第39卷第12期
2011年12月

同济大学学报(自然科学版)
JOURNAL OF TONGJI UNIVERSITY(NATURAL SCIENCE)

Vol.39 No.12
Dec. 2011

文章编号：0253-374X(2011)12-1877-03　　DOI：10.3969/j.issn.0253-374x.2011.12.027

关于求解凹函数全局优化问题的最优控制方法

朱经浩，张　洁

(同济大学 数学系，上海 200092)

摘要：研究一类凹函数全局优化问题的求解方法.建立凹函数全局优化问题和相对应的最优控制问题之间的等价关系.利用Krotov沿拓法，构造辅助函数，解决了与原问题等价的的最优控制问题，并对目标函数做了一些推广.

关键词：凹函数；全局优化；最优控制；Krotov沿拓法

中图分类号：O 232　　**文献标识码**：A

Solution to Global Optimization of Concave Function Via Optimal Control Method

ZHU Jinghao，*ZHANG Jie*

(Department of Mathematics，Tongji University，Shanghai 200092，China)

Abstract：It is studied how to get solution to global optimization of the concave function problem. The relationship equal in value between the global optimization of concave function problem and the corresponding optimal control problem is established. The result shows that，with Krotov's extension method，the solution to a kind of global optimization of concave function problem can be obtained by constructing auxiliary functions. Furthermore，the method is applied to other concave objective functions. Some examples are given to illustrate the method.

Key words：concave function；global optimization；optimal control；Krotov's extension method

1　凹函数全局最优化问题及其等价的最优控制问题

考虑如下有球体约束的非凸全局最优化问题：

$$\mathrm{P}_0:\ \min P(\boldsymbol{x})$$
$$\text{s.t. } \boldsymbol{x}\in D=\{\boldsymbol{x}\in R \mid \|\boldsymbol{x}\|\leqslant 1\} \tag{1}$$

其中 $P(\boldsymbol{x})$ 是 D 上的二阶连续可微函数，且为 D 上非凸函数($\nabla^2 P(\boldsymbol{x})$ 半负定).这个问题通常是作为一般优化问题的子问题出现的.当 $P(\boldsymbol{x})$ 为一般非线性函数时这个问题是非确定性多项式难题.在这方面的研究中，当 $P(\boldsymbol{x})$ 是个严格非凸二阶连续可微函数时，J.zhu[1]利用Canonical对偶函数，给出了问题 P_0 精确解的一些结果.但是其方法依赖于目标函数的Hessian矩阵在单位球面上的正定移动(shift)的可行性.而即便对于诸如 $P(x)=-x^4-x^2+x$ 这样简单的凹函数，在 $x=\pm1$ 上也没有这样的正定移动[1].因为，由Karush-Kuhn-Tucker方程 $P'(x)+\rho I=0$，$x^2=1$ 可得到乘子 $\hat{\rho}_1=5$，$\hat{\rho}_2=7$，分别对应 $\hat{x}_1=1$，$\hat{x}_2=-1$，但是 $P''(\hat{x}_i)+\hat{\rho}_i<0(i=1,2)$.本文考虑将全局最优化问题转化为下列最优控制问题：

$$\mathrm{P}_1:\ \min P(\boldsymbol{x}(1))$$
$$\text{s.t. } \dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{u} \tag{2}$$
$$\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{0},\ \|\boldsymbol{u}\|\leqslant 1,\ t\in[0,1]$$

以下命题1说明最优化问题 P_0 等价于最优控制问题 P_1.

命题1　若 $\boldsymbol{x}^*$ 为问题 P_0 的最优解，则控制函数 $\hat{\boldsymbol{u}}(t)=\boldsymbol{x}^*$，$\forall t\in[0,1]$ 为 P_1 的最优控制；反之，若 $\hat{\boldsymbol{u}}(\cdot)$ 为 P_1 的最优控制，则 $\boldsymbol{x}^*=\int_0^1\hat{\boldsymbol{u}}(t)\mathrm{d}t$ 为问题 P_0 的最优解.

证明　(1)设 $\boldsymbol{x}^*$ 为问题 P_0 的最优解，要证控制函数 $\hat{\boldsymbol{u}}(t)=\boldsymbol{x}^*$，$\forall t\in[0,1]$ 为 P_1 的最优控制，易见相应的轨道为 $\hat{\boldsymbol{x}}(t)=t\boldsymbol{x}^*$.事实上，对任一问题 P_1

收稿日期：2010-09-25
基金项目：国家自然科学基金(10671145)
第一作者：朱经浩(1949—)，男，教授，博士生导师，理学博士，主要研究方向为数学规划、最优控制.E-mail：jinghaok@online.sh.cn
通讯作者：张　洁(1987—)，女，硕士生，主要研究方向为最优控制.E-mail：orangexiaojie@163.com

的允许控制 $\boldsymbol{u}(\cdot)$ 及相应的轨道 $\boldsymbol{x}(\cdot)$，从控制系统方程得到 $\boldsymbol{x}(1)=\int_0^1 \boldsymbol{u}(t)\mathrm{d}t$. 由于控制 $\boldsymbol{u}(\cdot)$ 的取值受到单位球体约束，就有 $\|\boldsymbol{x}(1)\|\leqslant\int_0^1\|\boldsymbol{u}(t)\|\cdot\mathrm{d}t\leqslant 1$. 因 $\boldsymbol{x}^*$ 为问题 P_0 的最优解，又因 $\boldsymbol{x}^*=\int_0^1\hat{\boldsymbol{u}}(t)\cdot\mathrm{d}t=\hat{\boldsymbol{x}}(1)$，所以 $P(\boldsymbol{x}(1))\geqslant P(\boldsymbol{x}^*)=P(\hat{\boldsymbol{x}}(1))$. 由此可知，控制函数 $\hat{\boldsymbol{u}}(t)=\boldsymbol{x}^*$，$\forall t\in[0,1]$ 为 P_1 的最优控制.

(2) 设 $\hat{\boldsymbol{u}}$ 为 P_1 的最优控制及相应的轨道 $\hat{\boldsymbol{x}}(\cdot)$（满足 $\hat{\boldsymbol{x}}(0)=0$），要证 $\boldsymbol{x}^*=\hat{\boldsymbol{x}}(1)=\int_0^1\hat{\boldsymbol{u}}(t)\mathrm{d}t$ 为问题 P_0 的最优解. 由于控制 $\hat{\boldsymbol{u}}(\cdot)$ 的取值受到单位球体约束，可知 $\boldsymbol{x}^*$ 是问题 P_0 的可行点. 又设 $\boldsymbol{x}$ 为问题 P_0 的任一可行点，则易见控制函数 $\bar{\boldsymbol{u}}(t)=\boldsymbol{x}$，$\forall t\in[0,1]$ 为 P_1 的一个允许控制，易见相应的轨道为 $\bar{\boldsymbol{x}}(t)=t\boldsymbol{x}$. 由于 $\hat{\boldsymbol{u}}$ 为 P_1 的最优控制，就有 $P(\boldsymbol{x})=P(\bar{\boldsymbol{x}}(1))=P(\int_0^1\bar{\boldsymbol{u}}(t)\mathrm{d}t)\geqslant P(\int_0^1\hat{\boldsymbol{u}}(t)\mathrm{d}t)=P(\hat{\boldsymbol{x}}(1))=P(\boldsymbol{x}^*)$，说明 $\boldsymbol{x}^*=\hat{\boldsymbol{x}}(1)=\int_0^1\hat{\boldsymbol{u}}(t)\mathrm{d}t$ 为问题 P_0 的最优解.

另外，问题 P_1 显然可等价地改写为

$$\begin{aligned}\mathrm{P}_2:\ &\min\int_0^1 \nabla^{\mathrm{T}}P(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{u}\mathrm{d}t\\ &\mathrm{s.t.}\ \dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{u},\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{0}\\ &\|\boldsymbol{u}\|\leqslant 1,t\in[0,1]\end{aligned}\tag{3}$$

这是因为 $\int_0^1\nabla^{\mathrm{T}}P(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{u}\mathrm{d}t=P(\boldsymbol{x}(1))-P(\boldsymbol{x}(0))=P(\boldsymbol{x}(1))-P(\boldsymbol{0})$.

这就将原最优化问题 P_0 转化成了一个有球体约束的非凸函数的最优控制问题 P_1 或 P_2. 本文试图用 Krotov 沿拓法[2-3]来求解 P_2.

2　应用 Krotov 沿拓法求解球体约束的最优控制问题

2.1　Krotov 沿拓法

一般地，对于求解最优控制问题

$$\begin{aligned}\mathrm{P}_3:\ &\min\left\{J(\boldsymbol{u})=\int_0^T G(t,\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{u}(t))\,\mathrm{d}t\right\}\\ &\mathrm{s.t.}\ \dot{\boldsymbol{x}}=f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}),\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0\in\mathbf{R}^n\\ &\boldsymbol{u}\in U\in\mathbf{R}^m,t\in[0,T]\end{aligned}$$

可考虑构造辅助函数以得到 P_3 等价形式. Krotov 沿拓法[2]就是构造一个辅助函数

$$\varphi(t,\boldsymbol{x}):[0,T]\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^1$$

对这个辅助函数，令

$$\begin{aligned}R(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})=&\varphi_x^{\mathrm{T}}(t,\boldsymbol{x})f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})+\\ &\varphi_t(t,\boldsymbol{x})-G(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\end{aligned}$$

沿给定的控制函数和相应的轨道，对等式两边积分得到

$$\begin{aligned}\int_0^T R(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\mathrm{d}t=&\varphi(T,\boldsymbol{x}(T))-\\ &\varphi(0,\boldsymbol{x}(0))-J(\boldsymbol{u})\end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned}J(\boldsymbol{u})=J_\varphi(\boldsymbol{u})=&\varphi(T,\boldsymbol{x}(T))-\varphi(0,\boldsymbol{x}(0))-\\ &\int_0^T R(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\mathrm{d}t\end{aligned}\tag{4}$$

得到评价泛函 $J(\boldsymbol{u})$ 的一个与辅助函数有关的等价形式，形成一个与原问题 $\min J(\boldsymbol{u})$ 等价的沿拓问题 $\min J_\varphi(\boldsymbol{u})$. 应用 Krotov 沿拓法的关键在于研究如何得到辅助函数使得沿拓问题比原问题易于求解.

2.2　算例

$$\begin{aligned}&\min P(x)=-x^4-x^2+x\\ &\mathrm{s.t.}\ -1\leqslant x\leqslant 1\end{aligned}\tag{5}$$

由命题1知非凸全局优化问题(5)与最优控制问题

$$\begin{aligned}&\min\int_0^1(-4x^3-2x+1)\,u\mathrm{d}t\\ &\mathrm{s.t.}\ \dot{x}=u,|u|\leqslant 1\\ &x(0)=0,t\in[0,1]\end{aligned}$$

是等价的. 以下利用 Krotov 沿拓法求解之. 构造辅助函数 $\varphi(t,x)=-x^4-x^2$，注意到此辅助函数与 t 无关. 相应地有

$$\begin{aligned}R(t,x,u)=&\varphi_x^{\mathrm{T}}(t,x)f(t,x,u)+\varphi_t(t,x)-\\ &G(t,x,u)=(-4x^3-2x)u-\\ &(-4x^3-2x+1)u=-u\end{aligned}$$

由公式(4)可知，对任给的控制函数 $u(t)$

$$\begin{aligned}J(u)=&\varphi(1,x(1))-\varphi(0,x(0))-\\ &\int_0^1 R(t,x,u)\mathrm{d}t=\\ &-x^4(1)-x^2(1)-\int_0^1[-u(t)]\mathrm{d}t=\\ &-x^4(1)-x^2(1)+\int_0^1[u(t)]\mathrm{d}t\end{aligned}\tag{6}$$

可见控制函数 $\hat{u}(t)$ 是最优控制的一个充分条件是：$\varphi(1,\hat{x}(1))=\min[-x_u^4(1)-x_u^2(1)]$ 和 $\forall t\in[0,1]$，$\hat{u}(t)=\min\limits_{-1\leqslant u\leqslant 1}u$. 由原问题的控制系统的初始条件以及约束条件可知，$\min[-x_u^4(1)-x_u^2(1)]=$

$-1-1=-2$，而 $\min\limits_{-1\leqslant u\leqslant 1} u=-1$. 这样就得到一个最优控制

$$\hat{u}(t)=-1, \forall t \in[0,1] \tag{7}$$

由原问题的控制系统得到相应的最优轨道为

$$\hat{x}(t)=-t \tag{8}$$

从而由命题 1 的证明可知，$\hat{x}(1)=-1$ 是凹函数全局优化问题(5)的最优解.

3 某些推广

3.1 目标函数为 $\mathbf{R}^1$ 上的一类多项式

一般地，考虑 P_0 中的目标函数 $P(x)=q(x^2)+cx$(c 为非零常数)，其中多项式 $q(x^2)$ 的二阶导函数恒小于零. 对问题 P_2 利用 Krotov 沿拓法求解，可取辅助函数 $\varphi(t,x)=q(x^2)$ 时，易知 $\min\limits_u \varphi(1,x_u(1))=\min\limits_u q((x_u(1))^2)=q(1)$，于是有

$$J(u)=\varphi(1,x(1))-\varphi(0,x(0))-\int_0^T R(t,x,u)\mathrm{d}t= q(x_u^2(1))-\varphi(0,x(0))-\int_0^T(-cu)\mathrm{d}t$$

可见控制函数 $\hat{u}(t)$ 为最优控制的一个充分条件是：$\varphi(1,\hat{x}(1))=\min\limits_u[q(x_u^2(1))]=q(1)$ 和 $\forall t$，$\hat{u}(t)=\arg\min\limits_{-1\leqslant u\leqslant 1} cu$. 这样就得到一个最优控制

$$\hat{u}(t)=-\operatorname{sgn} c, \forall t \in[0,1] \tag{9}$$

由原问题的控制系统得到相应的最优轨道为

$$\hat{x}(t)=-(\operatorname{sgn} c)t \tag{10}$$

从而由命题 1 的证明可知，$\hat{x}(1)=-\operatorname{sgn} c$ 是凹函数非凸全局优化问题(5)的最优解.

3.2 目标函数为 $\mathbf{R}^n$ 上的一类多项式

一般地，考虑 P_0 中的目标函数 $P(\boldsymbol{x})=q(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x})+\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$，($\boldsymbol{c}$ 为非零常向量)，其中多项式 $q(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x})$ 的 Hessian 矩阵为负定. 利用 Krotov 沿拓法求解.

$$\min \int_0^1 \nabla^{\mathrm{T}} P(\boldsymbol{x})\, \boldsymbol{u} \mathrm{d}t$$
$$\text{s.t. } \dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{u}, \|\boldsymbol{u}\| \leqslant 1$$
$$\boldsymbol{x}(0)=\mathbf{0}, t \in[0,1]$$

可取辅助函数为 $\varphi(t,\boldsymbol{x})=q(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x})$，相应地有

$$\begin{aligned} R(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) &= \varphi_x^{\mathrm{T}}(t,\boldsymbol{x}) f(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})+\varphi_t(t,\boldsymbol{x})-G(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})= \\ &\nabla^{\mathrm{T}} q(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}-(\nabla^{\mathrm{T}} q(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x})+\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{u}= \\ &-\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u} \end{aligned}$$

于是有

$$J(\boldsymbol{u})=\varphi(1,\boldsymbol{x}(1))-\varphi(0,\boldsymbol{x}(0))-\int_0^T R(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\mathrm{d}t=q((\boldsymbol{x}_u(1))^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_u(1)))-\varphi(0,\boldsymbol{x}(0))-\int_0^T(-\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u})\mathrm{d}t$$

易知

$$\min_{\boldsymbol{u}} \varphi(1,\boldsymbol{x}_u(1))=\min_{\boldsymbol{u}} q((\boldsymbol{x}_u(1))^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_u(1)))=q(1)$$

可见控制函数 $\hat{\boldsymbol{u}}(t)$ 为最优控制的一个充分条件是：$\varphi(1,\hat{\boldsymbol{x}}(1))=\min\limits_{\boldsymbol{u}}[q(\boldsymbol{x}_u^{\mathrm{T}}(1)\boldsymbol{x}_u(1))]=q(1)$ 和 $\forall t$，$\hat{\boldsymbol{u}}(t)=\arg\min\limits_{\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}\leqslant 1} \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}$. 这样就得到一个最优控制

$$\hat{\boldsymbol{u}}(t)=-\left(\frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c}}}\right)\boldsymbol{c}, \forall t \in[0,1] \tag{11}$$

由原问题的控制系统得到相应的最优轨道为

$$\hat{\boldsymbol{x}}(t)=-\left(\frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c}}}\right)\boldsymbol{c}\, t \tag{12}$$

从而由命题 1 的证明可知，$\hat{\boldsymbol{x}}(1)=-\left(\frac{1}{\sqrt{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{c}}}\right)\boldsymbol{c}$ 是全局优化问题(5)的最优解.

3.3 $\mathbf{R}^2$ 上的例子

$$\min\{P(\boldsymbol{x})=\cos(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x})+\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\}$$
$$\text{s.t. } \|\boldsymbol{x}\| \leqslant 1 \tag{13}$$

其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{c}=(1,2)^{\mathrm{T}}$. 利用初等运算易知 $P(\boldsymbol{x})$ 的 Hessian 矩阵

$$\nabla^2 P(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix} -2\sin(x_1^2+x_2^2)-4x_1^2\cos(x_1^2+x_2^2) & -4x_1x_2\cos(x_1^2+x_2^2) \\ -4x_1x_2\cos(x_1^2+x_2^2) & -2\sin(x_1^2+x_2^2)-4x_2^2\cos(x_1^2+x_2^2) \end{pmatrix}$$

是负定的，考虑用上述方法求解全局优化问题(13). 取辅助函数为 $\varphi(t,\boldsymbol{x})=\cos(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x})$，相应地有

$$R(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})=-\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}$$

从而

$$J(\boldsymbol{u})=\varphi(1,\boldsymbol{x}(1))-\varphi(0,\boldsymbol{x}(0))-\int_0^T R(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\mathrm{d}t=\cos((\boldsymbol{x}_u(1))^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}_u(1)))-1-\int_0^T(-\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u})\mathrm{d}t$$

由于三角余弦函数在区间[0,1]上严格递减，可知控制函数 $\hat{\boldsymbol{u}}(t)$ 为最优控制的一个充分条件是：$\varphi(1,\hat{\boldsymbol{x}}(1))=\min\limits_{\boldsymbol{u}}[q(\boldsymbol{x}_u^{\mathrm{T}}(1)\boldsymbol{x}_u(1))]=\cos(1)$ 和 $\forall t$，

(下转第 1882 页)