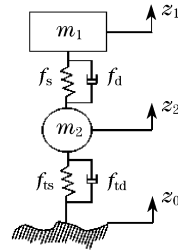


图 1 二自由度汽车非线性垂向振动系统模型

Fig.1 Automotive nonlinear heave vibration system with two

建立图 1 所示系统的运动微分方程,即

$$\begin{cases} m_1 \ddot{z}_1 + f_s + f_d = 0 \\ m_2 \ddot{z}_2 - f_s - f_d + f_{ts} + f_{td} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

悬架非线性弹簧力和阻尼力采用文献[2]中得到的非线性模型,为

$$f_s = k_1 z_s + k_2 z_s^2 + k_3 z_s^3 \quad (2)$$

$$f_d = c_1 \dot{z}_s + c_2 \dot{z}_s^2 \quad (3)$$

式中:  $z_s$  为悬架的动挠度,  $z_s = z_1 - z_2$ ;  $k_1, k_2$  和  $k_3$  为非线性弹簧力的拟合系数;  $c_1$  和  $c_2$  为非线性阻尼力的拟合系数,均由试验数据拟合所得.

对于轮胎的非线性,有学者<sup>[12]</sup>通过动态条件下轮胎弹性力和阻尼力变化试验,将轮胎的非线性弹簧力和阻尼力表示为

$$f_{ts} = k_{t1} z_d + k_{t2} z_d^2 \quad (4)$$

$$f_{td} = c_t \dot{z}_d \quad (5)$$

式中:  $z_d$  为轮胎变形,  $z_d = z_2 - z_0$ ;  $k_{t1}$  和  $k_{t2}$  为轮胎非线性弹簧力的拟合系数;  $c_t$  为阻尼系数.

将式(2)~(5)代入式(1)可得

$$\begin{cases} m_1 \ddot{z}_1 + k_1(z_1 - z_2) + k_2(z_1 - z_2)^2 + \\ k_3(z_1 - z_2)^3 + c_1(\dot{z}_1 - \dot{z}_2) + c_2(\dot{z}_1 - \dot{z}_2)^2 = 0 \\ m_2 \ddot{z}_2 - k_1(z_1 - z_2) - k_2(z_1 - z_2)^2 - \\ k_3(z_1 - z_2)^3 - c_1(\dot{z}_1 - \dot{z}_2) - c_2(\dot{z}_1 - \dot{z}_2)^2 + \\ k_{t1}(z_2 - z_0) + k_{t2}(z_2 - z_0)^2 + c_t(\dot{z}_2 - \dot{z}_0) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

对式(6)进行坐标变换,即令

$$\begin{cases} x = z_1 \\ y = z_1 - z_2 \end{cases} \quad (7)$$

将式(7)代入式(6),展开并写成矩阵形式

$$\bar{M}\ddot{\mathbf{X}} + (\bar{\mathbf{C}}^{(1)} + \bar{\mathbf{C}}^{(2)})\dot{\mathbf{X}} + (\bar{\mathbf{K}}^{(1)} + \bar{\mathbf{K}}^{(2)} + \bar{\mathbf{K}}^{(3)})\mathbf{X} + \bar{\mathbf{K}}^{(4)} = \bar{\mathbf{P}}^{(1)} \quad (8)$$

$$\text{式中: } \mathbf{X} = [x \ y]^T; \bar{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ m_2 & -m_2 \end{bmatrix}; \bar{\mathbf{C}}^{(1)} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & c_1 \\ c_t & -(c_1 + c_t) \end{bmatrix}; \bar{\mathbf{C}}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & c_2 \dot{y} \\ 0 & -c_2 \dot{y} \end{bmatrix}; \bar{\mathbf{K}}^{(1)} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & k_1 \\ k_{t1} - 2k_{t2}z_0 & -k_1 - k_{t1} + 2k_{t2}z_0 \end{bmatrix}; \bar{\mathbf{K}}^{(2)} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & k_2 y \\ k_{t2}x & (-k_2 + k_{t2})y \end{bmatrix}; \bar{\mathbf{K}}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & k_3 y^2 \\ 0 & -k_3 y^2 \end{bmatrix};$$

$$\bar{\mathbf{K}}^{(4)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2k_{t2}xy \end{bmatrix}; \bar{\mathbf{P}}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ k_{t1}z_0 - k_{t2}z_0^2 + c_t \dot{z}_0 \end{bmatrix}.$$

假设路面激励为正弦激励,即

$$z_0 = B \sin \Omega t \quad (9)$$

式中:  $B$  为激励幅值(m);  $\Omega$  为圆频率( $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ).

## 2 增量谐波平衡过程

首先令

$$\tau = \Omega t, \quad \mathbf{X}' = \frac{d\mathbf{X}}{d\tau}, \quad \mathbf{X}'' = \frac{d^2\mathbf{X}}{d\tau^2} \quad (10)$$

则有如下的微分算子

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}} = \frac{d\mathbf{X}}{dt} = \frac{d\mathbf{X}}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \Omega \frac{d\mathbf{X}}{d\tau} = \Omega \mathbf{X}' \\ \ddot{\mathbf{X}} = \frac{d^2\mathbf{X}}{dt^2} = \frac{d^2\mathbf{X}}{d\tau^2} \frac{d^2\tau}{dt^2} = \Omega^2 \frac{d^2\mathbf{X}}{d\tau^2} = \Omega^2 \mathbf{X}'' \end{cases} \quad (11)$$

将式(11)代入式(8)可得

$$\Omega^2 \bar{\mathbf{M}}\mathbf{X}'' + \Omega(\bar{\mathbf{C}}^{(1)} + \Omega \bar{\mathbf{C}}^{(21)})\mathbf{X}' + (\bar{\mathbf{K}}^{(11)} + \bar{\mathbf{K}}^{(2)} + \bar{\mathbf{K}}^{(3)})\mathbf{X} + \bar{\mathbf{K}}^{(4)} = \bar{\mathbf{P}}^{(11)} \quad (12)$$

$$\bar{\mathbf{C}}^{(21)} = \begin{bmatrix} 0 & c_2 y' \\ 0 & -c_2 y' \end{bmatrix};$$

$$\bar{\mathbf{K}}^{(11)} = \begin{bmatrix} 0 & k_1 \\ k_{t1} - 2k_{t2}B \sin \tau & -k_1 - k_{t1} + 2k_{t2}B \sin \tau \end{bmatrix};$$

$$\bar{\mathbf{K}}^{(4)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2k_{t2}xy \end{bmatrix};$$

$$\bar{\mathbf{P}}^{(11)} = \begin{bmatrix} 0 \\ k_{t1} B \sin \tau - k_{t2} B^2 \sin^2 \tau + c_t B \Omega \cos \tau \end{bmatrix}.$$

## 2.1 增量过程

设  $\mathbf{X}_0$  和  $\Omega_0$  为系统(12)在某一时刻的解,则其邻近状态可以用增量表示如下

$$\begin{cases} \mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + \Delta\mathbf{X} \\ \Omega = \Omega_0 + \Delta\Omega \end{cases} \quad (13)$$

式中:  $\mathbf{X}_0 = [x_0 \ y_0]^T$ ;  $\Delta\mathbf{X} = [\Delta x \ \Delta y]^T$ .

将式(13)代入式(12),展开并略去其中的高阶小量,可得

$$\begin{aligned} \Omega_0^2 \bar{\mathbf{M}} \Delta \mathbf{X}'' + \Omega_0 \bar{\mathbf{C}}_1 \Delta \mathbf{X}' + \bar{\mathbf{K}}_1 \Delta \mathbf{X} = \\ \bar{\mathbf{R}} - (2\Omega_0 \bar{\mathbf{M}} \mathbf{X}_0'' + \bar{\mathbf{C}}_1 \mathbf{X}_0' + \bar{\mathbf{P}}^{(22)}) \Delta \Omega \end{aligned} \quad (14)$$

式中,  $\bar{\mathbf{R}}$  为系统的不平衡力,防止增量过程偏离实际解.

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{R}} = \bar{\mathbf{P}} - (\Omega_0^2 \bar{\mathbf{M}} \mathbf{X}_0'' + \Omega_0 \bar{\mathbf{C}}_2 \mathbf{X}_0' + \bar{\mathbf{K}}_2 \mathbf{X}_0); \bar{\mathbf{C}}_1 = \bar{\mathbf{C}}^{(1)} \\ + 2\Omega_0 \bar{\mathbf{C}}^{(22)}; \bar{\mathbf{C}}_2 = \bar{\mathbf{C}}^{(1)} + \Omega_0 \bar{\mathbf{C}}^{(22)}; \bar{\mathbf{K}}_1 = \bar{\mathbf{K}}^{(11)} + 2\bar{\mathbf{K}}^{(22)} \\ + 3\bar{\mathbf{K}}^{(32)} + \bar{\mathbf{K}}^{(41)}; \bar{\mathbf{K}}_2 = \bar{\mathbf{K}}^{(11)} + \bar{\mathbf{K}}^{(22)} + \bar{\mathbf{K}}^{(32)}; \bar{\mathbf{P}} = \bar{\mathbf{P}}^{(21)} - \\ \bar{\mathbf{K}}^{(42)}; \bar{\mathbf{K}}^{(22)} = \begin{bmatrix} 0 & k_2 y_0 \\ k_{t2} x_0 & (-k_2 + k_{t2}) y_0 \end{bmatrix}; \\ \bar{\mathbf{K}}^{(32)} = \begin{bmatrix} 0 & k_3 y_0^2 \\ 0 & -k_3 y_0^2 \end{bmatrix}; \bar{\mathbf{K}}^{(41)} = -2k_{t2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ y_0 & x_0 \end{bmatrix}; \\ \bar{\mathbf{K}}^{(42)} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2k_{t2} x_0 y_0 \end{bmatrix}; \bar{\mathbf{C}}^{(22)} = \begin{bmatrix} 0 & c_1 y_0' \\ 0 & -c_1 y_0' \end{bmatrix}; \\ \bar{\mathbf{P}}^{(21)} = \begin{bmatrix} 0 \\ k_{t1} B \sin \tau - k_{t2} B^2 \sin^2 \tau + c_{t1} \Omega_0 B \cos \tau \end{bmatrix}; \\ \bar{\mathbf{P}}^{(22)} = \begin{bmatrix} 0 \\ c_{t1} B \cos \tau \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

## 2.2 谐波平衡过程

将精确解  $\mathbf{X}_0$  和增量  $\Delta\mathbf{X}$  傅立叶展开可得

$$\begin{cases} x_{j0} = a_{j0} + \sum_{k=1}^N (a_{jk} \cos k\tau + b_{jk} \sin k\tau) \\ \Delta x_j = \Delta a_{j0} + \sum_{k=1}^N (\Delta a_{jk} \cos k\tau + \Delta b_{jk} \sin k\tau) \\ j = 1, 2 \quad k = 1, \dots, N \end{cases} \quad (15)$$

设

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_s = \begin{bmatrix} 1 & \cos \tau & \cos 2\tau & \dots & \cos N\tau \\ \sin \tau & \sin 2\tau & \dots & \sin N\tau \end{bmatrix} \\ \mathbf{A}_j = \begin{bmatrix} a_{j0} & a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jN} \\ b_{j1} & b_{j2} & \dots & b_{jN} \end{bmatrix}^T \\ \Delta \mathbf{A}_j = \begin{bmatrix} \Delta a_{j0} & \Delta a_{j1} & \Delta a_{j2} & \dots & \Delta a_{jN} \\ \Delta b_{j1} & \Delta b_{j2} & \dots & \Delta b_{jN} \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (16)$$

令

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_s & 0 \\ 0 & \mathbf{C}_s \end{bmatrix} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \Delta \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{A}_1 \\ \Delta \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \quad (17)$$

则精确解  $\mathbf{X}_0$  及其增量  $\Delta\mathbf{X}$  可表示为

$$\begin{cases} \mathbf{X}_0 = \mathbf{S} \mathbf{A} \\ \Delta \mathbf{X} = \mathbf{S} \Delta \mathbf{A} \end{cases} \quad (18)$$

将式(18)代入式(14),并应用 Galerkin 平均过程,得

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \delta(\Delta \mathbf{X})^T [\Omega_0^2 \bar{\mathbf{M}} \Delta \mathbf{X}'' + \Omega_0 \bar{\mathbf{C}}_1 \Delta \mathbf{X}' + \bar{\mathbf{K}}_1 \Delta \mathbf{X}] d\tau = \\ \int_0^{2\pi} \delta(\Delta \mathbf{X})^T [\bar{\mathbf{R}} - (2\Omega_0 \bar{\mathbf{M}} \mathbf{X}_0'' + \bar{\mathbf{C}}_1 \mathbf{X}_0' + \bar{\mathbf{P}}^{(22)}) \Delta \Omega] d\tau \end{aligned} \quad (19)$$

积分式(19)并展开,即可得到如下以增量  $\Delta\mathbf{A}$  和  $\Delta\Omega$  为未知量的线性方程组

$$\mathbf{K}_{mc} \Delta \mathbf{A} = \mathbf{R} - \mathbf{R}_{mc} \Delta \Omega \quad (20)$$

其中,  $\mathbf{K}_{mc} = \Omega_0^2 \bar{\mathbf{M}} + \Omega_0 \bar{\mathbf{C}}_1 + \bar{\mathbf{K}}_1$ ;  $\mathbf{R} = \bar{\mathbf{P}} - (\Omega_0^2 \bar{\mathbf{M}} + \Omega_0 \bar{\mathbf{C}}_2 + \bar{\mathbf{K}}_2) \mathbf{A}$ ;  $\mathbf{R}_{mc} = (2\Omega_0 \bar{\mathbf{M}} + \bar{\mathbf{C}}_1 + \bar{\mathbf{P}}_2) \mathbf{A}$ ;  $\mathbf{M} = \int_0^{2\pi} \mathbf{S}^T \bar{\mathbf{M}} \mathbf{S} d\tau$ ;  $\mathbf{C}_1 = \int_0^{2\pi} \mathbf{S}^T \bar{\mathbf{C}}_1 \mathbf{S} d\tau$ ;  $\mathbf{C}_2 = \int_0^{2\pi} \mathbf{S}^T \bar{\mathbf{C}}_2 \mathbf{S} d\tau$ ;  $\mathbf{K}_1 = \int_0^{2\pi} \mathbf{S}^T \bar{\mathbf{K}}_1 \mathbf{S} d\tau$ ;  $\mathbf{K}_2 = \int_0^{2\pi} \mathbf{S}^T \bar{\mathbf{K}}_2 \mathbf{S} d\tau$ ;  $\mathbf{P} = \int_0^{2\pi} \mathbf{S}^T \bar{\mathbf{P}} d\tau$ ;  $\mathbf{P}_2 = \int_0^{2\pi} \mathbf{S}^T \bar{\mathbf{P}}^{(22)} d\tau$ .

式(20)即为应用增量谐波平衡法推导得到的以增量  $\Delta\mathbf{A}$  和  $\Delta\Omega$  为未知量的二自由度汽车非线性垂向振动系统近似周期解的迭代计算公式,如果取谐波次数为  $N$ ,则它是由  $2 \times (2N + 1)$  个方程组成的线性方程组.

## 2.3 迭代计算流程

以增量  $\Delta\Omega$  为控制增量,则在迭代过程中,  $\Omega$  保持为常量,即  $\Delta\Omega = 0$ ,其他的增量通过式(21)求解,即

$$\mathbf{K}_{mc} \Delta \mathbf{A} = \mathbf{R} \quad (21)$$

重复上述的迭代直到不平衡力  $\mathbf{R}$  的模达到足够小为止,这时即可得到一个稳态解,此过程称为迭代步骤.

在迭代步骤完成后,给变量  $\Omega$  增加一个增量  $\Delta\Omega$ ,于是在新的  $\Omega$  值下进行新的迭代,直到得到另一个近似周期解.此过程称为增量步骤.整个求解过程即在增量步骤和迭代步骤交替下完成的.迭代求解的流程如图2所示.

## 3 仿真结果

### 3.1 近似解计算结果

系统中各参数的取值如表1所示.

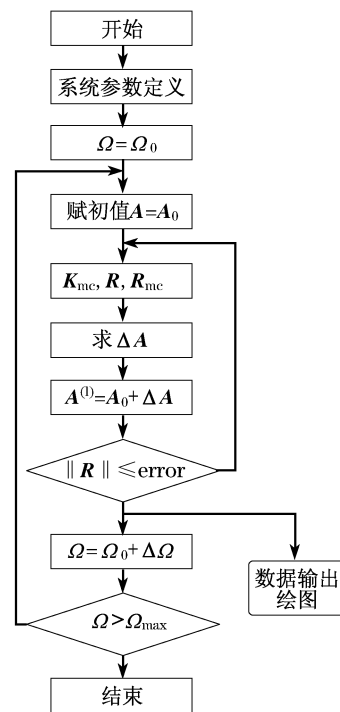


图 2 迭代求解流程图

Fig. 2 Flow chart of iterative solution

表 1 系统参数表

Tab. 1 Parameters of automotive system

参数名称	参数取值
簧上质量 $m_1$	240 kg
簧下质量 $m_2$	49 kg
悬架非线性弹簧力拟合系数 $k_1$	$12\,394\text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$
悬架非线性弹簧力拟合系数 $k_2$	$-73\,696\text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$
悬架非线性弹簧力拟合系数 $k_3$	$3\,170\,400\text{ N} \cdot \text{m}^{-3}$
悬架非线性阻尼力拟合系数 $c_1$	$1\,385.4\text{ N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$
悬架非线性阻尼力拟合系数 $c_2$	$524.28\text{ N} \cdot \text{s}^2 \cdot \text{m}^{-2}$
轮胎非线性弹簧力拟合系数 $k_{t1}$	$98\,000\text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$
轮胎非线性弹簧力拟合系数 $k_{t2}$	$1\,850\,000\text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$
轮胎阻尼系数 $c_t$	$3012\text{ N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$

为对求解结果进行检验比较,分别取 2 次谐波和 4 次谐波,计算得到振幅向量结果分别为

$$A_2 = \begin{bmatrix} 7.521\text{e} - 4 & -0.03366 & -5.241\text{e} - 4 \\ 0.010\,29 & -4.298\text{e} - 4 & 1.079\text{e} - 3 \\ -0.02789 & -5.655\text{e} - 5 & -0.010\,52 \\ 4.854\text{e} - 5 \end{bmatrix}^T$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 7.505\text{e} - 4 & -0.033\,62 & -5.191\text{e} - 4 \\ -5.519\text{e} - 5 & -1.844\text{e} - 6 & 0.010\,29 \\ -4.212\text{e} - 4 & -9.549\text{e} - 5 & 5.037\text{e} - 6 \\ 1.077\text{e} - 3 & -0.027\,85 & -7.082\text{e} - 5 \\ -9.514\text{e} - 5 & -1.359\text{e} - 5 & -0.010\,52 \\ 6.717\text{e} - 5 & 1.223\text{e} - 4 & 1.401\text{e} - 5 \end{bmatrix}^T$$

从式(18)可得系统的近似周期解的解析表达. 根据计算系统的相图,同时采用 4 阶 Runge-Kutta 法

对系统进行数值计算,计算系统的相图,将各次谐波的结果与数值计算的结果进行比较,如图 3 所示.

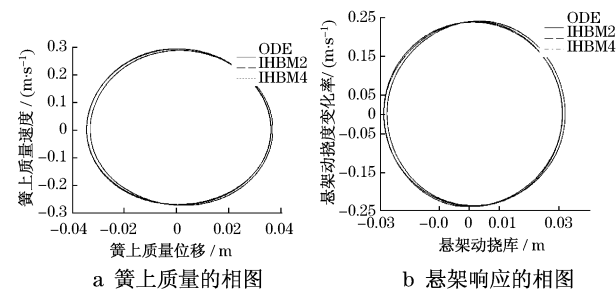


图 3 IHBM 与数值计算的相图结果比较

Fig. 3 Comparison of the phase diagrams between IHBM and numerical method

从图中可以看出, IHBM 结果与数值计算结果之间存在较小的偏差,而悬架动挠度响应的结果对谐波次数的依赖较小,不同谐波次数结果与数值计算结果相差不大.

同时,计算出各次谐波结果的时间历程曲线,与数值计算结果进行比较,如图 4 所示. 从图中可以看出,除了数值计算初始的瞬态解外, IHBM 结果与数值计算结果几乎完全重合.

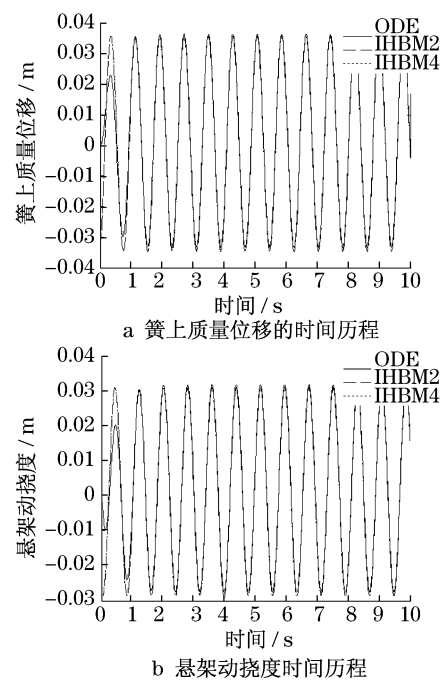


图 4 IHBM 与数值计算的时间历程结果比较

Fig. 4 Comparison of the time histories between IHBM and numerical method

为分析谐波次数对近似周期解结果的影响,分别取谐波次数为 2、3、4、5、6、7,计算 IHBM 结果与数值计算结果间的 RMS(root mean square)误差,结果

如图5所示.可以看出,除了3次谐波结果外,其余均与数值计算结果较为接近,且RMS误差小于5%,此外,当谐波次数大于3时,近似解的RMS误差与谐波次数关系不大.为提高计算效率,取4次谐波即可得到较好的近似解结果.

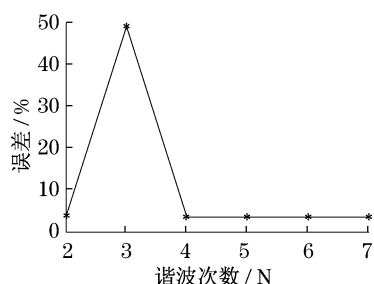


图5 谐波次数与RMS误差间的关系

Fig.5 Relation between the harmonic number and RMS error

### 3.2 周期解幅频曲线

应用图2所示的迭代求解过程,以路面激励圆频率 $\Omega$ 为可变参数,其值从1递增至30,计算得到系统的幅频曲线如图6所示.

从图中可以看出,随着激励圆频率 $\Omega$ 的增加,簧上质量和悬架响应的幅值均有所增加,当 $\Omega = 7$ 时,簧上质量运动的幅值达到最大,当 $\Omega = 5$ 时,悬架动挠度的幅值达到最大;此后,随着 $\Omega$ 的增加,簧上质量响应的幅值逐渐减少,而悬架动挠度的幅值在 $\Omega > 12$ 后逐渐趋于常值.

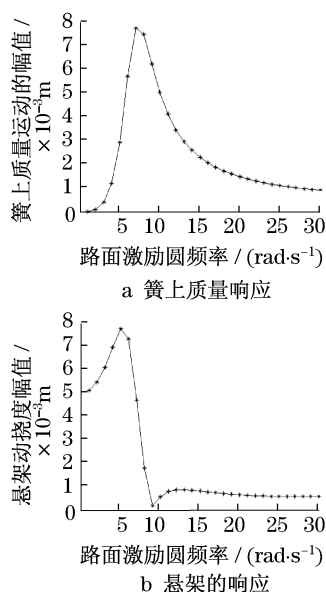


图6 系统周期解的幅频曲线

Fig.6 Amplitude-frequency curves of periodic solutions

## 4 周期解稳定性分析

设 $\mathbf{X}_0$ 是通过增量谐波平衡法求得的周期解,由于某种原因产生了偏离量 $\Delta\mathbf{X}$ ,即

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + \Delta\mathbf{X} \quad (22)$$

将式(22)代入式(12),展开并略去高阶小量,并注意到 $\mathbf{X}_0$ 满足式(12),最后可以得到以 $\Delta\mathbf{X}$ 为未知量的方程

$$\Omega^2 \bar{\mathbf{M}} \Delta\mathbf{X}'' + \Omega \bar{\mathbf{C}}_1 \Delta\mathbf{X}' + \bar{\mathbf{K}}_1 \Delta\mathbf{X} = 0 \quad (23)$$

式(23)称为摄动方程,即从已知的平衡位置摄动而得到的方程.得到摄动方程后,原方程稳态周期解的稳定性问题就对应于具有周期系数 $\bar{\mathbf{K}}_1$ 的线性常微分方程(23)解的稳定性.将式(23)写为

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{Q}(\tau)\mathbf{Y} \quad (24)$$

式中: $\mathbf{Y} = [\Delta\mathbf{X} \quad \Delta\mathbf{X}']^T$ ,  $\Delta\mathbf{X} = [\Delta u \quad \Delta v]^T$ ;  $\mathbf{Q}(\tau) =$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{Q}_{21} & \mathbf{Q}_{22} \end{bmatrix}; \mathbf{Q}_{21} = -\frac{1}{\Omega^2} \bar{\mathbf{M}}^{-1} \bar{\mathbf{K}}_1; \mathbf{Q}_{22} = -\frac{1}{\Omega} \bar{\mathbf{M}}^{-1} \bar{\mathbf{C}}_1.$$

式中: $\mathbf{0}$ 表示 $2 \times 2$ 零矩阵; $\mathbf{I}$ 表示 $2 \times 2$ 单位矩阵.

由于 $\mathbf{X}_0$ 是 $\tau$ 的周期函数,周期为 $T = 2\pi\Omega$ ,因此, $\mathbf{Q}_{21}$ 中的每一元素也是具有与 $\mathbf{X}_0$ 相同周期的周期函数.对于方程(24),存在如下的基础解矩阵

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} & y_{14} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} & y_{24} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} & y_{34} \\ y_{41} & y_{42} & y_{43} & y_{44} \end{bmatrix} \quad (25)$$

显然,矩阵 $\mathbf{Y}$ 满足矩阵方程

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{Q}(\tau)\mathbf{Y} \quad (26)$$

由于 $\mathbf{Q}(\tau + T) = \mathbf{Q}(\tau)$ ,所以 $\mathbf{Y}(\tau + T)$ 也是基础解矩阵,可以表示为

$$\mathbf{Y}(\tau + T) = \mathbf{T}_M \mathbf{Y}(\tau) \quad (27)$$

式中: $\mathbf{T}_M$ 为非奇异的常数矩阵,称为变换矩阵(Transformation Matrix).根据Floquet理论,系统的稳定性准则与矩阵 $\mathbf{T}_M$ 的特征值有关.如果 $\mathbf{T}_M$ 的所有特征值的模都小于1,则系统的运动是有界的,因而周期解是稳定的;否则,系统的运动是无界的,解也不稳定<sup>[10]</sup>.

将每一个周期 $T$ 等分成 $N$ 份,其中,第 $k$ 份 $\Delta_k = \tau_k - \tau_{k-1}$ ,在第 $k$ 份时间间隔中,周期系数矩阵 $\mathbf{Q}(\tau)$ 以常系数矩阵 $\mathbf{Q}_k$ 代替

$$\mathbf{Q}_k = \frac{1}{\Delta_k} \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \mathbf{Q}(\zeta) d\zeta \quad (28)$$

因此,变换矩阵 $\mathbf{T}_M$ 可表示为<sup>[10]</sup>

$$\mathbf{T}_M = \prod_{i=1}^N \left[ \mathbf{I} + \sum_{j=1}^M \frac{(\Delta_i \mathbf{Q}_i)^j}{j!} \right] \quad (29)$$

式中:  $M$  为指数矩阵展开的矩阵多项式的项数;  $\mathbf{I}$  为单位矩阵.

对得到的近似周期解进行稳定性判定. 计算得到其变换矩阵  $\mathbf{T}_M$

$$\mathbf{T}_M = \begin{bmatrix} 0.244\ 9 & -0.027\ 60 & 0.762\ 80 & -0.035\ 57 \\ 0.184\ 6 & -0.023\ 12 & 0.580\ 20 & -0.027\ 32 \\ -0.888\ 3 & 0.036\ 37 & -0.028\ 32 & 0.000\ 708\ 9 \\ -0.684\ 4 & 0.036\ 56 & -0.026\ 65 & 0.001\ 137 \end{bmatrix}$$

其特征值为

$$\begin{cases} \lambda_1 = \bar{\lambda}_2 = 0.098\ 25 + 0.785\ 7i \\ \lambda_3 = \bar{\lambda}_4 = -9.440e-4 + 7.549e-4i \end{cases}$$

可得特征值的模

$$\begin{cases} |\lambda_{1,2}| = 0.791\ 800 \\ |\lambda_{3,4}| = 0.001\ 209 \end{cases}$$

显然, 变换矩阵  $\mathbf{T}_M$  特征值的模均小于 1. 因此, 得出结论, 当  $\Omega = 8$  时, 系统的近似周期解稳定.

## 5 结论

以汽车非线性悬架系统为研究对象, 基于增量谐波平衡方法对其进行定量研究, 结论如下:

(1) 分析了汽车悬架系统和轮胎的非线性弹簧力和阻尼力, 建立了二自由度汽车非线性垂向振动系统的动力学模型;

(2) 推导了汽车非线性系统的增量谐波平衡过程, 研究了迭代计算过程, 分别采用 2 次、4 次谐波, 计算得到了系统的近似周期解; 和数值计算结果的比较发现, IHBM 具有较高精度, 收敛速度快, 能得到系统近似周期解的解析表达; 采用 4 次谐波即可较精确地得到汽车非线性系统的近似周期解;

(3) 以路面激励的圆频率为参数进行跟踪计算, 得到了系统主共振时的幅频响应曲线;

(4) 根据 Floquet 理论, 计算了系统近似周期解的变换矩阵, 通过变换矩阵的特征值计算, 发现系统的近似周期解稳定.

## 参考文献:

[1] Kurimoto M, Yoshimura T. Active suspension of passenger cars

- using sliding mode controllers (based on reduced models)[J]. International Journal of Vehicle Design, 1998, 19(4): 402.
- [2] Kim C, Ro P I. A sliding mode controller for vehicle active suspension systems with non-linearities [J]. Pro Int Mech Engrs, 1998, 212(D): 79.
- [3] Borowiec M, Litak G, Friswell M I. Nonlinear response of an oscillator with a magneto-rheological damper subjected to external forcing[J]. Applied Mechanics and Materials, 2006, 5/6: 277.
- [4] 谢俊, 郭晨海, 刘军, 等. 非线性悬架动力学数值模拟和性能评价[J]. 江苏大学学报: 自然科学版, 2004, 3(25): 216. XIE Jun, GUO Chenhai, LIU Jun, et al. Performance evaluation and numerical simulation for non-linear dynamic suspension system of vehicle[J]. Journal of Jiangsu University: Natural Science Edition, 2004, 3(25): 216.
- [5] Qin Zhu, Ishitobi M. Chaos and bifurcation in a nonlinear vehicle model[J]. Journal of Sound and Vibration, 2004(275): 1136.
- [6] 盛云, 吴光强. 汽车非线性悬架的混沌研究[J]. 汽车工程, 2008, 30(1): 57. SHENG Yun, WU Guangqiang. A chaos research on vehicle nonlinear suspension system [J]. Automotive Engineering, 2008, 30(1): 57.
- [7] 李韶华, 杨绍普. 采用改进 Bingham 模型的非线性汽车悬架的主共振[J]. 振动与冲击, 2006, 25(4): 109. LI Shaohua, YANG Shaopu. Primary resonance of a nonlinear vehicle suspension system using a modified Bingham model[J]. Journal of Vibration and Shock, 2006, 25(4): 109.
- [8] 孙蓓蓓, 周长峰, 张晓阳, 等. 工程车辆橡胶悬架系统的非线性动力学特性[J]. 东南大学学报, 2007, 37(6): 974. SUN Beibei, ZHOU Changfeng, ZHANG Xiaoyang, et al. Nonlinear dynamic characteristics of rubber suspension of construction vehicle[J]. Journal of Southeast University, 2007, 37(6): 974.
- [9] 卢胜文, 贾启芬, 于雯, 等. 汽车多自由度悬架的非线性振动特性[J]. 应用力学学报, 2005, 22(3): 461. LU Shengwen, JIA Qifen, YU Wen, et al. Nonlinear dynamic characteristics of vehicle suspension system with multi-degrees of freedom[J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2005, 22(3): 461.
- [10] 陈树辉. 强非线性振动系统的定量分析方法[M]. 北京: 科学出版社, 2007. CHEN Shuhui. Quantitative analysis method of strong nonlinear vibration system[M]. Beijing: Science Press, 2007.
- [11] 吴光强. 汽车理论[M]. 北京: 人民交通出版社, 2007. WU Guangqiang. Automotive theory [M]. Beijing: China Communications Press, 2007.
- [12] 裘熙定, 季学武, 王志浩, 等. 轮胎刚度的非线性特性[J]. 吉林工业大学学报, 1994, 24(4): 9. QIU Xiding, JI Xuewu, WANG Zhihao, et al. Study on non-linear characteristics of tire stiffness[J]. Journal of Jilin University of Technology, 1994, 24(4): 9.