

# 基于四边形网格的流形方法覆盖系统生成算法

武 杰, 蔡永昌

(同济大学 土木工程学院 地下建筑与工程系, 上海 200092)

**摘要:** 对流形方法的有限覆盖系统进行了深入研究, 基于任意四边形数学网格, 系统地提出和发展了一种简单、快速、稳定的流形方法覆盖系统生成算法. 该算法未引入任何附加假设, 可以容易、方便地进行复杂多裂纹(节理)岩体及其裂纹扩展过程的流形单元生成及物理覆盖编码, 较好地解决了流形方法实施时遇到的瓶颈问题, 为流形方法的研究和进一步应用奠定了良好的基础.

**关键词:** 数值流形方法; 有限覆盖; 四边形; 流形单元  
**中图分类号:** TB115 **文献标志码:** A

## Generation Algorithm of Cover System in Manifold Method with Quadrangular Meshes

WU Jie, CAI Yongchang

(Department of Geotechnical Engineering, College of Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China)

**Abstract:** A simple and efficient algorithm for the generation of finite cover system with arbitrary quadrangular mathematical meshes is proposed. Both the generation of manifold elements and the coding of physical covers can be carried out conveniently by the algorithm without any additional assumptions, even for the complex problems with multiple cracks and their propagation. It is believed that the key problem in the implementation of manifold method is well solved at the present work. The proposed algorithm also lays a good foundation for a further study and application of manifold method.

**Key words:** numerical manifold method; finite cover; quadrangular; manifold element

基于有限覆盖系统的流形方法<sup>[1]</sup>可以方便统一地处理连续和非连续问题, 对含有裂隙、节理等的缺陷体的力学分析及裂隙开裂扩展过程的破坏分析等有着巨大的优越性, 近年来得到了极大的重视和广

泛的研究<sup>[2-8]</sup>.

流形方法的核心思想是: 保持数学网格不变(也可变), 通过物理线对数学覆盖的再切割来实现非连续问题的动态模拟与分析. 流形方法的数学网格可以采用与分析区域边界无直接联系的标准矩形、长方体等, 也可直接采用分析区域的有限元网格, 其数学网格的生成技术已十分稳定和成熟. 而流形方法的物理线对数学覆盖再剖分后的物理覆盖(有限覆盖)系统的生成却是其难点和研究焦点所在, 比较有代表性的工作是曹文贵等<sup>[9]</sup>辅以流形单元分类和枚举方法提出的流形元覆盖系统生成算法, 对流形覆盖的编号原则和形成进行了较系统的研究, 能处理各种复杂的节理和裂隙, 为后续的相关研究提供了很好的借鉴和参考; 蔡永昌等<sup>[10]</sup>基于流形覆盖定义发展了相应算法; 陈刚等<sup>[11]</sup>探讨了基于有向遍历理论的流形元覆盖系统; 李海枫等<sup>[12]</sup>结合三维块体切割技术进行了三维流形单元的生成; 韩有民等<sup>[13]</sup>、朱爱军等<sup>[14]</sup>、温鑫等<sup>[15]</sup>、张大林等<sup>[16]</sup>均对流形覆盖的生成算法进行了研究. 尽管经过了大量的努力与研究, 目前流形方法有限覆盖系统的生成理论与算法研究仍处于起步和探索阶段, 还远不能与稳定、成熟的有限元网格生成技术相提并论. 结合已有的上述研究基础和对流形覆盖理论的深入研究, 本文力图提出和发展一种简单、快速、稳定的流形有限覆盖生成算法, 以解决流形方法的瓶颈问题.

## 1 流形方法有限覆盖系统自动生成

图 1 所示任意几何形状的分析区域  $\Omega$ , 区域内含有 2 条裂纹线. 采用流形方法进行分析时可以利用成熟的有限元网格划分技术生成图 2 所示的数学网格: 含有 30 个数学节点和 21 个数学单元. 再按如下步骤生成流形方法的有限覆盖系统.

收稿日期: 2012-04-04

基金项目: 国家自然科学基金(10972161); 中央高校基本科研业务费专项资金(0230219131)

第一作者: 武 杰(1988—), 男, 博士生, 主要研究方向为岩土计算方法. E-mail: jie\_voo@gmail.com

通讯作者: 蔡永昌(1972—), 男, 教授, 工学博士, 主要研究方向为岩土计算力学. E-mail: yccai@tongji.edu.cn

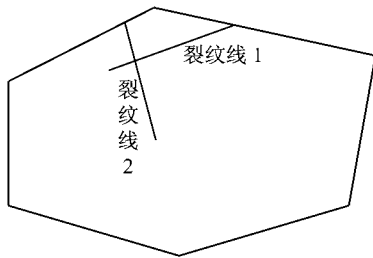


图 1 含 2 条裂纹线的分析区域

Fig.1 An arbitrary domain with two cracks

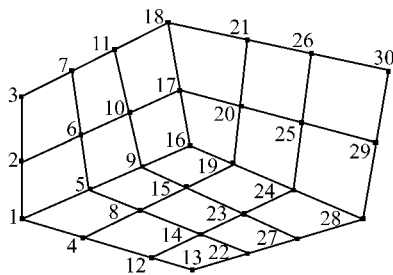


图 2 四边形数学网格

Fig.2 Quadrangular mathematical meshes

### 1.1 物理网格叠加

将裂纹线等物理网格叠加到数学网格上, 求出裂纹线自身的交点以及裂纹线与数学单元边的交点. 如图 3 所示, 记录求交后的裂纹线为: 21-35-34-31 和 32-34-36-33 以及求交后的数学单元边 11-31, 31-10, 11-32, 32-18 等.

定义被剖分后的裂纹线上的线段为物理边, 数学单元的边(含剖分后)为数学边, 则图 3 中的 21-35, 35-34 等属于物理边, 11-31, 31-10, 7-11 等属于数学边. 当物理边与数学边重合时, 只选择物理边.

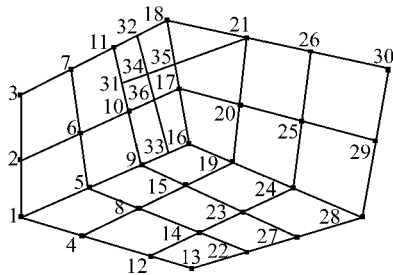


图 3 叠加裂纹线后的数学网格

Fig.3 Cracks overlap with the mathematical mesh

### 1.2 流形单元生成

图 4 所示的数学单元 10-17-18-11 将包含在该数学单元内的所有数学边 11-31, 31-10, 10-36, 36-17, 17-35, 35-18, 18-32, 32-11 以及所有物理边 31-34, 34-35, 36-34, 34-32 记入临时链表 TSList 中. 从 TSList 中的任意数学边出发, 按照夹角顺时针最小的原则寻找下一条相邻边, 例如边 17-35 的连接边

为 35-18 和 35-34, 但边 35-17 与边 35-34 的夹角小于边 35-17 与边 35-18 的夹角, 故 17-35 的下一条边为 35-34, 依次寻找得到 34-36, 36-17, 则 17-35-34-36 形成一条流形单元. 注意在 TSList 中数学边只能被使用 1 次, 物理边最多被使用 2 次.

同理可以生成数学单元 10-17-18-11 的所有流形单元 17-35-34-36, 35-18-32-34, 32-11-31-34, 31-10-36-34 以及分析区域  $\Omega$  的所有流形单元.

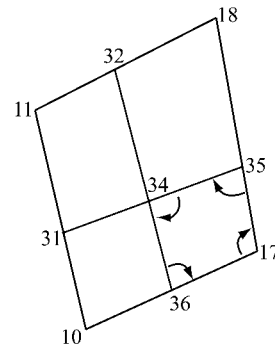


图 4 流形单元生成

Fig.4 Generation of the manifold element

### 1.3 物理覆盖生成及编号

在流形方法里裂纹等物理线进一步剖分数学覆盖为流形分析所需的物理覆盖. 如图 5 所示的数学覆盖 10 由数学单元 5-9-10-6, 6-10-11-17, 9-16-17-10 和 10-17-18-11 构成.

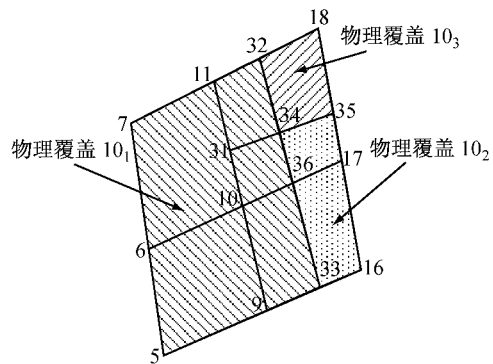


图 5 数学覆盖 10 及其剖分后的物理覆盖

Fig.5 Mathematical cover 10 and its cut physical covers

按照“共数学边的流形单元的集合构成一独立的物理覆盖”的原则来生成数学覆盖 10 被物理线剖分后的所有物理覆盖. 图 5 中, 流形单元 32-11-31-34 与 11-7-6-10-31 通过数学边 11-31 相连, 流形单元 11-7-6-10-31 与 6-5-9-10 通过数学边 10-6 相连, 流形单元 6-5-9-10 与 9-33-36-10 通过数学边 9-10 相连, 流形单元 9-33-36-10 与 31-10-36-34 通过数学边 36-10 相连, 故这 5 个共数学边的流形单元 32-11-31-

34, 11-7-6-10-31, 6-5-9-10, 9-33-36-10, 31-10-36-34 的集合构成一独立的物理覆盖  $10_1$ . 将这 5 个流形单元的物理覆盖编号初始化为其对应的数学单元节点号(即数学覆盖号), 再将这 5 个流形单元中的物理覆盖编号为 10 的位置替换为  $10_1$ , 即可完成流形单元的真实物理覆盖编号, 例如流形单元 32-11-31-34 的物理覆盖编号初始化为 10-17-18-11, 替换后成为  $10_1$ -17-18-11; 流形单元 9-33-36-10 的物理覆盖编号初始化为 9-16-17-10, 替换后成为 9-16-17- $10_1$ . 同理, 流形单元 17-35-34-36 和 17-36-33-16 构成了物理覆盖  $10_2$ , 流形单元 35-18-32-34 构成了物理覆盖  $10_3$ .

按照同样的方法可以正确地生成所有的数学覆盖被物理线剖分后的物理覆盖, 并完成其流形单元的对应物理覆盖编号, 如图 6 所示.

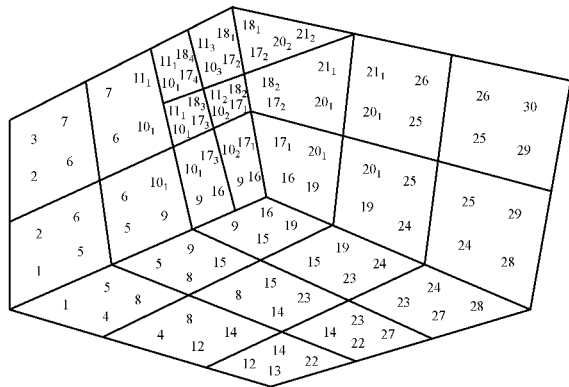


图 6 流形方法的有限覆盖系统

Fig.6 Finite cover system of the manifold method

在实际使用中, 为了方便流形方法编程和应用, 需对物理覆盖进行重新编号. 如果记:  $10_1 \rightarrow 10$ ,  $10_2 \rightarrow 31$ ,  $10_3 \rightarrow 32$ ,  $11_1 \rightarrow 11$ ,  $11_2 \rightarrow 33$ ,  $11_3 \rightarrow 34$ ,  $17_1 \rightarrow 35$ ,  $17_2 \rightarrow 36$ ,  $17_3 \rightarrow 37$ ,  $18_1 \rightarrow 18$ ,  $18_2 \rightarrow 38$ ,  $18_3 \rightarrow 39$ ,  $18_4 \rightarrow 40$ ,  $20_1 \rightarrow 20$ ,  $20_2 \rightarrow 41$ ,  $21_1 \rightarrow 21$ ,  $21_2 \rightarrow 42$ , 则重新编号后的有限覆盖系统如图 7 所示.

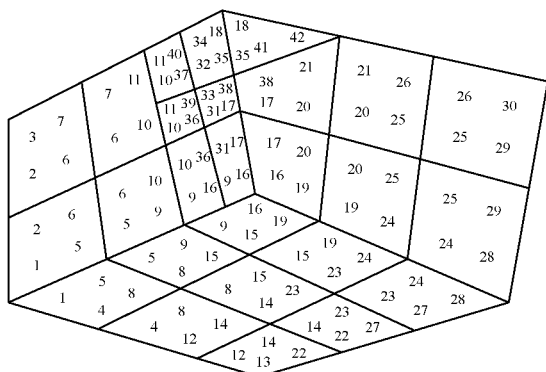


图 7 重新编号后的有限覆盖系统

Fig.7 Renumbered finite cover system

## 2 裂纹扩展后的有限覆盖系统

假设图 3 的裂纹线 32-34-36-33 从点 33 扩展到点 37(图 8), 则对裂纹 33-37 所影响到的数学节点和数学单元重复第 1 节的步骤, 即可正确地生成裂纹扩展后的有限覆盖系统, 如图 9 所示. 裂纹扩展后, 新增加了物理覆盖  $9_2, 16_2$ . 相应地, 计算时可以在前面物理覆盖编号的基础上快速编号为:  $9_2 \rightarrow 43, 16_2 \rightarrow 44$ .

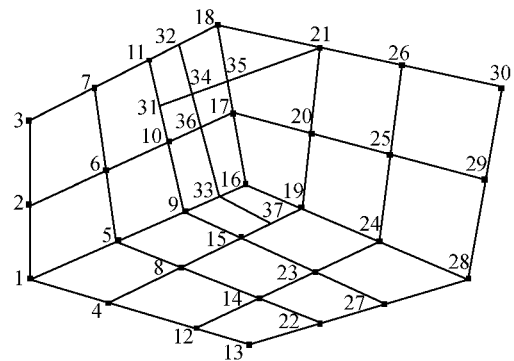


图 8 裂纹扩展

Fig.8 Crack propagation

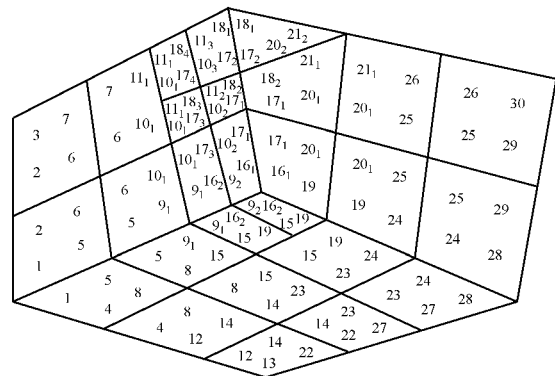


图 9 裂纹扩展后的有限覆盖系统

Fig.9 Finite cover system after crack propagation

注意到在裂纹扩展过程中仅需在扩展裂纹线所可能影响到的数学结点和数学单元上执行本算法, 故裂纹扩展步流形方法有限覆盖系统的重新生成耗时极少, 效率极高.

## 3 测试算例

图 10 所示的含有多条断层线的节理岩体, 其四边形数学网格布置如图 11 所示, 利用本文算法自动生成的流形方法分析法所需的有限覆盖系统如图 12 所示. 可以验证, 图 12 的有限覆盖系统是正确的, 完全符合流形方法的理论和要求.

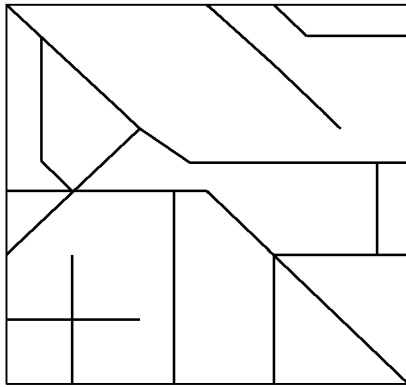


图 10 节理岩体分析模型

Fig. 10 Analysis model for the jointed rock

7	14	21	28	35	42	49
6	13	20	27	34	41	48
5	12	19	26	33	40	47
4	11	18	25	32	39	46
3	10	17	24	31	38	45
2	9	16	23	30	37	44
1	8	15	22	29	36	43

图 11 节理岩体数学网格

Fig. 11 Mathematical meshes for the jointed rock

7	59 14 74 57 73 75 13 58 72	14 21	21 28	28 95 94 35 27 109 34 107	108 42 106 119	42 49 119 130
6	73 56 72 71 55 12	13 69 20 85 72 19 12 59	20 27	27 107	34 104 107 41	41 48 120 40 59 40
5	71 55 12 52 82 83 65 70	12 84 82 83 65 70	19 26 83 79 90	26 33 90 102	33 40 102 116	40 47 116 127
4	67	11 18	18 25	93 105 25 32	105 117 32 39	117 128 118 129 10 126 115 46
3	54 68 64 66 51 53 3 10	66 80 10 17	80 92 81 91 17 89 78 24	25 88 32 103 91 31 24 101	32 39 31 33	39 126 115 46 38 124 112 45
2	3 10 2 62	10 17 9 16	17 89 78 24 16 87 77 23	24 101 23 93	100 97 113 114 99 37 30 111	113 125 37 44
1	50 63 1 60	61 16 8 15	16 87 77 23 15 86 76 22	23 98 22 96	30 111 29 36	37 44 123 110 36 111 122 43

图 12 节理岩体有限覆盖系统

Fig. 12 Finite cover system for the jointed rock

在本算例中采用了规则的四边形网格和较特殊的裂纹倾角,其目的是为了生成过小的流形单元,以方便图示表达自动生成的物理覆盖编号.实际上,本算法对网格形状和裂纹倾角并无任何限制.大量测试算例表明,本文方法能正确生成含任意形状四边形、任意角度裂纹线的分析体的有限覆盖系统.

### 4 结语

系统详细地研究了基于任意四边形数学网格的

流形方法有限覆盖系统生成算法,提出了“共数学边的流形单元的集合构成一独立的物理覆盖”的覆盖系统生成原则,为流形方法覆盖生成提供了具有普遍意义的理论方法,较好地解决了流形方法实施时的瓶颈问题,也为流形方法的进一步研究、应用奠定了基础.在能检索到的公开发表文献所提出的方法中,本文方法应该是最简单、稳定和快速的流形方法有限覆盖系统生成算法.

虽然本文以四边形数学网格为例来阐述流形方法的有限覆盖系统生成算法,但该算法从理论上讲

可以很容易推广到任意形状的数学网格,如三维四面体、六面体数学网格等,相应的研究工作正在进行中。

### 参考文献:

- [1] Shi G H. Manifold method of material analysis [C]// Transaction of the 9th Army Conference on US Army Research Office; Applied Mathematics and Computing. Minneapolis: [s. n.], 1991:57-76.
- [2] Ma G W, An X M, He L. The numerical manifold method: a review [J]. International Journal of Computational Methods. 2010,7:1.
- [3] JIANG Q H, ZHOU C B, LI D Q. A three-dimensional numerical manifold method based on tetrahedral meshes [J]. Computers and Structures, 2009,87:880.
- [4] 李树忱,程玉民. 数值流形方法及其在岩石力学中的应用[J]. 力学进展,2004, 34(4):446.  
LI Shuchen, CHENG Yumin. Numerical manifold method and its applications in rock mechanics[J]. Advances in Mechanics, 2004, 34(4):446.
- [5] 张湘伟,章争荣,吕文阁,等. 数值流形方法研究及应用进展[J]. 力学进展,2010,40(1):1.  
ZHANG Xiangwei, ZHANG Zhengrong, LÜ Wenge, et al. Advances and perspectives in numerical manifold method and its applications[J]. Advances In Mechanics, 2010,40(1):1.
- [6] 王芝银,李云鹏. 数值流形方法及其研究进展[J]. 力学进展, 2003,33(2):261.  
WANG Zhiyin, LI Yunpeng. Numerical manifold method and its development [J]. Advances in Mechanics, 2003, 33(2):261.
- [7] 郑榕明,张勇慧. 基于六面体覆盖的三维数值流形方法的理论探讨与应用[J]. 岩石力学与工程学报,2004,23(10): 1745.  
ZHENG Rongming, ZHANG Yonghui. Application and discussion of three dimensional numerical manifold method based on hexahedron element[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2004, 23(10): 1745.
- [8] 姜清辉,周创兵,张煜. 三维数值流形方法的点-面接触类型[J]. 计算力学学报,2006,23(3):569.  
JIANG Qinghui, ZHOU Chuangbing, ZHANG Yu. A model of point-to-face contact for three-dimensional numerical manifold method [J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2006,23(3):569.
- [9] 曹文贵,速宝玉. 流形元覆盖系统自动生成方法之研究[J]. 岩土工程学报,2001,23(20):187.  
CAO Wengui, SU Baoyu. A study on techniques of automatically forming of cover system of numerical manifold method [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2001,23(20):187.
- [10] 蔡永昌,朱合华,夏才初. 流形方法覆盖系统自动生成算法[J]. 同济大学学报:自然科学版,2004, 32(3): 585.  
CAI Yongchang, ZHU Hehua, XIA Caichu. Automatically forming of cover system in numerical manifold method [J]. Journal of Tongji University: Natural Science, 2004, 32(3): 585.
- [11] 陈刚,刘佑荣. 流形元覆盖系统的有向图遍历生成算法研究[J]. 岩石力学与工程学报,2003,22(5):711.  
CHEN Gang, LIU Yourong. Generation of cover system for numerical manifold in travel theory of the oriented graph [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2003,22 (5):711.
- [12] 李海枫,张国新,石根华. 流形切割及有限元网格覆盖下的三维流形单元生成[J]. 岩石力学与工程学报,2010,29(4):731.  
LI Haifeng, ZHANG Guoxin, SHI Genhua. Manifold cut and generation of three-dimensional element under fe mesh cover [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2010, 29(4):731.
- [13] 韩有民,罗先启,王水林,等. 裂纹扩展时物理覆盖与流形单元的生成算法[J]. 岩土工程学报,2005,27(6):662.  
HAN Youmin, LUO Xianqi, WANG Shuilin, et al. Formation algorithm of covers and manifold elements in NMM during propagation of cracks [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2005,27(6):662.
- [14] 朱爱军,邓安福,颜昌武,等. 岩体材料物理网格对流形元覆盖系统形成的影响[J]. 岩土力学,2004,25(2):1933.  
ZHU Aijun, DENG Anfu, YAN Changwu, et al. Effects of physical grid in rock mass for generation of cover system for numerical manifold method [J]. Rock and Soil Mechanics, 2004,25(2):1933.
- [15] 温鑫,王颖. 数值流形方法物理覆盖的自动生成[J]. 计算机仿真,2009, 26(5):107.  
WEN Xin, WANG Ying. Automatic generation of physical cover in numerical manifold method [J]. Computer Simulation, 2009,26(5):107.
- [16] 张大林,栾茂田,杨庆,等. 数值流形方法的网格自动剖分技术及其数值方法[J]. 岩石力学与工程学报,2004,23(1): 1836.  
ZHANG Dalin, LUAN Maotian, YANG Qing, et al. Automatic mesh generation and numerical algorithm of numerical manifold method [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2004,23(1): 1836.