

考虑拉压模量及主应力顺序的隧洞应力解析解

饶平平^{1,2}, 李镜培^{1,2}, 张常光^{1,2}, 张 飞^{1,2}

(1. 同济大学 岩土及地下工程教育部重点实验室 上海 200092; 2. 同济大学 地下建筑与工程系 上海 200092)

摘要: 针对圆形水工隧洞, 采用统一强度理论和弹脆塑性模型, 考虑了不同工况下主应力顺序变化、不同拉压模量、中主应力以及软化等因素的综合影响, 推导了圆形水工隧洞问题的弹塑性解答, 探讨了不同拉压模量比、中主应力等对隧洞临界压力以及极限压力的影响。算例分析结果表明, 对于圆形水工隧洞应正确考虑不同工况下第一主应力的变化, 且应重视拉压模量差异的影响, 传统的压力隧洞弹塑性解答假定岩土体具有相同的拉压模量, 使得工程设计偏于保守, 考虑拉压模量的不等可以更真实的反映岩土材料的力学特性, 以期达到设计经济和安全。该结果为水工压力隧洞的弹塑性分析提供了理论依据, 对工程设计具有一定参考价值。

关键词: 拉压模量; 主应力顺序; 水工隧洞; 解析解

中图分类号: TU 452

文献标识码: A

Analytical Solutions of Hydraulic Tunnel With a Consideration of Variation of Principal Stresses Orders and Different Elastic Moduli in Tension and Compression

RAO Pingping^{1,2}, LI Jingpei^{1,2}, ZHANG Changguang^{1,2}, ZHANG Fei^{1,2}

(1. Key Laboratory of Geotechnical and Underground Engineering of the Ministry of Education, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. Department of Geotechnical Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: Based on the unified strength theory and elastic-brittle-plastic model, analytical solutions of elastic-plastic for circular hydraulic tunnel are introduced considering the principal stresses orders under different engineering conditions, different elastic moduli in tension and compression, the intermediate principal stress and softening. The influences of different tension and compression modulus ratios and the intermediate principal stresses on the critical

pressure and ultimate pressure for hydraulic tunnels are discussed. The example analysis results show that the first principal stress should be reasonably considered, if different elastic moduli in tension and compression are neglected, large errors may be resulted in. Traditional elastic-plastic solutions of hydraulic tunnel based on an assumption that the geotechnical materials have the same elastic moduli in tension and compression may bring out a more conservative engineering design. A consideration of different elastic moduli in tension and compression reflect the true mechanical property of geotechnical materials, therefore, an economic and safety design is obtained. This result provides some reference value for engineering design and a theory basis for the elastoplastic analysis circular hydraulic tunnels.

Key words: elastic moduli in tension and compression; principal stresses orders; hydraulic tunnel; analytical solution

水工压力隧洞是地下工程中常见的建筑物, 隧洞围岩承受洞室开挖的应力重分布和洞壁支护力及洞内水压力作用。以往的隧洞弹塑性解答如 Fenner 公式^[1]等, 常以隧洞内围岩的径向应力作为第一主应力来推导相应公式。实际上, 在不同的工况下, 隧洞第一主应力可能是径向应力, 也可能是切向应力, 在应用强度准则时应正确选择第一主应力^[2-3]。另一方面, 就目前现状而言, 大多数文献都假定岩土体的拉压模量相等, 但根据三轴拉伸和压缩试验, 岩土体抗压和抗拉特性有较大差异, 一般情况下拉伸模量小于压缩模量。随着岩土及隧道工程技术的发展, 对岩土体材料性质的研究也提出了更高的要求, 因此, 开展拉压模量不同理论的研究, 是岩土及隧道工程实践的迫切需要。王启铜, 龚晓南等率先将不同拉压模量弹性理论应用于扩孔问题的弹塑性分析, 结

收稿日期: 2010-05-26

基金项目: 上海市科委科研项目(09231200900)

第一作者: 饶平平(1984—), 男, 博士生, 主要研究方向为岩土力学及工程效应。E-mail: raopingping@sohu.com

通讯作者: 李镜培(1963—), 男, 教授, 博士生导师, 工学博士, 主要研究方向为桩基础及深基坑工程。E-mail: lijip2773@tongji.edu.cn

果证明了岩土体拉压模量的差异对应力、位移及塑性区的发展有较大影响^[4];此后,罗战友等在拉压模量不同的基础上进一步考虑了岩土体软化特性,分析了柱形孔扩张问题的应力及位移统一解^[5-6];郑俊杰等则综合考虑岩土体的拉压模量差异及剪胀特性,推导了球形孔扩张时弹性区及塑性区的应力和位移^[7].

基于以上研究,笔者针对圆形水工隧洞,采用统一强度理论和弹脆塑性模型,根据不同工况下主应力顺序变化正确选择第一主应力,推导了考虑不同拉压模量下的隧洞应力及围岩位移解析解,并通过算例分析本方法与传统方法的不同.

1 基本方程及假定

对于处于开挖工况的水工隧洞,由于支护力 p 不太大,初始地应力的作用导致隧洞围岩产生应力重分布.当支护力 p 减小时,围绕着洞壁周边围岩产生弹性变形,当 p 减小到一定程度时,周边围岩进入塑性状态.此后,随着 p 的减小,塑性区范围不断扩大.而对于处于运行期间的隧洞,由于洞内水压力的作用,塑性区逐渐消失,当洞内压力不断增大时,隧洞周边围岩进入新的弹性变形阶段,此后,随着洞内压力的继续增大而进入径向受压的塑性变形阶段.如图1所示, a 为隧洞开挖半径, r_p 为塑性区半径, p_0 为岩体初始应力.

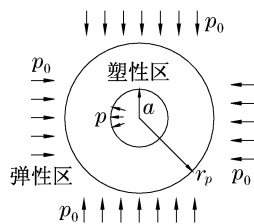


图1 施工期隧洞计算简图

Fig.1 Calculation sketch of hydraulic tunnel during construction period

1.1 基本方程

平衡方程

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (1)$$

式中: σ_r 为正应力; σ_θ 为切应力; r 为半径.在弹性区中,为几何方程

$$\epsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \epsilon_\theta = \frac{u}{r} \quad (2)$$

式中: ϵ_r 为正应变; ϵ_θ 为切应变; u 为位移.

变形协调方程

$$\frac{d\epsilon_\theta}{dr} + \frac{\epsilon_\theta - \epsilon_r}{r} = 0 \quad (3)$$

根据 C. A. 阿姆巴尔楚米扬的不同模量弹性理论,弹性变形阶段的本构方程^[8]为

$$\epsilon_\theta = \frac{1}{E^+}(1 - \nu^+ \nu^+) \sigma_\theta - \frac{\nu^-}{E^-}(1 + \nu^+) \sigma_r \quad (4a)$$

$$\epsilon_r = \frac{1}{E^-}(1 - \nu^+ \nu^-) \sigma_\theta - \frac{\nu^-}{E^-}(1 + \nu^+) \sigma_r \quad (4b)$$

式中: E^+ , E^- 分别为岩土体压缩模量及拉伸模量; ν^+ , ν^- 分别为压缩及拉伸泊松比.

1.2 统一强度理论

对于柱形孔扩张问题,由于纵向尺寸远大于横向尺寸,故可按照平面应变的轴对称问题分析.平面应变状态下统一强度理论破坏准则为^[9]

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} &= \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \sin \varphi_{tj} + c_{tj} \cos \varphi_{tj} \\ \sin \varphi_{tj} &= \frac{2(1+b) \sin \varphi_j}{2(1+b) + b(\sin \varphi_j - 1)} \\ c_{tj} &= \frac{2(1+b) c_j \cos \varphi_j}{2(1+b) + b(\sin \varphi_j - 1)} \cdot \frac{1}{\cos \varphi_{tj}} \\ \alpha &= \frac{\sigma_t}{\sigma_c} = \frac{1 - \sin \varphi_j}{1 + \sin \varphi_j}, \quad b = \frac{(1 + \alpha) \tau_s - \sigma_t}{\sigma_t - \tau_s} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

式中: b 为反映中主应力对材料屈服的影响程度参数($0 \leq b \leq 1$); σ_1, σ_3 分别为单元体的最大主应力和最小主应力(压应力为正,拉应力为负); c_j, φ_j 分别为材料的黏聚力和内摩擦角; c_{tj}, φ_{tj} 为材料的统一粘聚力和统一内摩擦角; $j=0$ 表示材料软化前, $j=1$ 表示材料软化后, $\sigma_t, \sigma_c, \tau_s, \alpha$ 分别为材料的抗拉强度、抗压强度、抗剪强度以及拉压比.

统一强度理论其软化前后的屈服准则还可以写成如下简化表达式:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = X_j \sigma_1 + Y_j \quad (6)$$

$$\text{式中: } X_j = \frac{2 \sin \varphi_{tj}}{1 + \sin \varphi_{tj}}; Y_j = \frac{2 c_{tj} \cos \varphi_{tj}}{1 + \sin \varphi_{tj}}.$$

2 施工期围岩弹塑性分析

处于施工期间的隧洞,隧洞应力水平受初始地应力控制,围岩由于开挖卸荷进入塑性变形阶段,若以压应力为正,此时切向应力 σ_θ 为第一主应力,即 $\sigma_1 = \sigma_\theta, \sigma_3 = \sigma_r$. 则屈服条件变为

$$\sigma_\theta - \sigma_r = X_j \sigma_\theta + Y_j \quad (7)$$

选取应力函数 $f(r)$, 使 σ_r 和 σ_θ 分别为^[5]

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= f(r) \\ \sigma_\theta &= \frac{df(r)}{dr} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

结合变形协调方程、本构方程以及式(8),可以得到

$$r^2 \frac{d^2 f(r)}{dr^2} + r \frac{df(r)}{dr} + \frac{E^- (1 - \nu^+ \nu^-)}{E^+ \nu^- (1 + \nu^+)} f(r) = 0 \quad (9)$$

解方程(9)可得

$$f(r) = Ar^\eta + Br^{-\eta} \quad (10)$$

式中: $\eta = \sqrt{E^- (1 - \nu^+ \nu^-) / E^+ (1 - \nu^+ \nu^-)}$.

结合式(8)、式(10),利用边界条件,可得到弹性区的应力和位移表达式

$$\sigma_r = (p - p_0)(a/r)^{1+\eta} + p_0 \quad (11a)$$

$$\sigma_\theta = -\eta(p - p_0)(a/r)^{1+\eta} + p_0 \quad (11b)$$

当隧洞洞壁支护力 p 逐渐减小至第一临界压力 p_{cr1} 时,隧洞围岩周边形成环状塑性区,将式(11a),式(11b), $j=0$ 代入式(7),可得到 p_{cr1} 为

$$p_{cr1} = \frac{p_0(X_0 - 1)(1 + \eta) + Y_0}{\eta(X_0 - 1) - 1} \quad (12)$$

将公式(7)、 $j=1$ 代入平衡方程(1)中,并根据边界条件,可得塑性区内应力表达式

$$\sigma_r = (p + Y_1/X_1)(r/a)^{X_1/(1-X_1)} - Y_1/X_1 \quad (13a)$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{1-X_1} \left[\left(p + \frac{Y_1}{X_1} \right) \left(\frac{r}{a} \right)^{X_1/(1-X_1)} - \frac{Y_1}{X_1} \right] + \frac{Y_1}{1-X_1} \quad (13b)$$

令 $r = r_p$,代入式(11a), (11b)中,可得塑性区以外的弹性区应力及位移解答为

$$\sigma_r = \left[\left(p + \frac{Y_1}{X_1} \right) \left(\frac{r_p}{a} \right)^{X_1/(1-X_1)} - \frac{Y_1}{X_1} - p_0 \right] \left(\frac{r}{r_p} \right)^{1+\eta} + p_0 \quad (14a)$$

$$\sigma_\theta = -\eta \left[\left(p + \frac{Y_1}{X_1} \right) \left(\frac{r_p}{a} \right)^{X_1/(1-X_1)} - \frac{Y_1}{X_1} - p_0 \right] \left(\frac{r}{r_p} \right)^{1+\eta} + p_0 \quad (14b)$$

在隧洞围岩弹塑性交界处,由于径向应力连续,式(13a)中的 $\sigma_r = p_{cr1}$,故将式(12)代入式(13a)中,可得 p 与塑性区半径 r_p 的关系式

$$p = \left[\frac{p_0(X_0 - 1)(1 + \eta) + Y_0}{\eta(X_0 - 1) - 1} + \frac{Y_1}{X_1} \right] \left(\frac{a}{r_p} \right)^{X_1/(1-X_1)} - \frac{Y_1}{X_1} \quad (15)$$

3 运行期围岩弹塑性分析

当水工隧洞处于运行期间时,隧洞围岩受到较大的内水压力,当洞壁内压力大到一定程度时,隧洞周边围岩由于径向受压而再次进入塑性状态,此时隧洞应力水平受内水压力控制,径向应力 σ_r 为第一主应力,即 $\sigma_1 = \sigma_r, \sigma_3 = \sigma_\theta$. 则屈服条件变为

$$\sigma_r - \sigma_\theta = X_j \sigma_r + Y_j \quad (16)$$

当 p 逐渐增大至第二临界压力 p_{cr2} 时,隧洞围岩周边重新形成环状塑性区,将(11a), (11b), $j=0$ 代入式(16),可得到 p_{cr2} 为

$$p_{cr2} = \frac{p_0(1 + \eta) + Y_0}{\eta + 1 - X_0} \quad (17)$$

按第2节相同的方法,得如下结果:

将公式(16)、 $j=1$ 代入平衡方程(1)中,并根据边界条件,可得运行期隧洞塑性区应力表达式如下:

$$\sigma_r = (p + Y_1/X_1)(a/r)^{X_1} - Y_1/X_1 \quad (18a)$$

$$\sigma_\theta = (1-X_1) \left[\left(p + \frac{Y_1}{X_1} \right) \left(\frac{a}{r} \right)^{X_1} - \frac{Y_1}{X_1} \right] - Y_1 \quad (18b)$$

隧洞围岩弹性区应力及位移解答为

$$\sigma_r = \left[\left(p + \frac{Y_1}{X_1} \right) \left(\frac{a}{r_p} \right)^{X_1} - \frac{Y_1}{X_1} - p_0 \right] \left(\frac{r}{r_p} \right)^{1+\eta} + p_0 \quad (19a)$$

$$\sigma_\theta = -\eta \left[\left(p + \frac{Y_1}{X_1} \right) \left(\frac{a}{r_p} \right)^{X_1} - \frac{Y_1}{X_1} - p_0 \right] \left(\frac{r}{r_p} \right)^{1+\eta} + p_0 \quad (19b)$$

隧洞内压力 p 与塑性区半径 r_p 的关系式为

$$p = \left[\frac{p_0(1 + \eta) + Y_0}{\eta + 1 - X_0} + \frac{Y_1}{X_1} \right] \left(\frac{r_p}{a} \right)^{X_1} - \frac{Y_1}{X_1} \quad (20)$$

式(20)是建立在统一强度理论的基础上所得的隧洞内压力与塑性区半径的关系表达式. 当中主应力系数 $b=0$ 且不考虑软化时,式(20)可退化到文献[5]中的表达式. 再令 $E^+ = E^-, \nu^+ = \nu^-$, 即不考虑岩土体拉压模量差异时,可退化为

$$p = (p_0 + c \cot \varphi)(1 + \sin \varphi) \left(\frac{r_p}{a} \right)^{(2 \sin \varphi) / (1 + \sin \varphi)} - c \cot \varphi \quad (21)$$

该表达式与文献[10]推导的基于M—C屈服准则下圆柱孔扩张问题的解答完全一致.

除此以外,当 $E^+ = E^-, \nu^+ = \nu^-$ 时,式(12)、式(17)分别可以退化到文献[3]中的表达式.

4 算例与参数影响分析

某圆形水工压力隧洞半径 $a = 4$ m, 压缩模量 $E^+ = 2000$ MPa, 压缩泊松比 $\nu^+ = \nu^- = 0.3$, 围岩凝聚力 $c_0 = c_1 = 5$ MPa, 内摩擦角 $\varphi_0 = \varphi_1 = 30^\circ$, 初始地应力 $p_0 = 20$ MPa.

4.1 拉压模量的影响

由图 2a, b 可知, 当隧洞处于施工期间时, 刚好出现塑性区所对应的第一临界压力随拉压模量比的增大而增大的情况. 对于处于运行期间的隧洞而言, 第二临界压力随拉压模量比的变化与施工期刚好相反. 这是因为施工期间的隧洞由于开挖卸荷产生应力重分布, 此时地应力起主导作用, 隧洞圆孔处于不断收缩状态, 拉伸模量 E^- 越大, 刚好发生塑性屈服所需要的临界压力也越大; 处于运行期间的隧洞, 隧洞承受较大的内水压力, 洞内压力起主导作用, 隧洞围岩径向受压, 隧洞处于扩孔状态, 压缩模量 E^+ 越小的围岩, 隧洞越容易屈服, 所需要的临界压力也越小. 另外, 对于图 2a 而言, 相同拉压模量比条件下考虑了中主应力 ($b > 0$) 的临界压力比不考虑中主应力 ($b = 0$) 要小. 这说明, 考虑中主应力可以充分利用围岩的自承能力, 发挥其强度潜能.

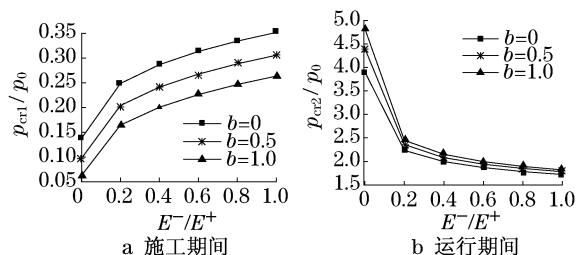


图 2 与 E^-/E^+ 及 b 的关系

Fig.2 Relationship between and E^-/E^+ , b

图 3a, b 为当中主应力系数 $b = 0$ 且不考虑软化时, 隧洞周边围岩进入塑性状态后不同拉压模量下隧洞内压力与塑性区半径的变化规律. 由图 3a 可以看出, 当隧洞处于开挖施工期间时, 围岩向洞内收缩, 塑性区半径随洞内支护压力的增大而变小, 这与实际工程是一致的; 而当隧洞处于运行期间时, 塑性区半径随洞内压力的增大而增大. 根据图 3 还可看出, 拉压模量比越大, 相同塑性区半径条件下的洞内压力越小, 表明拉伸模量 E^- 大的材料更加容易发生屈服^[9], 且随着拉压模量比的增大, 洞内压力随塑性区半径增长的增长速度不断变小; 相同洞内压力条

件下, 拉压模量比值小的材料对应的塑性区半径也小, 实际工程中岩土体拉压模量比值一般小于 1, 说明传统的压力隧洞弹塑性解答假定岩土体具有相同的拉压模量 (即拉压模量比值等于 1) 使得工程设计偏于保守, 而考虑拉压模量不同则可以更反映材料的客观真实情况, 能更加经济、合理地指导工程设计.

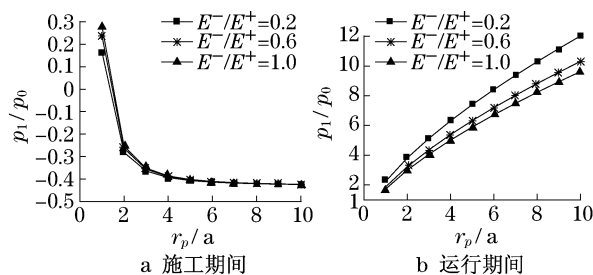


图 3 E^-/E^+ 对 p_1/p_0 的影响

Fig.3 Effect of E^-/E^+ on b

4.2 主应力顺序变化的影响

当中主应力系数 $b = 0$ 且 $E^-/E^+ = 1$ 时, 由图 4 可看出, 在不考虑主应力顺序变化工况下, 隧洞开挖完成时, 当洞内支护力为零, 隧洞塑性区半径为 5.15 m; 随着洞内支护力的不断增加, 塑性区半径逐渐减小, 即屈服范围逐渐减小. 当洞壁压力增大到 5.59 MPa 时, 围岩处于平衡状态, 屈服区消失; 当洞壁压力范围在 5.59~34.41 MPa 时, 围岩处于径向受压的弹性状态, 此时隧洞安全等级较高; 而当洞壁压力大于 34.41 MPa 时, 围岩出现受压屈服. 此后, 围岩塑性区范围随洞壁压力的不断增大而加大, 隧洞安全等级逐渐降低. 这一规律与文献[11]的结论一致. 而如不考虑主应力顺序变化工况下, 由图可以看出, 不管内压力多大, 隧洞围岩不会出现新的塑性区. 这与实际情况矛盾.

图 5a, b 为 $b = 0$ 且 $E^-/E^+ = 1$, $p = 40$ MPa 条件下的围岩径向与切向应力随半径变化的分布规律. 由图可以看出, 不考虑主应力顺序变化与考虑主应力顺序变化, 相对应的径向应力分布规律差别不大, 而切向应力的差别较大. 这是因为 $p = 40$ MPa 时, 对应的隧洞已经进入受压屈服阶段 (由图 4 可知), 如不考虑主应力顺序变化, 始终将 σ_θ 作为第一主应力, 也就是说, 当 $p > p_{cr2}$ 时, 仍然按式 (13b) 计算塑性区半径是不合适的, 而考虑主应力顺序变化应按式 (18b) 计算. 因此, 二者计算结果有明显差别, 且内压力越大, 差别也越大.

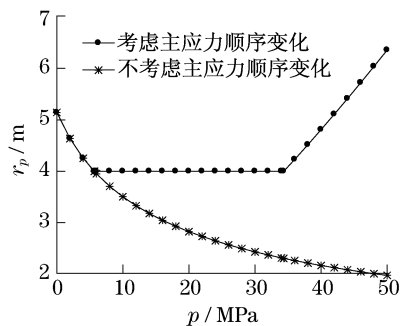


图 4 隧洞塑性区半径与洞内压力关系

Fig.4 Relationship between plastic zone radius and inner pressure of circular tunnel

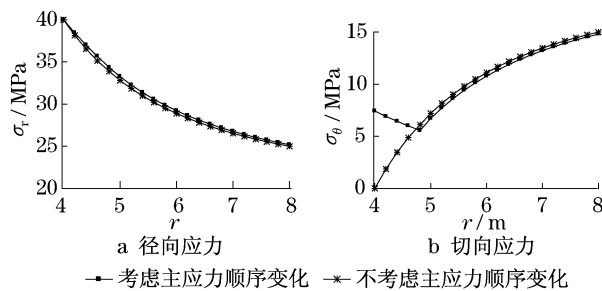


图 5 不同半径处的径向应力和切向应力

Fig.5 Radial stress at different radius and tangential stress

5 结论

(1) 对于圆形水工隧洞,传统的压力隧洞弹塑性解答假定岩土体具有相同的拉压模量,使工程设计偏于保守,而考虑拉压模量不同则可反映岩土材料的客观真实情况,能更经济、合理地指导工程设计。

(2) 隧洞处于施工期间时,第一临界压力随拉压模量比的增大而增大,塑性区半径随洞内支护压力的增大而变小;对于处于运行期间的隧洞而言,第二临界压力随拉压模量比的增大而减小,塑性区半径随洞内压力的增大而增大。

(3) 隧洞开挖完成时,随着洞内内水压力的不断增加,塑性区半径逐渐减小,当洞壁压力增大第一临界压力时,隧洞围岩处于平衡状态,屈服区消失;当洞壁压力范围在第一临界压力到第二临界压力中间时,围岩处于径向受压的弹性状态,隧洞安全等级较高;而当洞壁压力大于第二临界压力时,围岩受压屈服。此后,围岩塑性区范围随洞壁压力的不断增大而加大,隧洞安全等级逐渐降低。

参考文献:

- [1] Jiang Y, Yoneda H, Tanabashi Y, et al. Theoretical estimation of loosening pressure on tunnels in soft rocks[J]. *Tunnelling and Underground Space Technology*, 2001, 16: 99.
- [2] 张常光, 张庆贺, 赵均海, 等. 具有衬砌的圆形水工隧洞弹塑性应力统一解[J]. *同济大学学报: 自然科学版*, 2010, 38(1): 50. ZHANG Changguang, ZHANG Qinghe, ZHAO Junhai, et al. Elastic-plastic stress unified solutions of a circular hydraulic tunnel with lining[J]. *Journal of Tongji University: Natural Science*, 2010, 38(1): 50 - 53.
- [3] 任青文, 张宏朝. 关于芬纳公式的修正[J]. *河海大学学报: 自然科学版*, 2001, 29(16): 109. REN Qingwen, ZHANG Hongchao. A modification of Fanner formula[J]. *Journal of Hohai University: Natural Science*, 2001, 29(16): 109.
- [4] 王启铜, 龚晓南, 曾国熙. 考虑土体拉、压模量不同时静压桩的沉桩过程[J]. *浙江大学学报: 自然科学版*, 1992, 26(6): 678. WANG Qitong, GONG Xiaonan, ZENG Guoxi. Pile jacking in a soil mass with different elastic moduli in tension and compression [J]. *Journal of Zhejiang University: Natural Science*, 1992, 26(6): 678.
- [5] 罗战友, 杨晓军, 龚晓南. 考虑材料的拉压模量不同及应变软化特性的柱形孔扩张问题[J]. *工程力学*, 2004, 21(2): 40. LUO Zhanyou, YANG Xiaojun, GONG Xiaonan. Expansion of cylindrical cavities in strain-softening material with different elastic moduli in tension and compression [J]. *Engineering Mechanics*, 2004, 21(2): 40.
- [6] 罗战友, 夏建中, 龚晓南. 不同拉压模量及软化特性材料的柱形孔扩张问题的统一解[J]. *工程力学*, 2008, 25(7): 79. LUO Zhanyou, XIA Jianzhong, GONG Xiaonan. Unified solution for expansion of cylindrical cavity in strain-softening materials with different elastic moduli in tension and compression [J]. *Engineering Mechanics*, 2008, 25(7): 79.
- [7] 郑俊杰, 鲁燕儿, 陈保国. 拉压模量不同的剪胀土体中的球孔扩张问题[J]. *岩土工程学报*, 2009, 31(5): 675. ZHEN Junjie, LU Yaner, CHEN Baoguo. Spherical cavity expansion in dilatant soils with different tension and compression moduli. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2009, 31(5): 675.
- [8] 阿姆巴尔楚米扬. 不同模量弹性理论[M]. 郭瑞锋, 张允真, 译. 北京: 中国铁道出版社, 1986. C A Amu Barr Chu Miyang. Elastic theory with different moduli in tension and compression [M]. Translated by WU Ruifeng, ZHANG Yunzhen. Beijing: China Railway Press, 1986.
- [9] 俞茂宏, 杨松岩, 刘春阳, 等. 统一平面应变滑移线场理论[J]. *土木工程学报*, 1997, 30(2): 14. YU Maohong, YANG Songyan, LIU Chunyang, et al. Unified plane-strain slip line field theory system [J]. *China Civil Engineering Journal*, 1997, 30(2): 14.
- [10] 龚晓南. 土塑性力学[M]. 2版. 杭州: 浙江大学出版社, 1999. GONG Xiaonan. Plastic soil plastics mechanics [M]. 2nd ed. Hangzhou: Zhejiang University Press, 1999.
- [11] 任青文, 邱颖. 具有衬砌圆形隧洞的弹塑性解[J]. *工程力学*, 2005, 22(2): 212. REN Qingwen, QIU Ying. Elastic-plastic solution of circular tunnel with liner [J]. *Engineering Mechanics*, 2005, 22