文章编号：0253-374X(2012)04-0635-05 DOI：10.3969/j.issn.0253-374x.2012.04.023

无界域上一类半线性波动方程的全离散谱格式

黄 瑜[1,2]，徐承龙[1,3]

(1. 同济大学 数学系，上海 200092；2. 南京信息工程大学 数理学院，江苏 南京 210044；
3. 上海市科学计算 E-研究院及上海市科学计算重点实验室，上海 200234)

摘要：考察一类带有强阻尼项的半线性波动方程在无界区域上的数值解问题. 建立了全离散的谱格式，空间方向上采用 Hermite 谱方法，时间方向采用二阶差分格式，给出了格式的收敛性和稳定性分析. 通过数值算例验证了方法的高精度性和有效性.

关键词：Hermite 函数；谱方法；半线性波动方程；强阻尼
中图分类号：O241.82 **文献标识码**：A

A Fully Discrete Spectral Method for Semilinear Wave Equation in Unbounded Domain

HUANG Yu[1,2], *XU Chenglong*[1,3]

(1. Department of Mathematics, Tongji University, 200092 Shanghai, China; 2. College of Math and Physics, Nanjing University of Information Science and Technology, 210044 Nanjing, China; 3. Shanghai E-Institute of Scientific Computing and Shanghai Key Laboratory of Scientific Computing, Shanghai 200234, China)

Abstract: Numerical solution for a semilinear wave equation with strong damping in unbounded domain is investigated. The fully discrete spectral scheme is constructed on the basis of the Hermite spectral method in space and a second order finite difference scheme in time. The stability and the convergence of the scheme are proved. Numerical results prove the accuracy and effectiveness of this method.

Key words: Hermite functions; spectral method; semilinear wave equation; strong-damped

近年来无界或半无界区域上的谱方法越来越受到广大的关注. 这主要是因为谱方法的高精度和无需强加人工边界条件等优点. 对于无界区域上的问题，Guo 和 Xu[1] 考虑了权函数为 e^{-x^2} 的 Hermite 多项式作为基函数的逼近问题. 其他还有很多关于将 Hermite 多项式作为基函数作逼近的文献[2-3]，但其中大部分的权函数都是非一致的，从而会加大在理论分析和数值实现过程的复杂性. 因此一些学者考虑采用 Hermite 函数作为基函数来逼近[4-5].

本文主要讨论无界域上的带强阻尼项的半线性波动方程

$$u_{tt}-\Delta u_t-\Delta u+u_t+g(x,u)=f(x,t),\quad (x,t)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^+ \tag{1}$$

其中未知函数 $u=u(x,t)$，而 $g(x,u)$ 是给定的一类关于 x 和 u 的非线性函数，例如形如 u^a 的幂函数，g 满足的非线性假设条件将在下文中给出. 问题的初始条件为

$$u(x,0)=u_0(x),u_t(x,0)=w_0(x),\forall x\in\mathbf{R},\quad \lim_{|x|\to\infty}|u(x,t)|=0,\forall t\in\mathbf{R}^+ \tag{2}$$

带有阻尼项的波动方程弱解的存在性已经有很多文献讨论过[6-9]，但是关于这类波动方程的数值解却研究得较少. Macías-Díaz 和 Puri[10] 给出了有界域上的一类带有弱阻尼项的波动方程的有限差分格式. Gülle[11] 对一类强耗散波动方程建立了关于时间的周期问题的三层差分格式，其收敛速度是$O(\Delta x^2+\Delta t^2)$.

对于问题(1)，(2)，笔者采用一类新的 Hermite 函数，即 Hermite 多项式乘上 $e^{-x^2/2}$，作为基函数来逼近. 由于随着多项式项数 N 的增加，Hermite 多项式的零点分布在整个无穷区域上，从而不需要再截断成有界区域计算. 文献[12]成功运用这种方法研究了 Dirac 方程的数值解. 由于方程(1)中强阻尼项 Δu_t 以及非线性项的出现，相应理论分析及数值计算更难于处理.

1 Hermite 函数的性质和逼近结果

为了方便起见，记 Sobolev 空间 $L^2(\mathbf{R})$，$L^p(\mathbf{R})$，

收稿日期：2011－01－17
基金项目：国家自然科学基金(11171256)；上海市教委 E-研究院项目(E03004)
第一作者：黄 瑜(1978—)，女，讲师，博士生，主要研究方向为计算数学. E-mail：huangyu@nuist.edu.cn
通讯作者：徐承龙(1963—)，男，教授，博士生导师，理学博士，主要研究方向为计算金融. E-mail：maclxu@yahoo.com.cn

$L^{\infty}(\mathbf{R})$ 和 $H^r(\mathbf{R})$ 相应的范数分别为 $\|\cdot\|$，$\|\cdot\|_{L^p}$，$\|\cdot\|_{\infty}$ 和 $\|\cdot\|_r$. $L^2(\mathbf{R})$ 与 $H^r(\mathbf{R})$ 上的内积记为 (u,v) 和 $(u,v)_r$. $|\cdot|_r$ 表示 $H^r(\mathbf{R})$ 上的半范.

记 $H_l(x)$ 为 l 次 Hermite 多项式，定义 l 次 Hermite 函数为

$$\hat{H}_l(x)=\mathrm{e}^{-x^2/2}H_l(x),\ l=0,1,2,\cdots$$

易知其满足如下的递归关系[12]：

$$\hat{H}_{l+1}(x)+2x\hat{H}_l(x)+2l\hat{H}_{l-1}(x)=0,\ l=1,2,\cdots \tag{3}$$

$$\partial_x\hat{H}_l(x)=l\hat{H}_{l-1}(x)-\frac{1}{2}l\hat{H}_{l+1}(x),\ l=1,2,\cdots \tag{4}$$

由 Hermite 多项式的正交性可知 $\{\hat{H}_l(x)\}$ 在 $L^2(\mathbf{R})$ 上正交

$$\int_{\mathbf{R}}\hat{H}_l(x)\hat{H}_m(x)\mathrm{d}x=c_l\delta_{l,m} \tag{5}$$

且

$$\int_{\mathbf{R}}\partial_x\hat{H}_l(x)\partial_x\hat{H}_m(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}-\dfrac{l}{2}c_{l-1},\ m=l-2\\ l^2c_{l-1}+\dfrac{1}{4}c_{l+1},\ m=l\\ -\dfrac{l+2}{2}c_{l+1},\ m=l+2\\ 0,\ \text{其他}\end{cases} \tag{6}$$

其中 $c_l=2^l l!\sqrt{\pi}$，$\delta_{l,m}$ 是 Kronecker 函数.

设 N 为任意的正整数，P_N 为不超过 N 次的代数多项式集合. $\mathscr{H}_N=\mathrm{span}\{\hat{H}_0(x),\hat{H}_1(x),\cdots\hat{H}_N(x)\}$，常数 c 与任意函数以及 N 无关.

引理 1[12] 对任意的 $\varphi\in\mathscr{H}_N$，$1\leqslant p\leqslant q\leqslant\infty$，$m$ 为任意的非负整数

$$\|\varphi\mathrm{e}^{(1/2-1/q)x^2}\|_{L^q}\leqslant cN^{(5/6)(1/p-1/q)}\|\varphi\mathrm{e}^{(1/2-1/p)x^2}\|_{L^p} \tag{7}$$

$$\|\partial_x^m\varphi\|\leqslant(2N+1)^{m/2}\|\varphi\| \tag{8}$$

定义 2 个正交投影算子，$L^2(\mathbf{R})$ 正交投影 P_N：$L^2(\mathbf{R})\to\mathscr{H}_N$ 为对任意的 $v\in L^2(\mathbf{R})$，满足

$$(P_Nv-v,\varphi)=0,\ \forall\varphi\in\mathscr{H}_N$$

$H^1(\mathbf{R})$ 正交投影 P_N^1：$H^1(\mathbf{R})\to\mathscr{H}_N$ 为对任意的 $v\in H^1(\mathbf{R})$，满足

$$(P_N^1v-v,\varphi)+(\partial_xP_N^1v-\partial_xv,\partial_x\varphi)=0,\ \forall\varphi\in\mathscr{H}_N$$

为给出投影算子的误差，定义算子 A：$Av(x)=\partial_xv(x)+xv(x)$. 对任意的非负整数 m，定义空间 $H_A^m(\mathbf{R})$ 为 $H_A^m(\mathbf{R})=\{v|v$ 在 $\mathbf{R}$ 上可测，且 $\|v\|_{m,A}<\infty\}$，其相应的范数 $\|v\|_{m,A}=\|A^mv\|$. 对任意正实数 r，空间 $H_A^r(\mathbf{R})$ 由空间插值定义得到. 因此可以得到如下投影算子的逼近性质.

引理 2[12] 对任意的 $v\in H_A^r(\mathbf{R})$，$0\leqslant\mu\leqslant r$，有 $\|P_Nv-v\|_{\mu}\leqslant cN^{(\mu-r)/2}\|v\|_{r,A}$.

定理 1 对任意的 $v\in H_A^r(\mathbf{R})$，$r\geqslant1$

$$\|P_N^1v-v\|_1\leqslant cN^{(1-r)/2}\|v\|_{r,A} \tag{9}$$

$$\|P_N^1v-v\|\leqslant cN^{-r/2}\|v\|_{r,A} \tag{10}$$

证明 由投影定理和引理 2，得

$$\|P_N^1v-v\|_1=\inf_{v_N\in\mathscr{H}_N}\|v_N-v\|_1\leqslant\|P_Nv-v\|_1\leqslant cN^{(1-r)/2}\|v\|_{r,A}$$

设 $g\in L^2(\mathbf{R})$，若

$$(w,z)+(\partial_xw,\partial_xz)=(g,z),\ \forall z\in H^1(\mathbf{R}) \tag{11}$$

由 Lax－Milgram 定理可知式(11)存在惟一的解，且 $\|w\|_2\leqslant c\|g\|$. 在式(11)中取 $z=v-P_N^1v$，可得

$$(g,v-P_N^1v)=(w-P_N^1w,v-P_N^1v)+(\partial_xw-\partial_xP_N^1w,\partial_xv-\partial_xP_N^1v)$$

因此

$$|(g,v-P_N^1v)|\leqslant cN^{-1/2}\|v-P_N^1v\|_1\|w\|_2\leqslant cN^{-1/2}\|v-P_N^1v\|_1\|g\|$$

则有

$$\|P_N^1v-v\|\leqslant cN^{-r/2}\|v\|_{r,A}$$

定理 2 对任意的 $v\in H_A^r(\mathbf{R})$，$0\leqslant\mu\leqslant r$

$$\|P_N^1v-v\|_{\mu}\leqslant cN^{(\mu-r)/2}\|v\|_{r,A} \tag{12}$$

证明 只需证明 μ 为非负整数的情况，其他情况则可由空间插值得到. 下面用归纳法证明. 由定理 1 可知，当 $\mu=0$ 时结论成立. 假设

$$\|P_N^1v-v\|_m\leqslant cN^{(m-r)/2}\|v\|_{r,A},\ m\leqslant\mu-1 \tag{13}$$

则由引理 1 知对任意的整数 $\mu\geqslant1$，有

$$\begin{aligned}\|P_N^1v-v\|_{\mu}&\leqslant\|P_N^1v-v\|+\|\partial_x(P_N^1v-v)\|_{\mu-1}\leqslant\|P_N^1v-v\|+\\&\|\partial_xP_N^1v-P_N^1\partial_xv\|_{\mu-1}+cN^{(\mu-r)/2}\|\partial_xv\|_{r-1,A}\leqslant\\&\|P_N^1v-v\|+c(N+1)^{(\mu-1)/2}\|\partial_xP_N^1v-P_N^1\partial_xv\|+cN^{(\mu-r)/2}\|\partial_xv\|_{r-1,A}\end{aligned}$$

由定理 1 及

$$\|\partial_xP_N^1v-P_N^1\partial_xv\|\leqslant\|\partial_xP_N^1v-\partial_xv\|+\|P_N^1\partial_xv-\partial_xv\|\leqslant cN^{(1-r)/2}\|v\|_{r,A}$$

有

$$\|P_N^1v-v\|_{\mu}\leqslant cN^{(\mu-r)/2}\|v\|_{r,A}$$

推论 1 对任意的 $v\in H_A^r(\mathbf{R})$，正实数 $r>1/2$，

$\| P_N^1 v \|_\infty \leqslant c \| v \|_{r,A}$.

设问题(1),(2)中的非线性项 $g(x,z):\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ 上局部有界和可测的,对于任意的 $x\in\mathbf{R}$, $g(x,\cdot)\in C^2(\mathbf{R})$ 且存在正常数 c_j, $j=1,\cdots,4$, $\alpha\in[1,3]$,及 $p,r_0>0$ 使得

(A1) $g(\cdot,0)\in L^2(\mathbf{R})$;

(A2) $|g_z(x,0)|\leqslant c_1$, $\forall x\in\mathbf{R}$;

(A3) $|g_{zz}(x,z)|\leqslant c_2(1+|z|^\alpha)$, $\forall x,z\in\mathbf{R}$;

(A4) $\lim\limits_{|x|\to\infty}\inf \dfrac{g(x,z)}{z}\geqslant 0$,对所有的 $x\in\mathbf{R}$ 一致成立;

(A5) $(g(x,z)-g(x,0))z\geqslant c_3 z^2$, $\forall z\in\mathbf{R}$, $|x|>r_0$;

(A6) $|g(\cdot,z_1)-g(\cdot,z_2)|\leqslant c_4(1+|z_1|^p+|z_2|^p)|z_1-z_2|$, $\forall z_i\in\mathbf{R}, i=1,2$.

若条件(A1)—(A5)满足,则对每个 $u_0\in H^1(\mathbf{R})$, $w_0\in L^2(\mathbf{R})$, $f\in L^2(0,T;H^{-1}(\mathbf{R}))$,问题(1),(2)对于任意的 $T>0$,在区间$[0,T]$上具有惟一的弱解 $u\in C(0,T;H^1(\mathbf{R}))$, $u_t\in C(0,T;L^2(\mathbf{R}))\cap L^2(0,T;H^1(\mathbf{R}))$, $u_{tt}\in L^2(0,T;H^{-1}(\mathbf{R}))+L^1(0,T;L^2(\mathbf{R}))$[6].

2　全离散格式

为了建立全离散格式,首先考虑问题(1),(2)的弱形式:寻找 $u\in C(0,T;H^1(\mathbf{R}))$, $u_t\in C(0,T;L^2(\mathbf{R}))\cap L^2(0,T;H^1(\mathbf{R}))$, $u_{tt}\in L^2(0,T;H^{-1}(\mathbf{R}))+L^1(0,T;L^2(\mathbf{R}))$,使得对任意的 $\xi\in H^1(\mathbf{R})$有

$$\begin{cases}(u_{tt}(t),\xi)+(u_{xt}(t),\xi_x)+(u_x(t),\xi_x)+\\ \qquad (u_t(t),\xi)+(g(\cdot,u(t)),\xi)=(f(t),\xi) \\ u(x,0)=u_0(x), u_t(x,0)=w_0(x), x\in\mathbf{R}\end{cases} \tag{14}$$

其中 $u_0\in H^1(\mathbf{R})$, $w_0\in L^2(\mathbf{R})$, $f\in L^2(0,T;H^{-1}(\mathbf{R}))$.

运用 Hermite 谱方法求解问题(1),(2).设 τ 为时间步长,$T=n_T\tau$, $R_\tau(T)=\{t=k\tau\,|\,k=1,2,\cdots,n_T\}$, $\overline{R_\tau}(T)=R_\tau(T)\cup\{0\}$,记

$$\hat{D}_{\tau\tau}u(t)=\frac{1}{\tau^2}(u(t+\tau)-2u(t)+u(t-\tau))$$

$$\hat{D}_\tau u(t)=\frac{1}{2\tau}(u(t+\tau)-u(t-\tau))$$

$$\overline{D}_\tau u(t)=\frac{1}{\tau}(u(t)-u(t-\tau))$$

$$D_\tau u(t)=\frac{1}{\tau}(u(t+\tau)-u(t))$$

$$\hat{u}(t)=\frac{1}{2}(u(t+\tau)+u(t-\tau))$$

问题(1),(2)的全离散格式为:寻找 $u_N\in\mathscr{H}_N$,使得对于任意的 $\Psi\in\mathscr{H}_N$,有

$$\begin{cases}(\hat{D}_{\tau\tau}u_N(t),\Psi)+(\hat{D}_\tau\partial_x u_N(t),\partial_x\Psi)+\\ \qquad(\partial_x\hat{u}_N(t),\partial_x\Psi)+(\hat{D}_\tau u_N(t),\Psi)+\\ \qquad(g(\cdot,u_N(t)),\Psi)=(\hat{f}(t),\Psi),\\ \qquad t\in R_\tau(T-\tau)\\ u_N(0)=P_N u_0\\ D_\tau u_N(0)=P_N w_0+\dfrac{\tau}{2}P_N(\partial_x^2 w_0+\partial_x^2 u_0-w_0-\\ \qquad g(\cdot,u_0)+f(0)),\ x\in\mathbf{R}\end{cases} \tag{15}$$

于是在每个时间层上,需要求解下列方程:寻找 $u_N(t+\tau)\in\mathscr{H}_N$,使得对于任意的 $\Psi\in\mathscr{H}_N$ 有下式成立:

$$\begin{aligned}&(2+\tau)(u_N(t+\tau),\Psi)+(\tau+\tau^2)(\partial_x u_N(t+\tau),\\ &\partial_x\Psi)=4(u_N(t),\Psi)-2\tau^2(g(\cdot,u_N(t)),\Psi)+\\ &(\tau-2)(u_N(t-\tau),\Psi)+(\tau-\tau^2)(\partial_x u_N(t-\tau),\\ &\partial_x\Psi)+2\tau^2(\hat{f}(t),\Psi)\end{aligned} \tag{16}$$

令 $u_N(x,t)=\sum\limits_{l=0}^{N}a_l(t)\hat{H}_l(x)$,根据基函数 $\hat{H}_l(x)$的正交性质(5)和(6)式,易知方程组(16)左端是一个线性方程组,其系数矩阵是五对角的.实际计算时,每一层对非线性项的计算如下:

$$\{a_l\}\to\{u_N(x_j)\}\to\{g(\cdot,u_N(x_j))\}$$

其中 x_j 是 Hermite-Gauss 点.

下面分析离散格式的收敛性和稳定性.首先证明格式(15)的收敛性,设 $U_N=P_N^1 u$.由式(14)可知,对任意的 $\Psi\in\mathscr{H}_N$,当任意的 $t\in R_\tau(T)$,有

$$\begin{aligned}&(\hat{D}_{\tau\tau}U_N(t),\Psi)+(\hat{D}_\tau\partial_x U_N(t),\partial_x\Psi)+(\partial_x\hat{D}_N(t),\\ &\partial_x\Psi)+(\hat{D}_\tau U_N(t),\Psi)+(g(\cdot,U_N(t)),\Psi)=\\ &(\hat{f}(t),\Psi)+(\hat{D}_{\tau\tau}U_N(t)-\partial_t^2\hat{u}(t),\Psi)+\\ &(\partial_x\hat{D}_N(t)-\partial_x\hat{u}(t),\partial_x\Psi)+(g(\cdot,U_N(t))-\\ &\hat{g}(\cdot,u(t)),\Psi)\end{aligned} \tag{17}$$

初值满足

$$U_N(0)=P_N u_0$$

$$\begin{aligned}D_\tau U_N(0)=&P_N w_0+\frac{\tau}{2}P_N(\partial_x^2 w_0+\partial_x^2 u_0-w_0-\\ &g(\cdot,u_0)+f(0))+D_\tau U_N(x,0)-\\ &\partial_t U_N(x,0)-\frac{\tau}{2}\partial_t^2 U_N(x,0)\end{aligned} \tag{18}$$

设 $\tilde{u}_N=u_N-U_N$,式(15)减去(17),得

$$\begin{aligned}&(\hat{D}_{\tau\tau}\tilde{u}_N(t),\Psi)+(\hat{D}_\tau\partial_x\tilde{u}_N(t),\partial_x\Psi)+\\ &(\partial_x\hat{\tilde{u}}_N(t),\partial_x\Psi)+(\hat{D}_\tau\tilde{u}_N(t),\Psi)+\end{aligned}$$

$$g(\cdot,u_N(t))-g(\cdot,U_N(t),\Psi)=-\sum_{j=1}^{3}G_j(t,\Psi) \tag{19}$$

其中

$$G_1(t,\Psi)=(\hat{D}_{\tau\tau}U_N(t)-\partial_t^2\hat{u}(t),\Psi)$$

$$G_2(t,\Psi)=(\partial_x\hat{D}_N(t)-\partial_x\hat{u}(t),\partial_x\Psi)$$

$$G_3(t,\Psi)=(g(\cdot,U_N(t))-\hat{g}(\cdot,u(t)),\Psi)$$

初值满足

$$D_\tau\tilde{u}_N(0)=-D_\tau U_N(0)+\partial_t U_N(0)+\frac{\tau}{2}\partial_t^2U_N(0) \tag{20}$$

取 $\Psi=\hat{D}_\tau\tilde{u}_N(t)$,代入式(19),得

$$\frac{1}{2}D_\tau\|\bar{D}_\tau\tilde{u}_N(t)\|^2+\|\hat{D}_\tau\tilde{u}_N(t)\|_1^2+\frac{1}{2}\hat{D}_\tau\|\partial_x\tilde{u}_N(t)\|^2+(g(\cdot,u_N(t))-g(\cdot,U_N(t)),\hat{D}_\tau\tilde{u}_N(t))=-\sum_{j=1}^{3}G_j(t,\hat{D}_\tau\tilde{u}_N(t)) \tag{21}$$

对任意的 $s\in R_\tau(t-\tau)$,根据(A6),推论1,引理1和Cauchy-Schwarz不等式,对于 $r>1/2$,可得

$$|(g(\cdot,u_N(s))-g(\cdot,U_N(s)),\hat{D}_\tau\tilde{u}_N(s))|\leqslant c(1+\|u_N(s)\|_\infty^p+\|U_N(s)\|_\infty^p)\|\tilde{u}_N(s)\|\,\|\hat{D}_\tau\tilde{u}_N(s)\|\leqslant C^*(u)N^{5p/6}\|\tilde{u}_N(s)\|^{2p+2}+\|\tilde{u}_N(s)\|^2+\frac{1}{3}\|\hat{D}_\tau\tilde{u}_N(s)\|^2 \tag{22}$$

其中 $C^*(u)$ 是仅依赖于 $\|u\|_{L^\infty(0,T;H_A^r(\mathbf{R}))}$ 的正常数.

由定理1和文献[13]中的引理4.6,可得

$$\|\hat{D}_{\tau\tau}U_N(s)-\partial_t^2\hat{u}(s)\|^2\leqslant C_1\tau^3\|u\|^2_{H^4(s-\tau,s+\tau;L^2(\mathbf{R}))}+C_2N^{1-r}\|u\|^2_{C^2(0,t;H_A^{r-1}(\mathbf{R}))} \tag{23}$$

$$\|\partial_x\hat{D}_N(s)-\partial_x\hat{u}(s)\|^2\leqslant C_3\tau^3\|u\|^2_{H^2(s-\tau,s+\tau;H^1(\mathbf{R}))}+C_4N^{1-r}\|u\|^2_{C(0,t;H_A^r(\mathbf{R}))} \tag{24}$$

$$\|g(\cdot,U_N(s))-\hat{g}(\cdot,u(s))\|^2\leqslant C_5C_g\tau^3(\|u\|^2_{H^2(s-\tau,s+\tau;L^2(\mathbf{R}))}+\|u\|^4_{H^1(s-\tau,s+\tau;L^4(\mathbf{R}))})+C_6N^{1-r}\|u\|^{2p+2}_{C(0,t;H_A^r(\mathbf{R}))} \tag{25}$$

其中 $C_1,\cdots,C_6$ 是与 N,τ 无关的正常数,$C_g=\max\limits_{|z|\leqslant\|u\|_{C(\mathbf{R}\times[0,T])}}\{|g_z(z)|,|g_{zz}(z)|\}$.

将式(21)对 $s\in R_\tau(t-\tau)$ 求和,利用式(22)—(25)和Young不等式得到

$$2\|\bar{D}_\tau\tilde{u}_N(t)\|^2+4\tau\sum_{s\in R_\tau(t-\tau)}\|\hat{D}_\tau\partial_x\tilde{u}_N(s)\|_1^2+\|\partial_x\tilde{u}_N(t)\|^2\leqslant-\|\partial_x\tilde{u}_N(t-\tau)\|^2+4\tau\sum_{s\in R_\tau(t-\tau)}(C^*(u)N^{5p/6}\|\tilde{u}_N(s)\|^{2p+2}+\|\tilde{u}_N(s)\|^2+\|\hat{D}_\tau\tilde{u}_N(s)\|^2)+C_7\tau^4[\|u\|^2_{H^4(0,t;L^2(\mathbf{R}))}+\|u\|^2_{H^2(0,t;H^1(\mathbf{R}))}+C_g(\|u\|^2_{H^2(0,t;L^2(\mathbf{R}))}+\|u\|^4_{H^1(0,t;L^4(\mathbf{R}))})]+C_8N^{1-r}(\|u\|^2_{C^2(0,t;H_A^{r-1}(\mathbf{R}))}+\|u\|^2_{C(0,t;H_A^r(\mathbf{R}))}+\|u\|^{2p+2}_{C(0,t;H_A^r(\mathbf{R}))})+2\|D_\tau\tilde{u}_N(0)\|^2+\|\partial_x\tilde{u}_N(\tau)\|^2+\|\partial_x\tilde{u}_N(0)\|^2$$

进一步可得

$$2\|\bar{D}_\tau\tilde{u}_N(t)\|^2+\|\tilde{u}_N(t)\|_1^2\leqslant-\|\partial_x\tilde{u}_N(t-\tau)\|^2+4\tau\sum_{s\in R_\tau(t-\tau)}(C^*(u)N^{5p/6}\|\tilde{u}_N(s)\|^{2p+2}+\|\tilde{u}_N(s)\|^2+\|\bar{D}_\tau\tilde{u}_N(s)\|^2)+2(T+1)\tau\|\bar{D}_\tau\tilde{u}_N(t)\|^2+2T\tau\sum_{s\in R_\tau(t-\tau)}\|\bar{D}_\tau\tilde{u}_N(s)\|^2+2\|\tilde{u}_N(0)\|^2+C_7\tau^4[\|u\|^2_{H^4(0,t;L^2(\mathbf{R}))}+\|u\|^2_{H^2(0,t;H^1(\mathbf{R}))}+C_g(\|u\|^2_{H^2(0,t;L^2(\mathbf{R}))}+\|u\|^4_{H^1(0,t;L^4(\mathbf{R}))})]+C_8N^{1-r}(\|u\|^2_{C^2(0,t;H_A^{r-1}(\mathbf{R}))}+\|u\|^2_{C(0,t;H_A^r(\mathbf{R}))}+\|u\|^{2p+2}_{C(0,t;H_A^r(\mathbf{R}))})+\|\partial_x\tilde{u}_N(\tau)\|^2+\|\partial_x\tilde{u}_N(0)\|^2\leqslant(4+T)\tau\sum_{s\in R_\tau(t-\tau)}(C^*(u)N^{5p/6}\|\tilde{u}_N(s)\|^{2p+2}+\|\tilde{u}_N(s)\|^2+\|\bar{D}_\tau\tilde{u}_N(s)\|^2)+C_7\tau^4[\|u\|^2_{H^4(0,t;L^2(\mathbf{R}))}+\|u\|^2_{H^2(0,t;H^1(\mathbf{R}))}+C_g(\|u\|^2_{H^2(0,t;L^2(\mathbf{R}))}+\|u\|^4_{H^1(0,t;L^4(\mathbf{R}))})]+C_8N^{1-r}(\|u\|^2_{C^2(0,t;H_A^{r-1}(\mathbf{R}))}+\|u\|^2_{C(0,t;H_A^r(\mathbf{R}))}+\|u\|^{2p+2}_{C(0,t;H_A^r(\mathbf{R}))})+2(T+1)\tau\|\bar{D}_\tau\tilde{u}_N(t)\|^2+\|\partial_x\tilde{u}_N(\tau)\|^2+2\|\tilde{u}_N(0)\|_1^2$$

整理后可得

$$2(1-(T+1)\tau)\|\bar{D}_\tau\tilde{u}_N(t)\|^2+\|\tilde{u}_N(t)\|_1^2\leqslant(4+T)\tau\sum_{s\in R_\tau(t-\tau)}(C^*(u)N^{5p/6}(\|\tilde{u}_N(s)\|_1^2+\|\bar{D}_\tau\tilde{u}_N(s)\|^2)^{p+1}+\|\tilde{u}_N(s)\|_1^2+\|\bar{D}_\tau\tilde{u}_N(s)\|^2)+C_7\tau^4[\|u\|^2_{H^4(0,t;L^2(\mathbf{R}))}+\|u\|^2_{H^2(0,t;H^1(\mathbf{R}))}+C_g(\|u\|^2_{H^2(0,t;L^2(\mathbf{R}))}+\|u\|^4_{H^1(0,t;L^4(\mathbf{R}))})]+C_8N^{1-r}(\|u\|^2_{C^2(0,t;H_A^{r-1}(\mathbf{R}))}+\|u\|^2_{C(0,t;H_A^r(\mathbf{R}))}+\|u\|^{2p+2}_{C(0,t;H_A^r(\mathbf{R}))})+\|D_\tau\tilde{u}_N(0)\|^2+2\tau^2\|D_\tau\tilde{u}_N(0)\|_1^2 \tag{26}$$

由引理2得

$$\|D_\tau\tilde{u}_N(0)\|_1^2\leqslant C_9(\tau^2\|\partial_t^2u(0)\|_1^2+\tau\|u\|^2_{H^2(0,T;H^1(\mathbf{R}))})$$

其中 C_7,C_8,C_9 是与 N,τ 无关的正常数.

记 $E(t)=\|\tilde{u}_N(t)\|_1^2+\|\bar{D}_\tau\tilde{u}_N(t)\|^2$. 若 $\tau<\frac{1}{2(T+1)}$,则由式(26)可得

$$E(t) \leqslant (4+T)\tau \sum_{s\in R_\tau(t-\tau)} (C^*(u) N^{5p/6} E^{p+1}(s) + E(s)) + \rho_1(t)$$

其中 $\rho_1(t)=O(\tau^4+N^{1-r})$.

应用离散的 Gronwall 不等式(文献[14]中定理 4),可得

$$E(t) \leqslant (1+(4+T)\tau)^{t/\tau}\{\rho_1(t) - pt(4+T)C^*(u)N^{5p/6}(1+(4+T)\tau)^{tp/\tau}\}^{-1/p}$$

当 $r>11/6$ 时,若 τ 充分小,且满足 $\tau^4 N^{5/6}\leqslant\varepsilon_0$,可得 $E(t)\leqslant\rho_1(t)$. 因此得到下面的收敛性结果.

定理 3　设 $u(x,t)$ 为问题(1),(2)的解,$u_N(x,t)$ 为离散格式(15)的解,且 $u(x,t)$ 满足 $u\in C^2(0,T;H_A(\mathbf{R}))\cap C(0,T;H_A(\mathbf{R}))\cap H^4(0,T;L^2(\mathbf{R}))\cap H^2(0,T;H^1(\mathbf{R}))\cap H^1(0,T;L^4(\mathbf{R}))$,则当 $r>11/6$ 时,且满足 $\tau^4 N^{5/6}\leqslant\varepsilon_0$ 时,对于 $t\in\bar{R}_\tau(T)$

$$\| u_N(t)-u(t)\|_1 \leqslant C(\tau^2+N^{(1-r)/2})$$

其中常数 C 只依赖于 u,f,u_0,w_0.

下面证明离散格式(15)的稳定性. 记 $\tilde{u}_N,\tilde{f}$ 分别为 u_N,f 对应的误差,则由式(15),得

$$\begin{cases} (\hat{D}_{\tau\tau}\tilde{u}_N(t),\Psi)+(\hat{D}_\tau\partial_x\tilde{u}_N(t),\partial_x\Psi)+ \\ \quad(\partial_x\hat{\tilde{u}}_N(t),\partial_x\Psi)+(\hat{D}_\tau\tilde{u}_N(t),\Psi)+ \\ \quad(g(\cdot,u_N(t)+\tilde{u}_N(t))-g(\cdot,u_N(t)),\Psi)= \\ \quad(\hat{\tilde{f}}(t),\Psi),\ t\in R_\tau(T-\tau) \\ \tilde{u}_N(0)=\tilde{u}_0 \\ D_\tau\tilde{u}_N(0)=\tilde{u}_1,\ x\in\mathbf{R} \end{cases} \tag{27}$$

取 $\Psi=\hat{D}_\tau\tilde{u}_N(t)$,代入式(27),有

$$\frac{1}{2}D_\tau\|\bar{D}_\tau\tilde{u}_N(t)\|^2+\|\hat{D}_\tau\tilde{u}_N(t)\|_1^2+\frac{1}{2}\hat{D}_\tau\|\partial_x\tilde{u}_N(t)\|^2+(g(\cdot,u_N(t)+\tilde{u}_N(t))-g(\cdot,u_N(t)),\hat{D}_\tau\tilde{u}_N(t))=(\hat{\tilde{f}}(t),\hat{D}_\tau\tilde{u}_N(t))$$

对 $s\in R_\tau(t-\tau)$ 求和,对任意的 $x\in\mathbf{R}$,由 $g(x,\cdot)\in C^2(\mathbf{R})$ 及 Young 不等式,与收敛性的证明过程类似,可得

$$2(1-(T+1)\tau)\|\bar{D}_\tau\tilde{u}_N(t)\|^2+\|\tilde{u}_N(t)\|_1^2\leqslant C_{10}\tau\sum_{s\in R_\tau(t-\tau)}(C(u_N)\|\tilde{u}_N(s)\|^2+\|\bar{D}_\tau\tilde{u}_N(s)\|^2)+C_{11}\tau\sum_{s\in R_\tau(t-\tau)}\|\hat{\tilde{f}}(s)\|^2+C_{12}(\|\tilde{u}_0\|_1^2+\|\tilde{u}_1\|^2+\tau^2\|\tilde{u}_1\|_1^2) \tag{28}$$

其中 C_{10},C_{11},C_{12} 是与 N,τ 无关的正常数. 记

$$F(t)=\|\tilde{u}_N(t)\|_1^2+\|\bar{D}_\tau\tilde{u}_N(t)\|^2$$

$$\rho_2(t)=C_{11}\tau\sum_{s\in R_\tau(t-\tau)}\|\hat{\tilde{f}}(s)\|^2+C_{12}(\|\tilde{u}_0\|_1^2+\|\tilde{u}_1\|^2+\tau^2\|\tilde{u}_1\|_1^2)$$

由文献[15]中的引理 3.7,可得格式的稳定性结论.

定理 4　设 $u(x,t)$ 为问题(1),(2)的解,$u_N(x,t)$ 为离散格式(15)的解,则当 $\rho_2(t)$ 充分小时,对于 $t\in\bar{R}_\tau(T)$,有

$$F(t)\leqslant C\rho_2(t)e^{C't}$$

其中常数 C,C' 只依赖于 u_N.

3　数值算例

取非线性项 $g(x,u)=(u(x,t))^3$,考虑问题(1),(2)的解析解为:$u(x,t)=\mathrm{e}^{-x^2}\cos(xt)$. 首先,取时间步长 $\tau=10^{-3}$,图 1 和图 2 分别描述了当 $t=0.1$ 和 $t=1$ 时的误差 E_r 与多项式项数 N 之间的关系,$\|u_N(t)-u(t)\|\sim\mathrm{e}^{-CN}$. 为了考察误差与时间步长 τ 的关系,固定 $N=126$,图 3 描述了在 $t=1$ 时刻,L^2 误差与时间步长的关系,从数值结果可以看出 $\|u_N(t)-u(t)\|\sim\tau^2$.

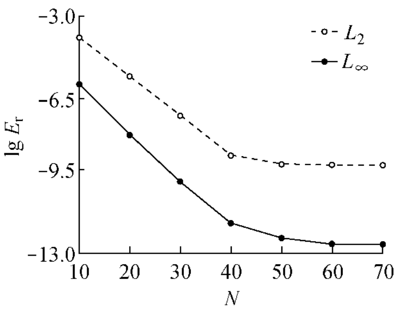

图 1　$\tau=10^{-3}$, $t=0.1$ 时误差与 N 的关系

Fig.1　Relationship between errors and N at $\tau=10^{-3}$, $t=0.1$

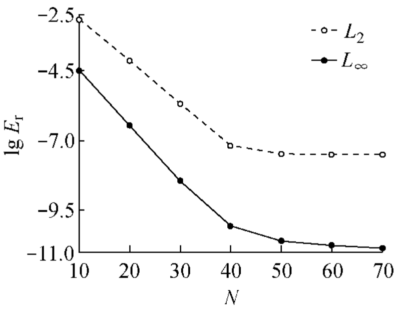

图 2　$\tau=10^{-3}$, $t=1$ 时误差与 N 的关系

Fig.2　Relationship between errors and N at $\tau=10^{-3}$, $t=1$

(下转第 644 页)