

基于正则化方法的 Hull-White 短期利率模型参数估计

江 良^{1,2}, 忻丁耀³

(1. 同济大学 数学系, 上海 200092; 2. 莆田学院 数学系, 福建 莆田 351100;
3. 同济大学 教育技术与计算中心, 上海 200092)

摘要: 基于市场债券价格, 应用正则化方法对 Hull-White 短期利率模型中时间变量参数进行估计. 通过变分原理, 证明了该正则化方法具有稳定性和收敛性. 最后, 数值模拟确认该方法的有效性并给出实证结果.

关键词: Hull-White 短期利率模型; 正则化方法; 零息债券
中图分类号: F832.5; O241.83 **文献标识码:** A

Calibration Parameters for Hull-White Short-term Rate Model Based on Regularization Method

JIANG Liang^{1,2}, XIN Dingyao³

(1. Department of Mathematics, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. Department of Mathematics, Putian University, Putian 351100, China; 3. Center of Educational Technology and Computing, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: Regularization method is applied to the calibration of the time-varying parameters in Hull-White short-term rate model based on bond prices in market. The method proves to be stable and convergent by variation principle. Finally, simulation numerical tests are coincided with the theoretical analysis and the empirical results come into being.

Key words: Hull-White short-term rate model; regularization method; zero-coupon bond

众所周知, Vasicek^[1]首先提出均值回归短期利率模型. 为了更好地拟合市场数据, Hull 等^[2]延拓了 Vasicek 模型, 考虑所有的参数都是时间变量的函数. 但是 Brigo 等^[3]注意到该模型中波动率函数很难通过市场上债券数据拟合. 因此, 本文将考虑

长期回归均值是时间变量的 Hull-White 模型^[2], 该模型拟合的效果将会得到很大的改善. Brigo 等^[3]已给出关于长期回归均值函数显示表达式, 但其表达式依赖于远期瞬时利率及其导数. 根据 Hanke 等^[4]论述, 数值方法求解导数是一个不稳定性问题, 因此不能直接通过导数估计长期回归均值. 正则化方法应运而生.

假设市场报价完全匹配理论价格. 通过数学技巧, 原问题可转化为求解第一类 Volterra 积分方程^[5]. 这类积分方程数值解一般是不稳定的. 本文将使用正则化方法来求解这类问题, 归咎于正则化方法是稳定的数值计算过程. 该方法通过引入罚函数来控制数值结果的稳定性^[6]. 因此, 通过债券价格估计 Hull-White 模型中参数问题有必要使用正则化方法. 在本文中, 将使用微分算子作为罚函数, 相对于标准的 Tikhonov 正则化^[6], 这类罚函数允许被估计函数具有一定光滑性.

1 利率与债券定价模型

首先, 假设短期利率 r 在风险中性测度下满足如下的随机微分方程^[3]:

$$dr = (\theta(t) - ar)dt + \sigma dW(t) \quad (1)$$

其中 a, σ 为常数, $\theta(t)$ 是关于时间的函数, $W(t)$ 为标准的 Brown 运动. 基于式(1), 在时间 t 时刻, 到期日 T 支付为 1 单位的债券价格有如下表达式: $P(t, T) = P(t, T; a, \sigma, \theta, r) = A(t, T)e^{-B(t, T)r}$, 其中 $A = A(t, T)$ 和 $B = B(t, T)$ 表达式如下^[3]:

$$B(t, T; a) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}, \quad (2)$$

收稿日期: 2011-12-14

基金项目: 国家自然科学基金(11171256); 福建省教育厅 A 类项目(JA09201).

第一作者: 江良(1978—), 男, 博士生, 主要研究方向为计算数学及金融数学. E-mail: ptjiangliang@yahoo.com.cn

通讯作者: 忻丁耀(1954—), 男, 工程师, 管理硕士, 主要研究方向为金融管理. E-mail: xindingyao@tongji.edu.cn

$$\ln A(t, T) = \frac{\sigma^2}{2a^2}(T-t+B(t, T; 2a) - 2B(t, T; a)) - \int_t^T B(s, T; a)\theta(s) ds. \quad (3)$$

设当前时刻($t=0$)到期日为 T 的市场债券价格的收益率 $R(0, T)$ 满足等式 $P_M(0, T) = e^{-R(0, T)T}$, $0 \leq T \leq T^*$, 其中 $P_M(0, T)$ 为市场价格, T^* 是债券价格最大的到期日. 两边取对数, 可获得 $f_M(0, T) := \ln P_M(0, T) = -R(0, T)T$. 定义范数和内积: $\langle \varphi, \psi \rangle = \int_0^T \varphi \psi dt, \|\varphi\|^2 = \langle \varphi, \varphi \rangle, T \in (0, T^*]$.

2 参数估计计算方法

设 $\ln P(0, T) = f_M(0, T)$. 根据式(2)和(3), 得到:

$$F(T) + \int_0^T K(t, T)\theta(t) dt = 0, \quad (4)$$

其中

$$\begin{cases} F(T) = f^M(0, T) + rB(0, T) - \frac{\sigma^2}{2a^2} \cdot \\ \quad [T + B(0, T; 2a) - 2B(0, T; a)], \\ K(t, T) = B(t, T; a). \end{cases} \quad (5)$$

注意式(4)是第一类 Volterra 积分方程, 其中 $F(T)$ 和 $K(t, T)$ (数学上 $K(t, T)$ 称为核) 是已知的函数, $\theta(t)$ 是待求解的函数.

为了简化问题, 设 \mathbf{K} 为积分算子, 即 $\mathbf{K}\theta := \int_0^T K(t, T)\theta(t) dt$. 相应函数 $\theta(t)$ 的解能通过下面的优化问题获得 ($T \in [0, T^*]$):

$$\min_{\theta \in C^1[0, T]} J(\theta) = \|F(T) + \mathbf{K}\theta\|^2 + \lambda \|\theta'\|^2, \quad (6)$$

其中初始条件 $\theta_0 = \theta(0)$, λ 是正则化参数. 设 $F_\delta(T)$ 为扰动的数据且

$$\|F_\delta(T) - F(T)\| \leq \delta, \quad (7)$$

式中, δ 是数据的测度误差.

定理 1 设 $\theta_{\lambda, \delta}$ 和 θ_λ 分别是式(6)的极小值对应于 $F_\delta(T)$ 和 $F(T)$, 从而有

$$e_\delta \leq \frac{T\delta}{2\sqrt{2\lambda}}, \quad 0 \leq T \leq T^* \quad (8)$$

其中 $e_\delta(t) = \theta_{\lambda, \delta}(t) - \theta_\lambda(t)$.

证明 设 $0 \leq \alpha \leq 1$, 那么 $\theta_\lambda + \alpha e_\delta \in C^1[0, T]$. 由于 θ_λ 是问题(6)的极小值, 即

$$\left. \frac{dJ(\theta_\lambda + \alpha e_\delta)}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = \langle F(T) + \mathbf{K}\theta_\lambda, \mathbf{K}e_\delta \rangle + \lambda \langle \theta'_\lambda, e'_\delta \rangle = 0. \quad (9)$$

类似地, 能够得到

$$\langle F_\delta(T) + \mathbf{K}\theta_{\lambda, \delta}, \mathbf{K}e_\delta \rangle + \lambda \langle \theta'_{\lambda, \delta}, e'_\delta \rangle = 0. \quad (10)$$

把式(9), (10)相减可以获得

$$\lambda \|e'_\delta\|^2 + \|\mathbf{K}e_\delta\|^2 = \langle F_\delta(T) - F(T), \mathbf{K}e_\delta \rangle. \quad (11)$$

由式(11)和假设(7), 得到 $\|\mathbf{K}e_\delta\|^2 \leq \delta$. 应用 Cauchy 不等式和不等式 $cd \leq c^2 + d^2/4$, 可获得 $\|e'_\delta\| \leq \frac{\delta}{2\sqrt{\lambda}}$. 最后应用 Poincare 不等式^[7], 式(8)估计直接获得. 定理证毕.

定理 2 设 θ^* 是式(4)的精确解且是有界函数. 设正则化参数 λ 满足

$$\lambda(\delta) \rightarrow 0, \frac{\delta^2}{\lambda(\delta)} \rightarrow 0 \text{ 当 } \delta \rightarrow 0, \quad (12)$$

假设序列 $\{\theta_{\lambda_k, \delta_k}\}$ 中的每一元素是式(4)的解, 其中 δ_k 及 $\lambda_k := \lambda(\delta_k)$ 满足假设式(12). 那么每一收敛子列极限值是式(4)的解而且如果式(4)的解是唯一的其极限为 θ^* .

证明 由于 $\theta_{\lambda_k, \delta_k}$ 是优化问题(6)的解, 因此可以得到

$$\|F_{\delta_k}(T) + \mathbf{K}\theta_{\lambda_k, \delta_k}\|^2 + \lambda_k \|\theta'_{\lambda_k, \delta_k}\|^2 \leq \|F_{\delta_k}(T) + \mathbf{K}\theta^*\|^2 + \lambda_k \|(\theta^*)'\|^2. \quad (13)$$

由不等式(13)及在定理 2 中的假设, 有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{K}\theta_{\lambda_k, \delta_k} = -F(T), \|\theta'_{\lambda_k, \delta_k}\| \leq \frac{\delta_k^2}{\lambda_k} + \|(\theta^*)'\|. \quad (14)$$

应用 Poincare 不等式, 式(14)表明了 $\theta_{\lambda_k, \delta_k}$ 是一致有界且等度连续函数. 由于算子 \mathbf{K} 是一致有界线性算子, 根据 Arzela-Ascoli 定理^[8], 存在收敛子列其极限满足式(4). 若式(4)的解是唯一, 由于收敛子列极限是等同的, 因此其极限值为 θ^* . 定理证毕.

设 $\Delta T = T_i - T_{i-1}, i = 1, \dots, N$, 其中 $T_0 = 0$ 和 $T_N = T^*$. N 表示总的观察数据数. 假设 $\theta(t) := \theta_{i-1}, T_{i-1} \leq t \leq T_i$, 其中 θ_0 定义在 $T_0 = 0$ 时刻. 使用中心差分离散格式近似积分方程,

$$\int_0^{T_i} K(t, T_i)\theta(t) dt = \sum_{j=1}^i \int_{T_{j-1}}^{T_j} K(t, T_i)\theta(t) dt \approx \theta_0 K_{1/2, i} + \sum_{j=1}^i \theta_j (K_{j-1/2, i} + K_{j+1/2, i}) + \theta_i K_{i-1/2, i},$$

其中 $K_{j-1/2, i} = K(T_j - 0.5\Delta T, T_i)/2, j = 1, \dots, i, i = 1, \dots, N$. 为了简化说明, 设当 $i=1$ 时, $b_{0,1} = b_{1,1} = K_{1/2, i}$. 当 $i > 1$ 如果 $j=0$ 时, $b_{j,i} = K_{1/2, i}$; 如果 $1 \leq j < i < N$, $b_{j,i} = K_{j-1/2, i} + K_{j+1/2, i}$; 如果 $1 < j = i \leq N$, $b_{j,i} = K_{i-1/2, i}$.

基于数学归纳方法, 设 $\Theta_{i-1} = \{\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{i-1}\}$ 是已知的, $i = 1, \dots, N$, 式(6)的离散格式为

$$\min_{\theta_i} J^*(\theta_i) = \sum_{n=1}^i (F(T_n) + \sum_{j=0}^{n-1} b_{n,j}\theta_j + b_{n,n}\theta_n)^2 + \frac{\lambda}{\Delta T} \sum_{n=1}^i (\theta_n - \theta_{n-1})^2 \quad (15)$$

通过对(15)关于 θ_i 求导数, 可得

$$J^*(\theta_i) = \lambda(\theta_i - \theta_{i-1}) + (F(T_i) + \sum_{j=0}^{i-1} b_{i,j}\theta_j + b_{i,i}\theta_i)b_{i,i} = 0. \quad (16)$$

其中 $\lambda := \lambda/\Delta T$. 在给定 θ_{i-1} 条件下, 式(15)是关于 θ_i 的一元二次方程. 因此, 由(16)所求的解一定是极小值.

3 数值算例

3.1 模拟结果

设 $a=0.01, r=0.03, \sigma=0.1\sqrt{r}$. 假设 $\theta(t) = (0.001+0.1t)\exp(-0.9t)+0.009$. 其初始条件 $\theta_0 = 0.01$. 定义根均值误差(root mean square error, RMSE)为

$$R_M = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\theta_i - \theta(t_i))^2},$$

其中 θ_i 是数值解, $\theta(t_i)$ 是精确解. 为了简化问题, 本文将考虑 $\Delta T=0.5$ 年.

图 1 显示不同正则化参数所对应 $\ln R_M$ 的值. 从图 1 可知正则化参数应取机器精度. 图 2 显示了数值结果和精确解. 显然, 当正则化参数很小时和直接数值求解几乎没有任何的区别. 当 $\lambda=0$ 时, $R_M = 1.8757 \times 10^{-14}$; 当 $\lambda = 1 \times 10^{-9}$ 时, $R_M = 2.3242 \times 10^{-7}$. 虽然从图形中无法明显地看出正则化方法和直接求解方法($\lambda=0$)的区别, 但是下面数值结果将呈现正则化方法的优势.

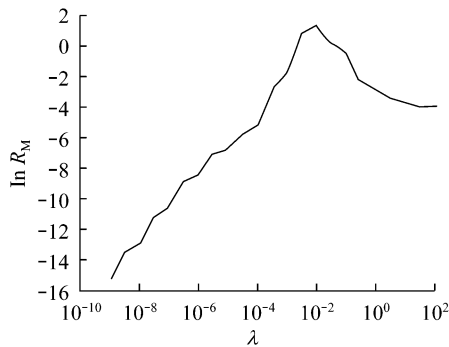


图 1 不同正则化参数选取所对应的 $\ln R_M$ 的值
Fig.1 The values of $\ln R_M$ for different regularization parameters

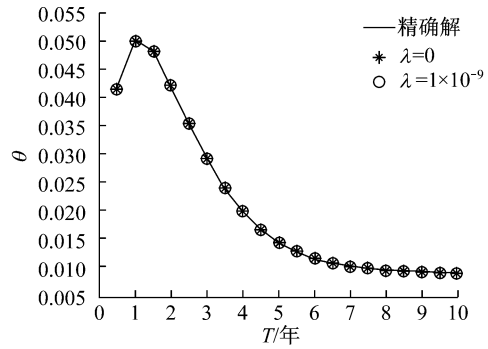


图 2 比较精确解及数值解($\lambda=0$ 及 $\lambda=10^{-9}$)
Fig.2 Comparison of the exact solutions and numerical solutions ($\lambda=0$ and $\lambda=10^{-9}$)

设噪声的数据通过表达式 $f_{\delta,M}(0, T) = f_M(0, T)(1+\delta z)$ 产生, 其中 δ 是常数, z 服从均值为 0, 方差为 1 的标准正态分布的随机数.

图 3 描述对于不同 δ 取值分别使用正则化方法和直接求解方法所对应的对数 RMSE 估计. 显然, 通过观察图形, 直接求解方法和正则方法都是稳定的. 然而当数据带有较大的噪声时, 正则化方法具有更好的数值结果.

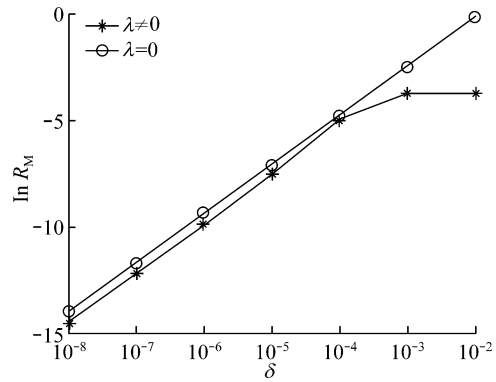


图 3 对于不同 δ 取值所对应的对数根均值误差估计
Fig.3 The values of $\ln R_M$ are plotted for different δ

3.2 实证结果

考虑美国国债每天交易 2011 年 6 月 1 号收益率数据(来源于 <http://www.ustreas.gov>). 最大的到期日为 10 年. 设 $\Delta T=0.5$ 年, $r=0.03\%$. 由于实际的报价仅只在一些节点上. 因此通过三次样条差值方法补上一些缺失的数据. 其数据结果呈现在图 4 中. 参数 a 和 σ 取值将基于标准的最小二乘法来估计. θ_0 将基于 $0 \leq T < T_1$ 的数据通过最小二乘法的方法来估计. 为了刻画拟合的结果引入 RMSE 为

$$R_M = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (f^M(0, T_i) - \ln P(0, T_i))^2}$$

基于 Vasicek 模型, 参数估计值分别为 $\theta = 0.009\ 218$, $a = 0.113\ 4$, $\sigma = 0.020\ 39$ 及相应的 RMSE 值为 $0.004\ 031$. 其长期均值年收益率为 $\theta/a = 8.13\%$. 图 5 给出相应的数值解和市场数据的比较. 从图 5 可知, 对于长期的数据, Vasicek 模型拟合比较好, 但是短期的数据其误差相当大. 这就说明了常数 θ 值可能导致模型误判. 因此考虑时间变量长期回归均值是有必要的.

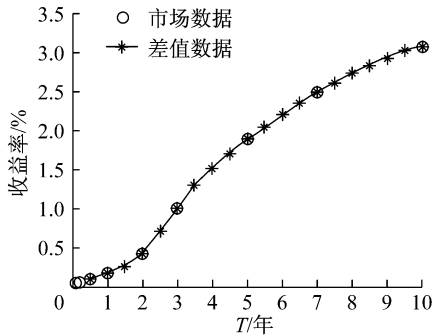


图 4 比较市场收益率数据和插值数据

Fig.4 Comparison of the market yield curve and the cubic interpolation results

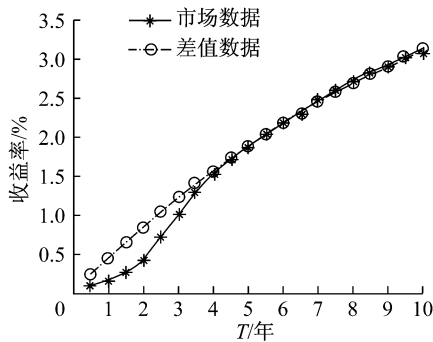


图 5 基于 Vasicek 模型, 数值结果和市场数据的比较

Fig.5 Comparison of the exact solutions and the market quotes

类似上一节的模拟结果, 通过最小 RMSE 值选取其参数. 图 6 显示不同 λ 值所对应数 RMSE 值. 从图形可知, λ 没有最小值, 极端的情况 $\lambda=0$. 若基于拟合考虑, 正则化方法和直接求解方法没有区别. 但正则化方法能够通过调整正则化参数控制误差精度和数值结果稳定性. 如通过数值测试, 当 $\lambda=10^{-4}$ 时, $R_M=1.993\ 2 \times 10^{-5}$. 其保留 4 个有效数字, 在实际应用中是可接受的. 若 λ 更大, 拟合效果较差; 若 λ 更小, 后面的有效数字估计是没有用的. 相应的数值结果被呈现在图 7 中. 而当 $\lambda=0$ 时, R_M

$=4.670\ 9 \times 10^{-18}$, 因为对于收益率不需要估计到这多的有效数字.

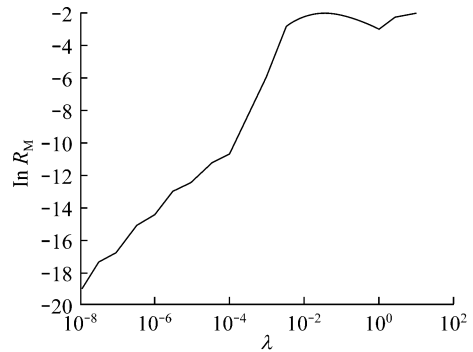


图 6 对于不同的 λ 的值所对应 $\ln R_M$ 误差估计

Fig.6 Estimates of $\ln R_M$ for different λ

图 8 显示市场收益率数据和数值解及 θ 的数值结果. 当 $\lambda=10^{-4}$ 时, 其数值结果相对比较稳定. 同时当 $\lambda=0$, θ 有一部分是取负数并呈现激烈的震荡, 而 $\lambda=10^{-4}$ 几乎都是正的数. 从实际应用价值考虑, 其数值结果表明基于 Hull-White 模型有必要使用正则化方法. 另一方面, 比较 Hull-White 模型和 Vasicek 模型, 显然考虑 Hull-White 模型改善拟合

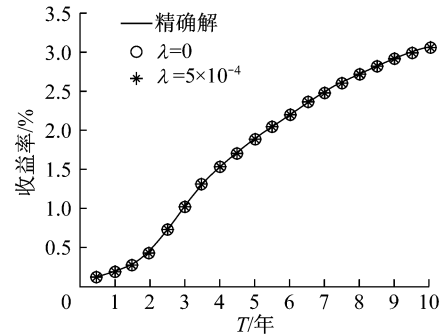


图 7 比较收益率市场数据和数值解 ($\lambda=0$ 和 $\lambda=5 \times 10^{-4}$)

Fig.7 Comparison of the market yield curve and the numerical solutions ($\lambda=0$ and $\lambda=5 \times 10^{-4}$)

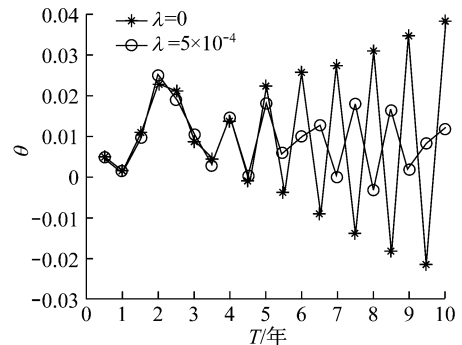


图 8 比较不同的正则化参数 $\theta(t)$ 的数值结果

Fig.8 Comparison of $\theta(t)$ with the corresponding regularization parameters

的结果.

4 结论

本文提出一种有效的正则化方法估计 Hull-White 模型中的参数. 证明了该计算方法稳定性和收敛性. 通过数值模拟结果确认了基于 Hull-White 模型正则化方法计算的有效性. 最后实际应用表明了正则化方法更加有效并更符合实际意义.

致谢

感谢同济大学数学系姜礼尚教授对本文提出建设性的意见.

参考文献:

[1] Vasicek O. An equilibrium characterization of the term structure

[J]. Journal of Financial Economics, 1977, 5(2), 177.
 [2] Hull J, White A. Pricing interest-rate-derivative securities [J]. The Review of Financial Studies, 1990, 3 (4), 573.
 [3] Brigo D, Mercurio F. Interest-rate models: theory and practice [M]. Berlin: Springer-Verlag, 2006.
 [4] Hanke M, Scherzer O. Inverse problems light: numerical differentiation [J]. The American Mathematical Monthly, 2001, 108 (6) 512.
 [5] Linz P. Analytical and numerical methods for Volterra equations [M]. Philadelphia: SIAM, 1985.
 [6] Engl H W, Hanke M, Neubauer A, et al. Regularization of inverse problems [M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996.
 [7] Adams A R, Fournier J J F. Sobolev spaces [M]. Beijing: Beijing World Publishing House, 2009.
 [8] Nair M L. Linear operator equations [M]. Singapore: World Scientific, 2009.

(上接第 1572 页)

$$\frac{\partial}{\partial t} K(f_t)_{t=0} = \int_{PTM} \frac{1}{F^2} [n(\rho_\alpha - \hat{\rho}_\alpha) + F^2(\gamma_\alpha - \hat{\gamma}_\alpha)] V'^\alpha dV + \int_{PTM} \frac{1}{F^2} [n(\bar{\rho}_\beta - \hat{\rho}_\beta) + F^2(\tilde{\gamma}_\beta - \vartheta_\beta)] V''^\beta dV. \quad (20)$$

因为 $g_{\alpha\bar{\beta}}(f(z), \zeta)$ 和 $g_{\alpha\bar{\beta}}(f(z), \hat{\zeta})$ 的定义域不一样, 从而

定理 2 在复 Finsler 流形上, $K(f)$ 不是同伦不变的.

由式(17)和(18)知, 对于 Kähler 流形间的光滑映射 $f, K(f)$ 是同伦不变的.

参考文献:

[1] He Q, Shen Y B. Some results on harmonic maps for Finsler manifolds[J]. International Journal of Mathematics, 2005(16): 1017.
 [2] He Q, Shen Y B. Some properties of harmonic maps for Finsler manifolds[J]. Houston Journal of Mathematics, 2007(33): 683.
 [3] Mo X H. Harmonic maps from Finsler manifolds[J]. Illinois Journal of Mathematics, 2001, 45(4): 1331.

[4] Mo X H, Yang Y. The existence of harmonic maps from Finsler manifolds to Riemannian manifolds[J]. Science in China Series A: Mathematics, 2005, 48(1): 115.
 [5] Shen Y B, Zhang Y. Second variation of harmonic maps between Finsler manifolds [J]. Science in China Series A: Mathematics, 2004, 47(1): 39.
 [6] Nishikawa S. Harmonic maps of Finsler manifolds[C]//Topics in Differential Geometry. Bucharest: Editura Academici Române, 2008: 207-247.
 [7] Han J W, Shen Y B. Harmonic maps from complex Finsler manifolds[J]. Pacific Journal of Mathematics, 2008, 236 (2): 341.
 [8] Jost J, Yau S T. A nonlinear elliptic system for maps from Hermitian to Riemannian manifolds and rigidity theorems in Hermitian geometry [J]. Acta Mathematica, 1993, 170 (2): 221.
 [9] Munteanu G. Complex spaces in Finsler, Lagrange and Hamilton geometries [M]. [S. l.]: Kluwer Academic Publishers, 2004.
 [10] Xiao J X, Zhong T D, Qiu C H. Bochner technique in Strongly Kähler Finsler manifolds[J]. Acta Mathematica Scientia, 2010, 30(B1): 89.
 [11] Bland J, Kalka M. Variations of holomorphic curvature for Kähler Finsler metrics [J]. Contemporary Mathematics, 1996 (196): 121.