

考虑土体非线性的部分埋入群桩竖向振动分析

钟锐^{1,2}, 黄茂松^{1,2}, 任青³, 林毅峰⁴

(1. 同济大学 地下建筑与工程系, 上海 200092; 2. 同济大学 岩土及地下工程教育部重点实验室, 上海 200092;
3. 上海理工大学 土木工程系, 上海 200093; 4. 上海勘测设计研究院, 上海 200092)

摘要: 在桩基振动问题中, 桩侧土往往表现出显著的非线性特性, 土体动模量和阻尼的大小与桩身位移相关. 目前的分析方法一般只采取恒定的土性参数, 忽略了非线性的影响. 基于部分埋入群桩竖向振动的研究成果, 以桩身位移与土性参数之间的相互关系为依据, 运用迭代方法考虑了土体非线性对部分埋入群桩振动的影响, 分析了迭代收敛的条件, 并通过算例分析了非线性的影响程度, 观察了它与荷载大小的关系. 最后, 将该方法应用于分析某海上风力发电机组群桩基础的振动特性, 得到其阻抗值及位移响应曲线.

关键词: 非线性; 部分埋入; 竖向振动; 迭代方法

中图分类号: TU 435

文献标识码: A

Analysis of Dynamic Response of Partially Embedded Pile Group with a Consideration of Soil Nonlinearities in Vertical Vibration

ZHONG Rui^{1,2}, HUANG Maosong^{1,2}, REN Qing³, LIN Yifeng⁴

(1. Department of Geotechnical Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. Key Laboratory of Geotechnical and Underground Engineering of the Ministry of Education, Tongji University, Shanghai 200092, China; 3. Department of Civil Engineering, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China; 4. Shanghai Investigation, Design & Research Institute, Shanghai 200092, China)

Abstract: As for the problem of pile vibration, the properties of the soils surrounding the pile are always nonlinear, that is, the dynamic module and damping of the soil are associated with the displacements of the pile shaft. In present methods, only constant properties of the soil are adopted, but the nonlinearities are neglected. Based on the achievements of the research on vertical dynamic response of partially embedded pile groups, nonlinearities are taken into consideration through the method of calculating pile shaft displacements and soil

properties by iterative method according to the interrelationships between them, and iterative convergence is also analyzed. Taking 3×3 pile group for example, the effect of soil nonlinearities are analyzed, and the relationships between it and the load value are observed. Finally this method is used to predict the dynamic response of the pile group foundation of an offshore wind turbine generator, gaining its impedances and displacement response curves.

Key words: nonlinearity; partially embedded; vertical vibration; iterative method

作为一种经济可靠的基础形式, 部分埋入群桩在我国近海工程和港口工程中得到了越来越广泛的应用. 自 20 世纪 60 年代起, 各国学者就对桩基振动问题进行了大量研究, Mylonakis 和 Gazetas^[1] 以及吴志明等^[2] 基于动力 Winkler 地基梁模型, 提出简化方法用于分析层状地基中单桩和群桩的竖向振动特性. 自 20 世纪末以来, 国内外关于部分埋入桩的研究越来越多, Catal^[3-4] 采用 Timoshenko 梁模型, 对剪力、弯矩和轴力共同作用下的单桩运动方程进行了研究, 探讨了不同埋入比(外伸部分与埋入部分长度比值)与边界条件对单桩振动稳定性的影响. 本文作者^[5] 采用动力 Winkler 地基梁模型, 建立部分埋入群桩竖向振动模型, 对层状地基中部分埋入群桩的竖向振动特性进行了研究.

在本文作者^[5] 的模型中, 土体动剪切模量及阻尼比为恒值. 事实上, 土体的动剪切模量和阻尼比具有十分显著的非线性特性. 随着动应变的发展, 模量逐渐降低, 阻尼比逐渐上升, 二者变化量均十分可观. 因此, 在桩基振动分析中, 考虑土体非线性特性的影响具有十分重要的意义.

收稿日期: 2010-10-11

基金项目: 国家自然科学基金(90915011); 国家杰出青年科学基金(50825823)

第一作者: 钟锐(1986—), 男, 博士生, 主要研究方向为土动力学. E-mail: 0zhongrui@tongji.edu.cn

通讯作者: 黄茂松(1965—), 男, 教授, 博士生导师, 工学博士, 主要研究方向为岩土工程. E-mail: mshuang@tongji.edu.cn

不少学者对土体非线性特性进行了研究,提出了各种模型与分析方法. El Naggar 等^[6]考虑土体非线性、能量消散、土体粘滞阻尼及荷载等因素的影响,对瞬态荷载和简谐荷载作用下的桩基振动特性进行了研究. Wu 等^[7]认为土体模量及阻尼依赖于应变值的大小,利用有限元方法对单桩及群桩的振动问题进行了模拟,并通过离心机试验验证了其方法的合理性. Michaelides 等^[8]认为桩基竖向振动时,土体动剪切模量和阻尼比的变化规律与桩土距离、塑性指数等因素有关,提出了一种用于分析非线性地基中桩基竖向振动特性的方法.

本文在文献[5]工作的基础上,结合土体动力非线性 Hardin-Drnevich 模型^[9],利用迭代方法分析了考虑土体非线性的部分埋入群桩的竖向振动特性. 通过群桩算例对非线性计算的影响因素进行了探讨. 最后,将本文方法用于分析某海上风力发电机组群桩基础的振动特性,为工程实践提供理论依据.

1 基本理论及计算方法

1.1 部分埋入群桩振动分析理论

本文作者^[5]基于动力 Winkler 地基梁模型,提出了考虑群桩中“被动桩”与土体动力相互作用的完全埋入和部分埋入群桩动力分析模型.

1.1.1 单桩分析

单桩模型如图 1 所示,外伸部分(以上标或下标 1 表示)振动方程为

$$\frac{d^2 w_1^1(z)}{dz^2} + \left(\frac{\lambda_{1i}}{h_i}\right)^2 w_1^1(z) = 0 \quad (1)$$

式中: w_1^1 为桩身竖向位移; $\lambda_{1i} = h_i \sqrt{\frac{m_p \omega^2}{E_p A_p}}$, h_i 为单元长度, m_p , E_p 及 A_p 分别为桩身单位长度质量、弹性模量及截面面积, ω 为振动圆频率.

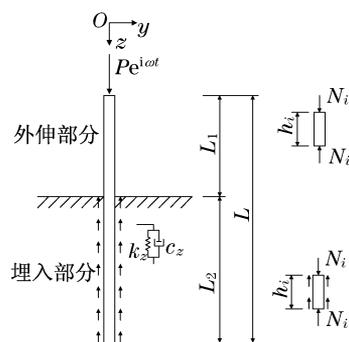


图 1 部分埋入单桩竖向振动计算简图

Fig. 1 Vertical vibration of partially embedded single pile

采用传递矩阵法求得外伸部分底部与顶部位移及轴力之间的关系

$$\begin{Bmatrix} w^1(L_1) \\ N^1(L_1) \end{Bmatrix} = [T_1^1] \begin{Bmatrix} w^1(0) \\ N^1(0) \end{Bmatrix} \quad (2)$$

式中: $[T_1^1]$ 为外伸部分的自传递矩阵, 详见文献[5].

埋入部分振动方程与式(1)相似, 得到结果与式(2)相似. 仅需将各参数中上、下标由 1 改为 2 即可.

其中 $\lambda_{2i} = h_i \sqrt{\frac{m_p \omega^2 - k_{zi} - i\omega c_{zi}}{E_p A_p}}$, k_z 和 c_z 为桩周土动力 Winkler 参数, 文献[5]中采用了 D. Angelides 提出的简化表达式

$$\begin{cases} k_z \approx 0.6 E_s (1 + 0.5 \sqrt{a_0}) \\ c_z \approx 2 D_s k_z / \omega + \pi \rho_s V_s d a_0^{-1/4} \end{cases} \quad (3)$$

式中: E_s , D_s , ρ_s 和 V_s 分别为土体弹性模量、阻尼比、密度和剪切波速; d 为桩径; a_0 为量纲一频率.

结合两部分, 得桩尖与桩顶位移、轴力关系为

$$\begin{Bmatrix} w(L) \\ N(L) \end{Bmatrix} = [T_2^2][T_1^1] \begin{Bmatrix} w(0) \\ N(0) \end{Bmatrix} = [T^1] \begin{Bmatrix} w(0) \\ N(0) \end{Bmatrix} \quad (4)$$

式中: $[T_2^2]$ 为埋入部分的自传递矩阵; $[T^1]$ 为整根桩的自传递矩阵, 详见文献[5]. 结合桩底边界条件, 通过式(4)可导出单桩竖向阻抗 $R^s = K^s + iC^s = N(0)/w(0)$ (K^s , C^s 分别为刚度和阻尼).

1.1.2 相互作用因子分析

主动桩位移 w_{11}^2 引发被动桩位移 w_{21}^2 , 被动桩单元平衡方程为

$$\frac{d^2 w_{21}^2(z)_i}{dz^2} + \left(\frac{\lambda_{2i}}{h_i}\right)^2 w_{21}^2(z)_i = - \frac{(k_{zi} + i\omega c_{zi}) \psi(s) w_{11}^2(z)_i}{E_p A_p} \quad (5)$$

$$\psi(s) \approx \sqrt{\frac{d}{2s}} \exp\left[-\frac{(D_s + i)\omega(s - 0.5d)}{V_s}\right] \quad (6)$$

式中: $\psi(s)$ 为位移衰减因子; s 为桩距.

解式(5)可得到被动桩埋入部分第 i 单元两端点间位移、轴力的传递表达式为

$$\begin{Bmatrix} w_{21}^2(h_i) \\ N_{21}^2(h_i) \end{Bmatrix}_i = [t_2^1]_i \begin{Bmatrix} w_{21}^2(0) \\ N_{21}^2(0) \end{Bmatrix}_i + [t_2^2]_i \begin{Bmatrix} w_{11}^2(0) \\ N_{11}^2(0) \end{Bmatrix}_i \quad (7)$$

式中: $[t_2^1]_i$ 为被动桩桩身单元自传递矩阵, $[t_2^2]_i$ 为主动桩与被动桩桩身单元之间的互传递矩阵, 详见文献[5]. 利用两桩桩尖及桩顶的边界条件, 通过式(7)传递, 并结合未埋入部分传递方程(式(2)), 可将被动桩桩顶位移 $w_2^1(0)$ 用主动桩桩顶位移 $w_1^1(0)$ 表

示出来,进而导出相互作用因子 α_{21} 表达式.

1.1.3 群桩分析

根据平衡及变形条件,可得以下矩阵方程组:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & 1 & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ -1 & \alpha_{21} & 1 & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^G R^s \\ P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P^G \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

式中: P^G , w^G 分别为刚性承台中心竖向荷载与位移幅值; P_j ($j=1, \dots, n$) 为 j 桩分担的荷载. 解上述方程组,进而求得群桩阻抗为

$$R^G = K^G + iC^G = \frac{P^G}{w^G} \quad (9)$$

式中: K^G , C^G 分别为刚度和阻尼.

1.2 桩身位移及桩周土应变计算

将土层细分为 m 层,以确保动位移计算精度. 由式(8)可求出各桩分担荷载 P_j ($j=1, \dots, n$) 及承台竖向动位移 w^G , 通过式(2)可求得各桩在地表处的动位移 $w_j(0)$ 和动内力 $N_j(0)$ ($j=1, \dots, n$).

式(7)为仅有两根桩时的主动桩-被动桩位移和内力的传递表达式. 在群桩分析中, j 桩桩身位移和内力可通过该式进行求解,考虑 $n-1$ 根桩的影响,式(7)改写为

$$\begin{cases} w_j(h_i) \\ N_j(h_i) \end{cases}_i = [t_2^1]_i \begin{cases} w_j(0) \\ N_j(0) \end{cases}_i + \sum_{k=1, k \neq j}^n \left[[t_2^2]_i \begin{cases} w_k(0) \\ N_k(0) \end{cases}_i \right] \quad (10)$$

式中: $i=1, \dots, m$, 为土层编号.

由式(10)求得桩身动位移后,结合桩、土之间无滑移的假定,可得桩周土动应变为

$$(\gamma_s)_j = \frac{(k_z + i\omega c_z) w_j}{\pi d G_s} \quad (11)$$

式中: G_s 为桩侧土动剪切模量. 下面讨论动剪切模量 G_s 和阻尼比 D_s 随动应变 γ_s 变化的非线性特性.

1.3 非线性特性

对不同围压下的土样进行共振柱实验,得到土样最大动剪切模量 G_{smax} , 以及动剪切模量 G_s 和阻尼比 D_s 随动应变 γ_s 变化的关系曲线. 通过对这些曲线的拟合,可以确定土体非线性特性的关键参数.

根据 Hardin 和 Richart 经验公式^[10]

$$G_{smax} = KP_a (\sigma'_m / P_a)^n \quad (12)$$

式中: P_a 为大气压; σ'_m 为围压; K, n 根据实验结果拟合确定.

根据 Hardin-Drnevich 模型^[9]

$$\frac{G_s}{G_{smax}} = \frac{1}{1 + \gamma_s / \gamma_r} \quad (13)$$

$$D_s = D_{smax} (1 - G_s / G_{smax}) \quad (14)$$

式中: γ_r 为土体参考剪应变; D_{smax} 为最大阻尼比,根据实验结果拟合确定.

基于以上理论,可利用迭代方法对部分埋入群桩竖向振动问题进行分析,基本步骤如下:

(1) 利用共振柱试验确定土层 4 个基本参数.

(2) 根据土层自重应力分布情况,由式(12)确定土层最大动剪切模量 G_{smax} .

(3) 动剪切模量初值 $G_s^1 = G_{smax}$, 并由式(14)得到阻尼比初值 $D_s^1 = 0$, 按照 1.1 和 1.2 节方法求出桩身位移 w^1 及桩周土动应变 γ_s^1 .

(4) 根据式(13)和(14)求出新的模量 G_s^k 和阻尼比 D_s^k ($k=2, 3, \dots$, 表示迭代次数).

(5) 采用新参数 G_s^k 和 D_s^k , 重复步骤(3), 求出新的桩身位移 w^k 及桩周土动应变 γ_s^k .

(6) k 增加 1, 重复步骤(4)~(6)直至收敛.

1.4 迭代收敛性分析

每次迭代计算中,仅改变 G_s 和 D_s 大小,而其余参数保持不变,所计算出动剪应变可表示为

$$\gamma_s^k = f(G_s^k, D_s^k), k=1, 2, 3, \dots \quad (15)$$

忽略阻尼比 D_s 的影响,在荷载恒定的情况下,动剪应变与动剪切模量基本成反比关系,即

$$\gamma_s^k = \gamma_s^1 G_{smax} / G_s^k \quad (16)$$

设定当相邻两次迭代计算动应变差值的绝对值小于某给定正数小值 Δ_γ 时迭代收敛. 根据式(16)与(13),第 $k+2$ 次与第 $k+1$ 次迭代计算应变差值的绝对值为

$$|\gamma_s^{k+2} - \gamma_s^{k+1}| = (\gamma_s^1 / \gamma_r) |\gamma_s^{k+1} - \gamma_s^k| \quad (17)$$

若第 $k+2$ 次计算后,迭代收敛,则有

$$|\gamma_s^{k+2} - \gamma_s^{k+1}| = (\gamma_s^1 / \gamma_r)^k |\gamma_s^2 - \gamma_s^1| < \Delta_\gamma \quad (18)$$

当 Δ_γ 取值任意时,迭代均能收敛的充要条件为

$$\gamma_s^1 / \gamma_r < 1 \quad (19)$$

即首次计算的动应变值应小于土体参考剪应变. 可见,荷载过大、桩长或桩径不够、土体初始模量过小以及土体参考剪应变过小都有可能迭代不收敛. 因此,本方法仅适合小变形情况.

2 方法验证与算例分析

2.1 方法验证

对埋置于墨西哥粘土中方形截面桩的竖向荷载-

位移关系曲线进行计算,与 Michaelides 法^[8]及文献^[8]中的实测值和有限元结果进行对比.桩长为 15 m,截面边长为 0.3 m,土体剪切模量为 $G_s = 6\,800$ kPa,泊松比为 $\nu = 0.45$,塑性指数 $I_p \leq 200$.本文方法计算所需的参数 γ_r 和 D_{smax} 可由 Michaelides 法的非线性曲线(取决于 I_p)按式(13)和(14)进行拟合而得.拟合得本文方法和 Michaelides 法的土体非线性曲线比较如图 2 所示,其中模量衰减规律一致,阻尼由于模型起点不同而有差异,因为计算结果主要决定于模量大小,故阻尼上该差异不会对结果产生较大影响.

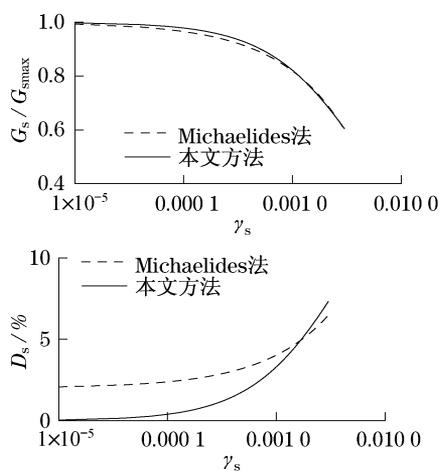


图2 非线性本构关系比较

Fig.2 Comparison of constitutive relations

位移-荷载曲线对比如图 3 所示,发现本文与其他两种方法计算结果及实测值相符较好,验证了本文方法的正确性.

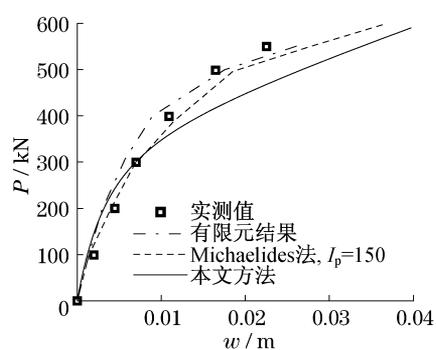


图3 位移-荷载曲线对比

Fig.3 Comparison of displacement-load curves

2.2 算例分析

本节对均质土中 3×3 刚性承台群桩基础竖向振动特性进行分析.桩位布置如图 4 所示.桩身埋入部分长度为 $L_2 = 12$ m,外伸部分长度为 L_1 ,桩径 $d = 0.8$ m,桩身密度为 $2\,500$ $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$,弹性模量为

2.1×10^{10} Pa,泊松比为 0.167.均质土最大动剪模量 G_{smax} 为 2.1×10^7 Pa,泊松比为 0.4,密度为 $2\,000$ $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$.土体非线性模型参数 γ_r 和 D_{smax} 分别取值为 0.001 5 和 19%,非线性本构关系如图 5 所示.

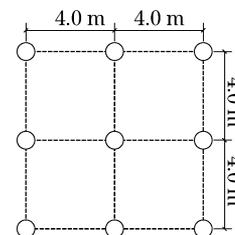
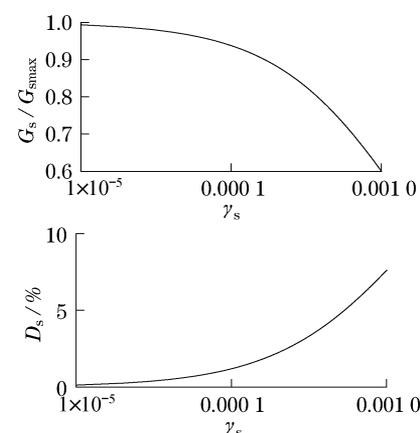
图4 3×3 群桩桩位布置图Fig.4 Pile layout of 3×3 pile group

图5 非线性本构关系曲线

Fig.5 Nonlinear constitution relations

图 6 为该群桩基础中单桩阻抗随频率 α_0 的变化曲线.由图 6 可知:①桩身外伸部分的存在使得单桩阻抗降低;②不论对完全埋入桩还是部分埋入桩,非线性的考虑均使阻抗降低;③荷载越大,单桩阻抗降低幅度也越大,这是因为荷载越大,桩侧土应变也就越大,从而使模量和阻尼比分别产生更大幅度的降低和增大.

图 7 和图 8 分别为角桩-边桩相互作用因子 α 和群桩阻抗效率因子随频率变化的曲线.由图 7 可知:①非线性的考虑给桩-桩相互作用因子带来的变化幅度较小,不易观察;②通过与线性计算下的位移衰减因子 $\psi(s)$ (式(6))对比发现,完全埋入桩的相互作用因子与 $\psi(s)$ 十分接近,而部分埋入桩由于外伸部分的影响,其相互作用因子与 $\psi(s)$ 相比有较大差异.

由图 8 可知:①桩身外伸部分的存在使得曲线几乎向低频区发生了平移;②整体上,土体非线性的考虑使得群桩效率因子增大,这是因为当土体模量变小时,桩-桩相互作用和影响也变小(可通过式(6)

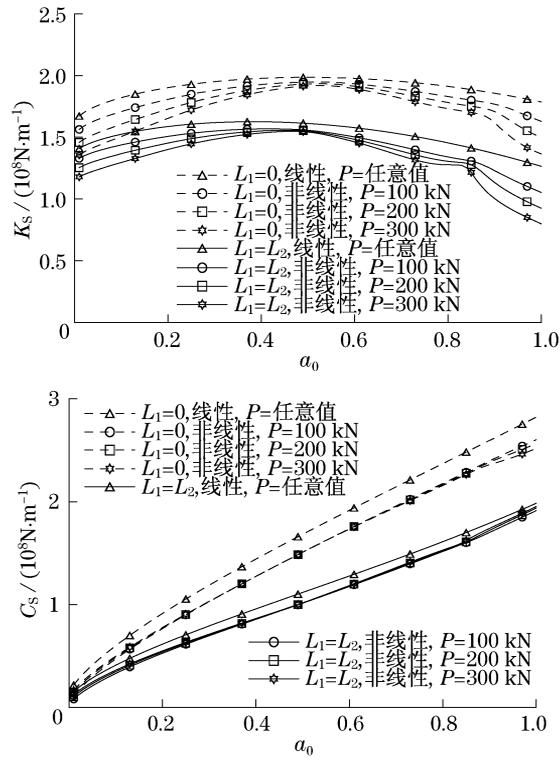


图 6 3×3 群桩中单桩阻抗

Fig.6 Single pile impedance in 3×3 pile group

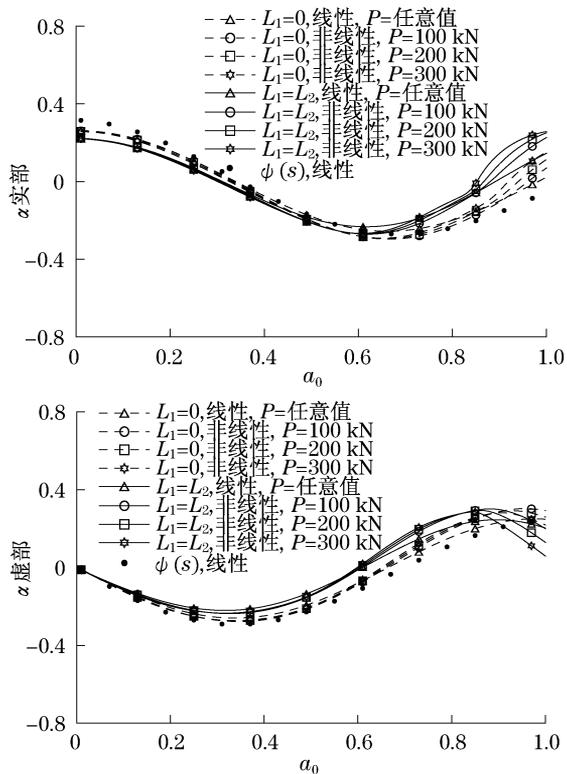


图 7 3×3 群桩中桩-桩相互作用因子

Fig.7 Pile-to-pile interaction factor in 3×3 pile group

发现这一点), 虽然由图 7 难以看出考虑非线性后某两桩之间相互作用因子的变化, 但通过群桩中的两

两叠加, 这种变化以群桩效率因子增大的形式表现出来.

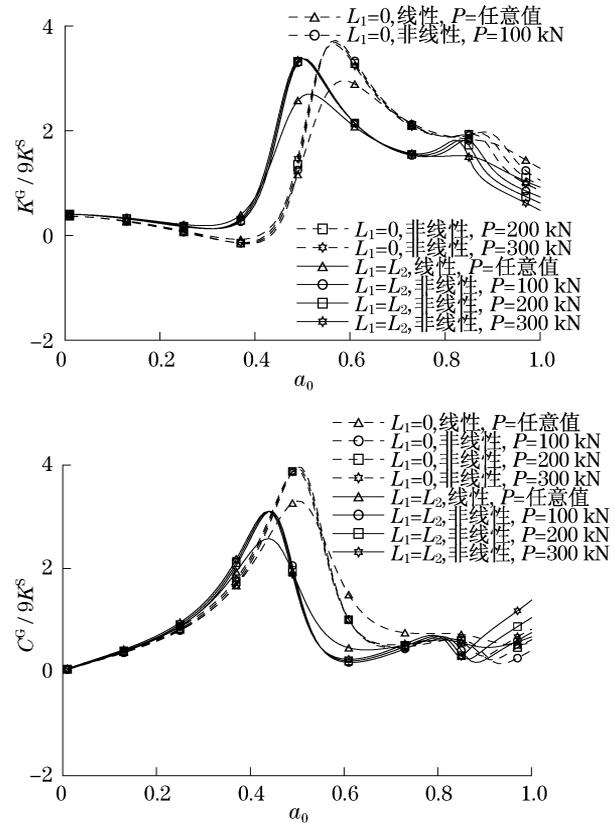


图 8 3×3 群桩阻抗效率因子

Fig.8 Efficiency factor of 3×3 pile group

由图 6 可以观察到, 荷载的增加与阻抗的下降几乎呈线性关系, 图 9 的曲线更证实了这一点. 图 9 为 $a_0 = 0.6$ 时, 3×3 完全埋入群桩阻抗随荷载的变化规律, 曲线显示群桩阻抗与荷载呈现出明显的线

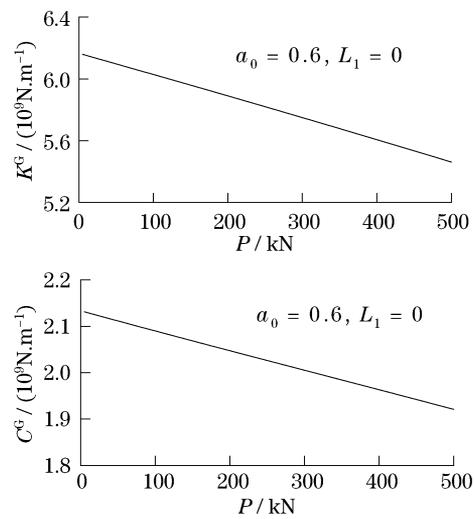


图 9 阻抗-荷载关系曲线

Fig.9 Impedance-load relationship

性关系. 当然,这种关系不会随荷载无限增大而一直保持,因为当荷载过大时,已不满足本方法所需要的小变形假定,不再适合用本文方法求解.

3 工程实例

图 10 为某海上风力发电机组群桩基础示意图,桩身尺寸及布置如图所示,承台作用有幅值为 1.0×10^4 kN 的竖向简谐荷载. 桩身材料及土层参数见表 1,其中非线性 4 个基本参数由共振柱试验确定. 图 11 为第一层土某试样共振柱试验曲线,从图中可以观察动剪切模量和阻尼比随动应变的变化规律. 限于篇幅,本文不详细给出各层土的曲线.

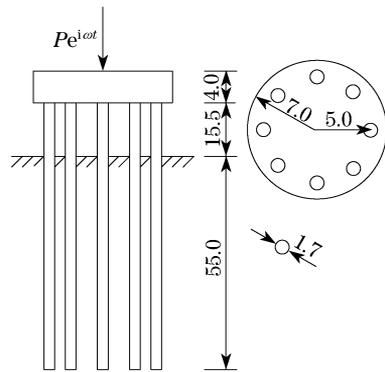


图 10 风机群桩基础计算简图(单位:m)
Fig.10 Schematic illustration of pile foundation (unit:m)

表 1 计算参数

Tab.1 Mechanical parameters for calculation

层号	层厚/ m	重度/ (kN·m ⁻³)	K	n	$\gamma_r / 10^{-4}$	D_{smax}	泊松比
1	3.83	17.50	312.92	0.54	5.05	19.53	0.33
2	10.67	17.30	245.54	0.73	5.81	18.98	0.33
3	4.06	17.84	316.04	0.62	6.54	16.46	0.35
4	10.60	20.83	656.25	0.46	5.55	15.58	0.35
5	3.44	18.50	656.25	0.46	5.55	15.58	0.33
6	3.75	19.00	776.43	0.65	7.95	14.22	0.33
7	11.19	22.45	735.42	0.61	7.40	15.44	0.32
8	33.22	19.80	763.12	0.66	7.69	13.65	0.30
桩		78.00					0.25

图 12 给出了该基础竖向阻抗与频率的关系,并与只作线性计算的结果进行对比. 图 13 为第 1 层土的最大动应变(该“最大”表示取不同桩侧土应变值中的最大者)-频率曲线,由于图 11 共振柱试验结果中的土体动应变具有一定范围($0 \sim 3 \times 10^{-4}$),如果

算例中土体的实际动应变值不处于这个范围内,显然不能采用该试验曲线来确定土体的非线性特性. 所以除保证迭代收敛外,还需要验算土层的最大动应变是否处于共振柱试验结果中的应变范围之内.

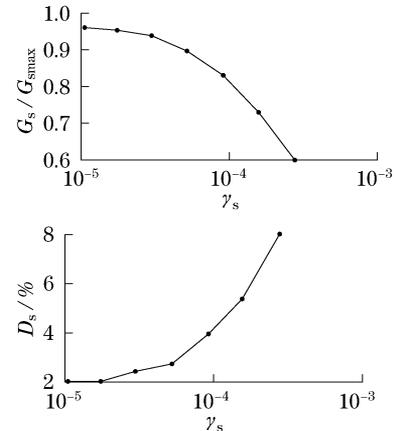


图 11 第 1 层土共振柱试验曲线
Fig.11 Resonant column test curves of the first layer

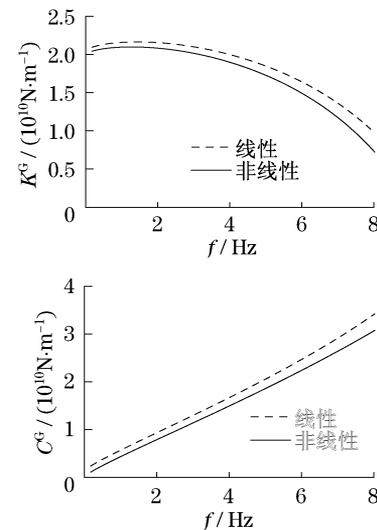


图 12 群桩阻抗曲线
Fig.12 Impedances of pile group

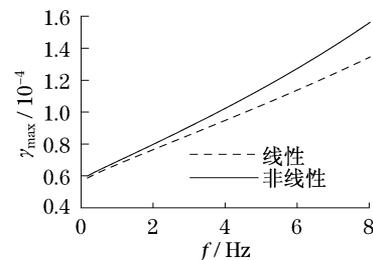


图 13 表层土最大剪应变
Fig.13 Max strain of the 1st layer

图 13 显示第 1 层土最大动应变确实处于图 8 曲线的应变范围,采用同样的方法验算其他各层土的最大动应变也处于相应共振柱试验应变范围内(曲线不详细给出),从而验证了该算例计算的合理性.图 12 显示,非线性的考虑使得基础的阻抗降低.图 14 为该基础的在该简谐荷载作用下的位移曲线,可见非线性的考虑使得基础位移增大,因而非线性的考虑将使基础设计更安全.

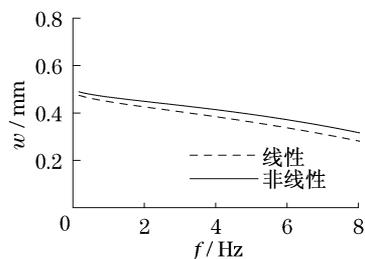


图 14 位移曲线

Fig.14 Displacement curve

4 结论

本文提出一种考虑土体非线性的部分埋入群桩竖向振动的分析方法.首先利用共振柱试验确定土体的非线性特性,然后结合文献[5]的线性计算模型,通过迭代方法对群桩振动问题进行了分析.对迭代收敛性进行了判定,发现任何导致初次计算动应变值大于土体参考剪应变的因素均有可能导致迭代不收敛,从而限制了本文方法的小变形适用范围.对 3×3 部分埋入群桩的竖向振动问题进行了研究,分析发现土体非线性的考虑使得群桩中单桩阻抗值发生较大幅度的降低,却使群桩效率因子得到一定的增加,同时研究了荷载大小的影响,得出阻抗随荷载几近线性的变化规律.最后,采用本文方法对某海上风电场风机基础的竖向振动特性进行了分析,其非线性土性参数通过共振柱试验得到,阻抗及位移响应分析结果显示了非线性考虑前后的差异,为工程实践提供了理论依据.

本文非线性研究的基本方法是迭代方法,采用的本构模型为 Hardin-Drnevich 模型^[9],而参数的选择则依赖于共振柱试验.与经验公式相比,采用试验方法来确定关键参数显然更具可靠性,当然,如果追求简便易行,也可以采取经验公式作为土体非线性本构模型,例如文献[8]中所提出的方法.

参考文献:

- [1] Mylonakis G, Gazetas G. Vertical vibration and additional distress of pile groups in layered soil[J]. Soils and Foundations, 1998, 38(1):1.
- [2] 吴志明,黄茂松,任青.层状地基中群桩竖向振动及动内力[J].同济大学学报:自然科学版,2007,35(1):21.
WU Zhiming, HUANG Maosong, REN Qing. Vertical vibration and internal forces of pile groups in layered soil[J]. Journal of Tongji University: Natural Science, 2007, 35(1): 21.
- [3] Catal H H. Free vibration of partially supported piles with the effects of Bending moment, axial and shear force[J]. Computers & Structures, 2002, 24: 1615.
- [4] Catal H H. Free vibration of semi-rigid connected and partially embedded piles with the effects of the bending moment, axial and shear force[J]. Engineering Structures 2006, 28: 1911.
- [5] 任青,黄茂松,钟锐,等.部分埋入群桩的竖向振动特性[J].岩土工程学报,2009,31(9):1384.
REN Qing, HUANG Maosong, ZHONG Rui, et al. Vertical vibration of partially embedded pile groups[J]. Chinese Journal Geotechnical Engineering, 2009, 31(9): 1384.
- [6] El Naggar M H, Novak M. Non-linear model for dynamic axial pile response[J]. Journal of Geotechnical Engineering, ASCE, 1994, 120(2): 308.
- [7] Wu G X, Finn W D L. Dynamic nonlinear analysis of pile foundations using finite element method in the time domain[J]. Canadian Geotechnical Journal, 1997, 34(1): 44.
- [8] Michaelides O, Gazetas G, Bouckovalas G, et al. Approximate non-linear dynamic axial response of piles[J]. Geotechnique, 1997, 48(1): 33.
- [9] Hardin B O, Drnevich V P. Shear modulus and damping in soils: design equations and curves[J]. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, 1972, 98(7): 667.
- [10] Hardin B O, Richart F E Jr. Elastic wave velocities in granular soils [J]. Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, 1963, 89(1): 33.