文章编号：0253-374X(2011)06-0919-05 DOI:10.3969/j.issn.0253-374x.2011.06.024

# 含双参数的非线性二阶脉冲微分系统的正解

蔡静静

(同济大学 数学系,上海 200092)

**摘要**：研究一类带有双参数的非线性二阶 $m$ 点脉冲微分系统正解的存在性并讨论正解不存在的情况,其中非线性项可有不同性质,系数 $a_1(t)$ 和 $a_2(t)$ 均 $L^p$ 可积.通过构造一个特殊的锥,结合不动点指数理论,得到了参数 $\lambda$ 和 $\mu$ 在不同条件下正解存在性定理,并在 $\lambda$ 很小时得到了正解不存在性定理.

**关键词**：正解；边值问题；不动点指数；锥

**中图分类号**：O 175.8 **文献标识码**：A

## Positive Solutions for Nonlinear Second Order Impulsive Differential Systems with Two Parameters

*CAI Jingjing*

(Department of Mathematics, Tongji University, Shanghai 200092, China)

**Abstract**: The paper presents a study of the existence of positive solutions for a class of nonlinear second order impulsive differential systems with two parameters and the nonexistence of positive solutions, where the nonlinear terms have different properties and their coefficients $a_1(t)$, $a_2(t)$ are $L^p$-integrable. By applying the theory of the fixed point index and constructing a special cone, the existence theorem of positive solutions is proved when parameters $\lambda$ and $\mu$ have different conditions, and the nonexistence theorem of positive solutions is proved while $\lambda$ is sufficiently small.

**Key words**: positive solution; boundary value problem; fixed point index; cone

## 1 引言

本文研究下面二阶 $m$ 点脉冲微分系统正解的存在性

$$\begin{cases} \lambda x'' + a_1(t)f_1(t,x,y) + b_1(t)\cdot g_1(t,x,y) = 0, \quad 0 < t < 1, \\ \mu y'' + a_2(t)f_2(t,x,y) + b_2(t)\cdot g_2(t,x,y) = 0, \quad 0 < t < 1, \\ -\Delta x'\big|_{t=t_k} = I_{1,k}(x(t_k)), \\ -\Delta y'\big|_{t=t_k} = I_{2,k}(y(t_k)), \ k = 1,2,\cdots,n, \\ a_1 x(0) - b_1 x'(0) = \sum_{i=1}^{m-2} p_i^{(1)} x(\xi_i), \\ c_1 x(1) + d_1 x'(1) = \sum_{i=1}^{m-2} q_i^{(1)} x(\xi_i), \\ a_2 y(0) - b_2 y'(0) = \sum_{i=1}^{m-2} p_i^{(2)} y(\xi_i), \\ c_2 y(1) + d_2 y'(1) = \sum_{i=1}^{m-2} q_i^{(2)} y(\xi_i), \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\lambda>0$, $\mu>0$, $a_i>0$, $b_i>0$, $c_i>0$, $d_i>0$, $a_i(t), b_i(t)\in L^p[J]$, $1\leqslant p<+\infty$, $J=[0,1]$, $\rho_i = a_ic_i + b_ic_i + a_id_i>0$, $\xi_j\in J'=(0,1)$, $p_j^{(i)}, q_j^{(i)}\in(0,+\infty)$, $i=1,2$, $j=1,2,\cdots,m-2$, $f_i, g_i\in C(J\times\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^+, \mathbf{R}^+)$, $I_{i,k}\in C(\mathbf{R}^+,\mathbf{R}^+)$.

微分系统(1)是含有脉冲项的多点边值问题,它能模拟许多物理现象,如描述由多个不同性质的部分组成的金属导线横截面的震动情况,而脉冲描述的是物体在某个时刻有突然变化.由于其广泛的背景,这类方程的研究受到广泛重视[1-4].最近,文献[1]利用不动点定理研究了下面的边值问题正解的存在性：

$$\begin{cases} \lambda x'' + g(t)f(t,x) = 0, \quad 0 < t < 1, \\ ax(0) - bx'(0) = \sum_{i=1}^{m-2} a_i x(\xi_i), \\ c\,x(1) + dx'(1) = \sum_{i=1}^{m-2} b_i x(\xi_i), \end{cases} \tag{2}$$

收稿日期:2010-03-02
基金项目:上海市教委科研创新项目(09ZZ33)
作者简介:蔡静静(1983—),女,博士生,主要研究方向为偏微分方程.E-mail:cjjing1983@163.com

其中 $g(t)\in L^p[0,1]$, $f\in C([0,1]\times\mathbf{R}^+,\mathbf{R}^+)$,笔者在条件“$f_0=0, f_\infty=\infty$,或者 $f_0=\infty, f_\infty=0$”下得到问题(2)的正解.其中 $f_0=\lim\limits_{u\to0^+}\frac{f(u)}{u}$, $f_\infty=\lim\limits_{u\to\infty}\frac{f(u)}{u}$.然而不能解决当 $\lambda$ 变化及函数 $x$ 有跳跃时的情况.而本文是在参数 $\lambda$ 及 $\mu$ 变化和函数 $x$ 有多个跳跃点时利用不动点指数理论考察系统(1)正解的存在性.文献[2]得到了下面二阶 $m$ 点边值问题的正解:

$$\begin{cases}-x''(t)=f(t,x(t)), & t\in J,\\ -\Delta x'\big|_{t=t_k}=I_k(x(t_k)), & k=1,2,\cdots,n,\\ x(0)=\sum\limits_{i=1}^{m-2}a_ix(\xi_i), & x(1)=\sum\limits_{i=1}^{m-2}b_ix(\xi_i).\end{cases}\tag{3}$$

其中 $f$ 连续.但实际问题中非线性项有时奇异甚至只是 $L^p$ 可积,此时文献[2]的方法不能解决这类问题.而本文研究的问题(1)中的非线性项有不同性质且其系数 $L^p$ 可积.

本文的主要思想来源于文献[1-2]等,并本质改进和推广了其中的结果,在非线性项有奇异性、函数含有脉冲点及参数可有不同取值范围情况下,不仅研究了正解存在性也讨论了正解不存在情况.

## 2 引理及一些结论

空间 $PC^1[0,1]:=\{u\in C[0,1]: u'(t)$ 在 $t\neq t_i$ 处连续,且 $u'(t_i^+)$ 和 $u'(t_i^-)$ 存在, $u'(t_i)=u'(t_i^-), i=1,2,\cdots,n\}$ 在范数 $\|x\|=\max\{\|x\|_\infty,\|x'\|_\infty\}$ 下为 Banach 空间.定义 $PC^1[0,1]\times PC^1[0,1]$ 中范数 $\|(x,y)\|_2=\|x\|+\|y\|$.本文作以下记号

$$\Delta_i=\begin{vmatrix}-\sum\limits_{j=1}^{m-2}p_j^{(i)}\psi_i(\xi_j) & \rho_i-\sum\limits_{j=1}^{m-2}p_j^{(i)}\phi_i(\xi_j)\\ \rho_i-\sum\limits_{j=1}^{m-2}q_j^{(i)}\psi_i(\xi_j) & -\sum\limits_{j=1}^{m-2}q_j^{(i)}\phi_i(\xi_j)\end{vmatrix}$$

其中 $\psi_i(t)=b_i+a_it$, $\phi_i(t)=c_i+d_i-c_it$, $t\in J$ 是 $x''=0$ 的线性无关解.对 $i=1,2$,令

$$G_i(t,s)=\frac{1}{\rho_i}\begin{cases}\psi_i(s)\phi_i(t), & 0\leqslant s\leqslant t\leqslant1,\\ \psi_i(t)\phi_i(s), & 0\leqslant t\leqslant s\leqslant1,\end{cases}$$

易知 $G_i(t,s)$ 有以下性质:

$$G_i(t,s)>0, 0<t,s<1,$$
$$0\leqslant G_i(t,s)\leqslant G_i(s,s), t,s\in J,$$
$$G_i(t,s)\geqslant\sigma_iG_i(s,s),$$
$$\sigma_i=\min\left\{\frac{b_i+a_i\theta}{a_i+b_i},\frac{d_i+c_i\theta}{c_i+d_i}\right\},$$
$$t\in J_\theta=[\theta,1-\theta], s\in(0,1),$$

其中 $\theta\in\left(0,\min\left\{\frac{1}{2},t_1,1-t_n\right\}\right)$,令 $\sigma=\min\{\sigma_1,\sigma_2\}$,则 $0<\sigma<1$.本文的假设条件如下:

(A1) $\Delta_i<0$, $\rho_i-\sum\limits_{j=1}^{m-2}p_j^{(i)}\phi_i(\xi_j)>0$, $\rho_i-\sum\limits_{i=1}^{m-2}q_j^{(i)}\psi_i(\xi_j)>0$.

(A2) $f_i,g_i\in C(J\times\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^+,\mathbf{R}^+)$, $I_{i,k}\in C(\mathbf{R}^+,\mathbf{R}^+)$, $a_i(t),b_i(t)$ 在 $J$ 的任何子区间上不恒为0, $i=1,2$, $k=1,2,\cdots,n$. $a_i(t),b_i(t)\in L^p[J,\mathbf{R}^+]$.

本文对 $u,v\in\mathbf{R}$, $i=1,2$ 定义

$$f_{i,\mu}=\liminf_{|u|+|v|\to\mu}\min_{t\in[t_1,t_n]}\frac{f_i(t,u,v)}{|u|+|v|},$$
$$I_{i,\mu}(k)=\liminf_{|u|\to\mu}\min_{t\in[t_1,t_n]}\frac{I_{i,k}(u)}{|u|}$$
$$f_i^\mu=\limsup_{|u|+|v|\to\mu}\max_{t\in[0,1]}\frac{f_i(t,u,v)}{|u|+|v|},$$
$$I_i^\mu(k)=\limsup_{|u|\to\mu}\max_{t\in[0,1]}\frac{I_{i,k}(u)}{|u|}.$$

其中 $\mu=0$ 或者 $\mu=+\infty$.用 $g$ 代替以上的 $f$ 得到 $g_{i,\mu}$ 和 $g_i^\mu$ 的定义.记 $F_i(t,x,y)=a_i(t)f_i(t,x,y)+b_i(t)g_i(t,x,y)(i=1,2)$.记 $2\times2$ 矩阵的行列式 $X=\left|\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\right|$,其中 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为2维列向量. $\boldsymbol{a}^{\mathrm T}$ 为 $\boldsymbol{a}$ 的转置.

$$\boldsymbol{a}_i=\left(-\sum_{j=1}^{m-2}p_j^{(i)}\xi_j,\ \rho_i-\sum_{j=1}^{m}q_j^{(i)}\xi_j\right)^{\mathrm T},$$
$$C_i=\frac{1}{\Delta_i}|\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{e}_i|,\ D_i=\frac{1}{\Delta_i}|\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{b}_i|,$$
$$\boldsymbol{b}_i=\left(\sum_{j=1}^{m-2}p_j^{(i)}\left(\sum_{k=1}^{n}G_i(\xi_j,t_k)I_{i,k}(x(t_k))\right),\right.$$
$$\left.\sum_{j=1}^{m-2}q_j^{(i)}\left(\sum_{k=1}^{n}G_i(\xi_j,t_k)\ I_{i,k}(x(t_k))\right)\right)^{\mathrm T},$$
$$\boldsymbol{c}_i=\left(\sum_{j=1}^{m-2}p_j^{(i)}\int_0^1G_i(\xi_j,t)(a_i(t)+b_i(t))\mathrm dt,\right.$$
$$\left.\sum_{i=1}^{m-2}q_j^{(i)}\int_0^1G_i(\xi_j,t)(a_i(t)+b_i(t))\mathrm dt\right)^{\mathrm T},$$
$$\boldsymbol{d}_i=\left(\rho_i-\sum_{j=1}^{m-2}p_j^{(i)}\phi_i(\xi_j),\ -\sum_{j=1}^{m-2}q_j^i\phi_i(\xi_j)\right)^{\mathrm T},$$
$$\boldsymbol{g}_i=\left(-\sum_{j=1}^{m-2}p_j^{(i)}\ \psi_i(\xi_j),\ \rho_i-\sum_{j=1}^{m-2}q_j^{(i)}\psi_i(\xi_j)\right)^{\mathrm T},$$
$$\boldsymbol{e}_i=\left(\sum_{j=1}^{m-2}p_j^{(i)}\int_0^1G_i(\xi_j,t)F_i(t,x(t)y(t))\mathrm dt,\right.$$

$$\sum_{j=1}^{m-2} q_j^{(i)} \int_0^1 G_i(\xi_j,t) F_i(t,x(t)y(t))\mathrm{d}t\Big)^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{f}_i = \Big(\sum_{j=1}^{m-2} p_j^{(i)} \sum_{k=1}^{n} G_i(\xi_j,t_k),\ \sum_{j=1}^{m-2} q_j^{(i)} \sum_{k=1}^{n} G_i(\xi_j,t_k)\Big)^{\mathrm{T}},$$

$$A_i = \frac{1}{\Delta_i}|\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{d}_i|,\ B_i = \frac{1}{\Delta_i}|\boldsymbol{g}_i,\boldsymbol{e}_i|,$$

$$\bar{A}_i = \frac{1}{\Delta_i}|\boldsymbol{c}_i,\boldsymbol{d}_i|,\ \bar{B}_i = \frac{1}{\Delta_i}|\boldsymbol{g}_i,\boldsymbol{c}_i|,$$

$$\bar{C}_i = \frac{1}{\Delta_i}|\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{c}_i|,\ \bar{D}_i = \frac{1}{\Delta_i}|\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{f}_i|.$$

**引理 1**[5]　设 $K$ 是实 Banach 空间 $E$ 中的锥,对 $r>0$ 记 $K_r=\{x\in K:\|x\|<r\}$. 设 $A:\bar{K}_r\to K$ 全连续,且当 $x\in\partial K_r$ 时 $Ax\neq x$,则下面结论成立:

(i) 若 $\|Au\|\leqslant\|u\|,\forall u\in\partial K_r$,则 $i(A,K_r,K)=1$;(ii) 若 $\|Au\|\geqslant\|u\|,\forall u\in\partial K_r$,则 $i(A,K_r,K)=0$. 构造锥 $K$ 为: $K=\{x\in PC^1[0,1]:x(t)\geqslant 0,\ x\geqslant\sigma\|x\|,\ t\in J_\theta\}$. 且定义算子如下:

$$A_\lambda(x,y)(t)=\frac{1}{\lambda}\Big[\int_0^1 G_1(t,s)F_1(s,x(s),y(s))\mathrm{d}s + (A_1+B_1)\psi_1(t)+(C_1+D_1)\varphi_1(t)\Big] + \sum_{k=1}^{n} G_1(t,t_k)I_{1,k}(x(t_k)),$$

$$B_\mu(x,y)(t)=\frac{1}{\mu}\Big[\int_0^1 G_2(t,s)F_2(s,x(s),y(s))\mathrm{d}s + (A_2+B_2)\psi_2(t)+(C_2+D_2)\varphi_2(t)\Big] + \sum_{k=1}^{n} G_2(t,t_k)I_{2,k}(x(t_k)).$$

定义算子 $T:PC^1[0,1]\times PC^1[0,1]\to PC^1[0,1]\times PC^1[0,1]$ 如下: $T(x,y)=(A_\lambda(x,y),B_\mu(x,y))$. 则 BVP(1)的正解等价于 $T$ 的正的不动点.

**引理 2**　设条件 (A1),(A2)满足,则 $T:K\times K\to K\times K$ 是全连续的.

**证明**　由条件(A1),(A2)知,$A_\lambda(x,y)(s)\geqslant 0$, $s\in J$ 且 对于 $t\in J_\theta$ 有 $x(t)\geqslant\sigma\|x\|$,另一方面注意到对于 $t\in J_\theta, s\in[0,1]$,有 $G(t,s)\geqslant\sigma G(s,s)$, $\psi(t)\geqslant\sigma\psi(s)$,故由 $A_\lambda(x,y),B_\mu(x,y)$的定义得 $A_\lambda(x,y)(t)\geqslant\sigma\|A_\lambda(x,y)\|$, $B_\mu(x,y)(t)\geqslant\sigma\|B_\mu(x,y)\|$,从而 $T:K\times K\to K\times K$. 同文献[2]可证明 $T$ 全连续.

## 3　主要结果

**定理 1**　假设(A1),(A2)和(H1),(H2)成立,则当 $\mu$ 和 $\lambda$ 足够大时 BVP(1) 至少有两个正解.

(H1) $f_{1,\infty}=g_{2,0}=+\infty$;

(H2) $M\sum_{k=1}^{n} G_i(t_k,t_k)<\frac{1}{2}(i=1,2)$.

其中 $M=\max_{|u|+|v|\leqslant 1}\{|f_i(t,u,v)|,|g_i(t,u,v)|,i=1,2,k=1,2,\cdots,n\}$.

**证明**　首先考虑当条件(A1),(A2),(H1),(H2)成立时. 令

$$\vartheta_i=(\|G_i\|_q\|a_i+b_i\|_p+(\bar{A}_i+\bar{B}_i)\|\psi_i\| + (\bar{C}_i+\bar{D}_i)\|\phi_i\|)\Big(\frac{1}{2M}-\sum_{k=1}^{n} G_i(t_k,t_k)\Big)^{-1},$$

且令 $\Omega_1=\{(x,y)\in K\times K:\|(x,y)\|_2<1\}$. 若 $(x,y)\in\partial\Omega_1$,则 $\|(x,y)\|_2=\|x\|+\|y\|=1$,因此对于 $\lambda\in[\vartheta_1,+\infty)$及 $\mu\in[\vartheta_2,+\infty)$,有

$$\|A_\lambda(x,y)\|\leqslant M\Big(\frac{1}{\lambda}[\|G_1\|_q\|a_1+b_1\|_p + (\bar{A}_1+\bar{B}_1)\|\psi_1\|+(\bar{C}_1+\bar{D}_1)\|\phi_1\|] + \sum_{k=1}^{n} G_1(t_k,t_k)\Big)\leqslant\frac{1}{2},\tag{4}$$

同样地,$\|B_\mu(x,y)\|\leqslant\frac{1}{2}$. 再由式(4)得

$$\|T(x,y)\|_2=\|A_\lambda(x,y)\|+\|B_\mu(x,y)\|\leqslant \frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.\tag{5}$$

即

$$\|T(x,y)\|_2\leqslant\|(x,y)\|_2,\ (x,y)\in\partial\Omega_1\tag{6}$$

另一方面,由 $f_{1,\infty}=+\infty$知存在 $R_1>1$ 使得对于任意的 $|u|+|v|>R_1$ 及 $t\in J_\theta$,有

$$f_1(t,u,v)\geqslant\varepsilon_2(|u|+|v|)$$

其中 $\varepsilon_2>0$ 满足

$$\frac{1}{\lambda}\varepsilon_2\sigma\int_\theta^{1-\theta} G_1\Big(\frac{1}{2},s\Big)a_1(s)\mathrm{d}s\geqslant 1\tag{7}$$

令 $R_2=\frac{R_1}{\sigma}$ 及 $\Omega_2=\{(x,y)\in K\times K:\|(x,y)\|_2<R_2\}$. 另一方面, $x(t)\geqslant\sigma\|x\|\geqslant\sigma R_2, t\in J_\theta$. 则由式(7)及 $T$ 的定义,对于任意的 $(x,y)\in\partial\Omega_2$ 有

$$\|T(x,y)\|_2\geqslant\Big|A_\lambda(x,y)\Big(\frac{1}{2}\Big)\Big|\geqslant \frac{1}{\lambda}\sigma\varepsilon_2 R_2\int_\theta^{1-\theta} G_1\Big(\frac{1}{2},s\Big)a_1(s)\mathrm{d}s\geqslant R_2=\|(x,y)\|_2\tag{8}$$

故

$$\|T(x,y)\|_2 \geqslant \|(x,y)\|_2,\ \forall (x,y)\in\partial\Omega_2 \quad (9)$$

另一方面,由 $g_{2,0}=+\infty$ 知存在 $R_3>0$ 且 $R_3<1$ 使得对于任意的 $|u|+|v|\leqslant R_3$ 及 $t\in J_\theta$,有 $g_2(t,u,v)\geqslant\varepsilon_3(|u|+|v|)$,其中 $\varepsilon_3>0$ 满足

$$\frac{1}{\mu}\varepsilon_3\sigma\int_\theta^{1-\theta}G_2\left(\frac{1}{2},s\right)b_2(s)\mathrm{d}s\geqslant 1 \qquad (10)$$

令 $\Omega_3=\{(x,y)\in K\times K:\|(x,y)\|_2<R_3\}$,则对任意的 $(x,y)\in\partial\Omega_3$,类似于(8)的证明由式(10)知 $\|T(x,y)\|_2\geqslant R_3=\|(x,y)\|_2$.故

$$\|T(x,y)\|_2\geqslant\|(x,y)\|_2,\ \forall(x,y)\in\partial\Omega_3 \qquad (11)$$

由式(6),(9),(11)及引理1知BVP(1)至少有两个正解 $(x_\lambda^{(1)},y_\mu^{(1)})$ 和 $(x_\lambda^{(2)},y_\mu^{(2)})$ 并且 $0<\|(x_\lambda^{(1)},y_\mu^{(1)})\|_2<1<\|(x_\lambda^{(2)},y^{(2)})\|_2$.

**注** 满足(H1)和(H2)的函数 $g_i$ 很多,如 $g_i\equiv$ 常数;

**定理2** 设(A1),(A2)和(H3)成立,则当 $\mu$ 充分大 $\lambda$ 充分小时BVP(1)至少有一个正解.

(H3) $f_{1,\infty}=g_2^0=+\infty$, $f_1^0=g_1^0=f_2^0=0$, $I_i^0(k)=0(i=1,2,k=1,2,\cdots,n)$.

**证明** 由 $f_{1,\infty}=+\infty$ 知存在 $L_1>0$ 使得对任意的 $|u|+|v|\geqslant L_1$ 及 $t\in J_\theta$ 有 $f_1(t,u,v)>0$,令 $L>\frac{L_1}{\sigma}$,则 $m_L=\min_{\sigma L\leqslant|u|+|v|\leqslant L,t\in J_\theta}f_1(t,u,v)>0$,令 $\Omega_4=\{(x,y)\in K\times K:\|(x,y)\|_2<L\}$.则对于 $(x,y)\in\partial\Omega_4$ 及 $\lambda\leqslant\frac{m_L}{L}\int_\theta^{1-\theta}G_1\left(\frac{1}{2},s\right)a_1(s)\mathrm{d}s$,类似式(8)证明有

$$\|T(x,y)\|_2\geqslant L=\|(x,y)\|_2 \qquad (12)$$

故 $\|T(x,y)\|_2\geqslant\|(x,y)\|_2$, $\forall(x,y)\in\partial\Omega_4$.另一方面由 $f_i{}^0=g_1{}^0=0$, $I_i{}^0(k)=0$ 知,存在 $0<l<L$ 和 $\varepsilon_0>0$ 使得对于任意的 $u,v\in\mathbf{R}^+$, $|u|+|v|\leqslant l$ 及 $t\in[0,1]$有

$$f_i(t,u,v)\leqslant\varepsilon_0(|u|+|v|),$$
$$g_1(t,u,v)\leqslant\varepsilon_0(|u|+|v|),$$
$$I_{i,k}(u)\leqslant\varepsilon_0|u|,i=1,2,\ k=1,2,\cdots,n$$

令 $\Omega_5=\{(x,y)\in K\times K:\|(x,y)\|_2<l\}$,则对于 $(x,y)\in\partial\Omega_5$, $t\in[0,1]$有

$$f_i(t,x(t),y(t))\leqslant\varepsilon_0(|x(t)|+|y(t)|)\leqslant\varepsilon_0 l,$$
$$g_1(t,x(t),y(t))\leqslant\varepsilon_0(|x(t)|+|y(t)|)\leqslant\varepsilon_0 l,$$
$$m_l=\max_{|u|+|v|\leqslant l,t\in[0,1]}g_2(t,u,v)>0,$$
$$I_{i,k}(x)\leqslant\varepsilon_0|x(t)\leqslant\varepsilon_0 l,\quad k=1,2,\cdots,n, \qquad (13)$$

其中 $\varepsilon_0$ 满足

$$\varepsilon_0\frac{l}{\lambda}[\|G_1\|_q\|a_1(s)+b_1(s)\|_p+(\bar{A}_1+\bar{B}_1)\|\psi_1\|+(\bar{C}_1+\bar{D}_1)\|\phi_1\|]\leqslant\frac{1}{4},$$

$$\varepsilon_0\sum_{k=1}^n G_i(t_k,t_k)\leqslant\frac{1}{8},$$

$$i=1,2,\varepsilon_0 l\|a_2\|_p(m_l\|b_2\|_p)^{-1}\leqslant 1. \qquad (14)$$

因此由式(14),对于 $(x,y)\in\partial\Omega_5$ 有

$$\|A_\lambda(x,y)\|\leqslant\varepsilon_0\frac{l}{\lambda}[\|G_1\|_q\|a_1(s)+b_1(s)\|_p+(\bar{A}_1+\bar{B}_1)\|\psi_1\|+(\bar{C}_1+\bar{D}_1)\|\phi_1\|]+\varepsilon_0 l\sum_{k=1}^n G_1(t_k,t_k)\leqslant\frac{l}{2} \qquad (15)$$

令 $\mu\geqslant\max\left\{\frac{6m_l}{l}\|G_2\|_q\|b_2\|_p,8((\bar{A}_2+\bar{B}_2)\cdot\|\psi_2\|)+(\bar{C}_2+\bar{D}_2)\|\phi_2\|\right\}$,则对 $(x,y)\in\partial\Omega_5$,有

$$\|B_\mu(x,y)\|\leqslant\frac{l}{2} \qquad (16)$$

故由式(15)和式(16),对于任意的 $(x,y)\in\partial\Omega_5$ 得到

$$\|T(x,y)\|_2=\|(A_\lambda(x,y),B_\mu(x,y)\|_2,$$
$$\leqslant\frac{l}{2}+\frac{l}{2}=l=\|(x,y)\|_2 \qquad (17)$$

由引理1、式(12)和(17)知 $T$ 有一个不动点 $(x_\lambda,y_\mu)\in\bar{\Omega}_4\backslash\Omega_5$.

**定理3** 设(A1),(A2)和下面的(H$^*$)成立,则当 $\lambda$ 充分小时BVP (1)没有正解.

(H$^*$) 存在 $n(s)\in L[J,R^+]$使得 $f_1(s,u,v)\geqslant n(s)(|u|+|v|)$, $u,v\in\mathbf{R}^+$, $s\in J_\theta$.

**证明** 假设BVP(1) 存在正解 $(x,y)$,则 $x,y\in K$,取 $\lambda<\sigma^2\int_\theta^{1-\theta}G_1(s,s)a_1(s)n(s)\mathrm{d}s$,则有

$$\|(x,y)\|_2==\|(A_\lambda(x,y)\|+\|,B_\mu(x,y)\|\geqslant\|(A_\lambda(x,y)\|\geqslant\frac{\sigma}{\lambda}\int_\theta^{1-\theta}G_1(s,s)a_1(s)\cdot f_1(s,x(s),y(s))\mathrm{d}s\geqslant\frac{\sigma^2}{\lambda}\cdot\int_\theta^{1-\theta}G_1(s,s)a_1(s)n(s)\mathrm{d}s(\|x\|+\|y\|)>\|x\|+\|y\|=\|(x,y)\|_2,$$

这是矛盾的,因此BVP(1)没有正解.

## 参考文献:

[1] Zhang X, Feng M, Ge W. Multiple positive solutions for a class of

m-point boundary value problems[J]. Applied Mathematics Letters,2009,22(1):12.

[2] Feng M, Xie D. Multiple positive solutions of multi-point boundary value problem for second order impulsive differential equations[J]. J Computational and Applied Mathematics,2009,223(1):438.

[3] Lomtatidze A. Positive solutions of boundary value problems for second order ordinary differential equations with singularities [J]. J Differential Equations,1987,23(10):1146.

[4] Ren J,Ge W. Existence of two solutions of nonlinear m-point boundary-valve problems[J]. Beijing Institute of Technology,2003,12:97.

[5] Guo D,Lakshmikantham V. Nonlinear problems in abstract cones [M]. New York:Academic Press,1988.

(上接第 873 页)

建立科学的交通运营及主动安全保障都具有重要理论意义和实践价值,目前这一研究正在进行中.

## 参考文献:

[1] 周永勇,周湶,刘佳宾.基于粗糙集理论的配电网故障诊断规则提取方法[J].高电压技术,2008,34(12):2713.
ZHOU Yongyong, ZHOU Quan, LIU Jiabin. Rough set theory based approach for fault diagnosis rule extraction of distribution system [J]. High Voltage Engineering,2008,34(12):2713.

[2] 姚鑫骅,徐月同,傅建中,等.基于粗糙集理论的数控机床智能故障诊断研究[J].浙江大学学报:工学版,2008,42(10):1720.
YAO Xinhua,XU Yuetong,FU Jianzhong,et al. Intelligent fault diagnosis of CNC machine tools based on rough set theory[J]. Journal of Zhejiang University:Engineering Science,2008,42(10):1720.

[3] LIU Xun,DONG Decun,LUO Yanfen. Fault diagnosis of train-ground wireless communication unit based on fuzzy neural network [C]//2009 4th IEEE Conference on Industrial Electronics and Applications, ICIEA. Xi'an: IEEE, 2009: 348 - 352.

[4] 涂继亮,罗艳芬,董德存.一种基于粗集理论的车地无线通信设备故障诊断方法[J].计算机应用研究,2010,27(9):3373.
TU Jiliang,LUO Yanfen,DONG Decun. Fault diagnosis method for train-ground wireless commun-ication unit based on rough sets theory[J]. Application Research of Computers, 2010, 27 (9):3373.

[5] 黄文涛,赵学增,王伟杰,等.基于粗糙集理论的故障诊断决策规则提取方法[J].中国电机工程学报,2003,23 (11):150.
HUANG Wentao, ZHAO Xuezeng, WANG Weijie, et al. Extraction method of decision rules for fault diagnosis based on rough set theory [J]. Proceeding of the CSEE, 2003, 23 (11):150.

[6] Skowron A,Rauszer C. The discernibility matrices and functions in information system,intelligent decision support—handbook of applications and advances of the rough sets theory [M]. Dordrecht:Kluwer Academic Publishers,1992. 331 - 362.

[7] 杨广,吴晓平,宋叶新,等.基于粗糙集理论的多源信息融合故障诊断方法[J].系统工程与电子技术,2009,31(8):2016.
YANG Guang, WU Xiaoping, SONG Yexin, et al. Multi-sensor information fusion fault diagnosis method based on rough set theory [J]. Systems Engineering and Electronics, 2009, 31 (8):2016.

[8] HUANG Wentao,WANG Weijie,MENG Qingxin. Fault diagnosis method for power transformers based on rough set theory[C]// Chinese Control and Decision Conference,CCDC. Yantai:Inst of Elec and Elec Eng Computer Society,2008:468 - 472.

[9] 宋立军,胡政,杨拥民,等.基于证据理论与粗糙集集成推理策略的内燃机故障诊断[J].内燃机学报,2007,25(1):91.
SONG Lijun,HU Zheng,YANG Yongmin,et al. Fault diagnosis based on reasoning integration of rough sets and evidence theory[J]. Transactions of CSICE,2007,25(1):91.