

# 多塔斜拉-悬吊协作桥活载效应近似计算方法

周云岗<sup>1,2</sup>, 肖汝诚<sup>1</sup>

(1. 同济大学 土木工程学院, 上海 200092; 2. 同济大学 建筑设计研究院(集团)有限公司, 上海 200092)

**摘要:** 根据斜拉-悬吊协作桥的受力特点, 建立结构简化计算模型. 基于悬索桥重力刚度理论, 推导多塔斜拉-悬吊协作桥的悬吊部分在活载作用下的竖向位移表达式. 针对多塔斜拉-悬吊协作桥的关键力学问题, 应用推导出的竖向位移表达式, 给出主梁最大活载挠度、塔顶纵向位移、主缆恒活载轴力和中塔主缆抗滑移系数等关键力学参数的估算公式. 建立主跨为 600, 1 080 和 1 400 m 的三塔斜拉-悬吊协作桥和主跨为 1 400 m 的二至六塔斜拉-悬吊协作桥有限元模型, 较全面地验证所推导的公式. 结果表明: 对于三塔斜拉-悬吊协作桥, 关键力学参数的最大误差为 15% 左右; 对于四塔及以上斜拉-悬吊协作桥, 关键力学参数的最大误差为 20% 左右.

**关键词:** 多塔; 斜拉-悬吊协作桥; 近似计算; 重力刚度法; 关键力学问题

**中图分类号:** U448.25

**文献标志码:** A

with finite element software ANSYS. These models involve typical cable-stayed suspension bridges, such as three-towered bridges with different main spans, which are 600, 1 080 and 1 400 m, and the 1 400 m main-span bridges of different numbers of towers ranging from 2 to 6. In comparison with the results of finite element analysis, the result of this investigation clarifies the maximum error of the key mechanic parameters calculated by the proposed approximate formulas is within 15% for three-towered cable-stayed suspension, 20% for bridges over four towers.

**Key words:** multi-tower; cable-stayed suspension bridge; approximate analysis; theory of gravity stiffness; key mechanics problem

## Approximate Analysis Method of Multi-tower Cable-stayed Suspension Bridges Under Live Load

ZHOU Yungang<sup>1,2</sup>, XIAO Rucheng<sup>1</sup>

(1. College of Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. Tongji Architectural Design (Group) Co. Ltd., Shanghai 200092, China)

**Abstract:** Based on the mechanical property of cable-stayed suspension bridges, a reasonable and simplified model is established and the deflection expression of girder beam of multi-tower cable-stayed suspension bridge under live load is deduced in view of the gravity stiffness theory of suspension bridge. Then, some approximate formulats are presented, including maximum deflection of girder beam, displacement of the top of middle town, the axis force of main cable and the safety coefficient of restricting cable slide and so on. In order to verify the approximate formulas, three-dimensional finite element models which are established, which are analyzed

缆索承重桥梁在活载作用下内力和变形的分析方法可归纳为有限元法<sup>[1-2]</sup>和解析法<sup>[3]</sup>两大类. 有限元法一般采用具有非线性分析功能的有限元程序进行计算分析, 可以精确地获得结构受力状态, 但数据输入复杂、计算量庞大, 不具备普遍性, 且计算结果较难验证. 解析法一般基于简化模型推导出一些具有普遍性的实用公式, 直观简洁地表达结构的受力特点, 其在现代桥梁设计中仍发挥举足轻重的作用, 具体表现为: 在概念设计阶段, 可迅速且较准确地了解荷载作用下结构内力和变形的分布规律; 在精细化分析阶段, 可较全面地验证复杂的有限元计算成果.

多塔斜拉-悬吊协作桥(下文简称多塔协作桥)是多塔缆索承重桥梁主要结构形式之一, 是未来缆索承重桥发展的一个重要方向<sup>[4]</sup>. 目前, 国外针对斜拉-悬吊协作桥梁(下文简称协作桥)近似计算方法的研究成果较少, 国内学者在这方面做了一些有意义的探索. 张哲等<sup>[5]</sup>基于大位移分区不完全广义变

收稿日期: 2012-07-17

基金项目: 国家“九七三”重点基础研究发展计划(2013CB036300)

第一作者: 周云岗(1980—), 男, 博士生, 主要研究方向为大跨度桥梁设计理论. E-mail: 0710020026@tongji.edu.cn

通讯作者: 肖汝诚(1962—), 男, 教授, 博士生导师, 工学博士, 主要研究方向为桥梁结构体系设计及计算理论.

E-mail: xiaorc@tongji.edu.cn

分原理,考虑主梁、主塔的压弯耦合效应,按连续体的方法建立结构体系的势能泛函,推导了自锚式协作桥的微分方程.叶毅<sup>[6]</sup>将协作桥的缆索系统与主梁分离,应用能量原理得到竖向作用下结构受力状态的迭代方程.夏国平<sup>[7]</sup>将缆索系统作为主梁的弹性支承,应用弹性地基梁法简化分析了活载作用下塔、梁的内力状态.然而,当前的研究成果主要针对单、双塔地锚或自锚协作桥,且一般需编制程序来实现,较为复杂,未达到快速估算的效果.

本文在多塔悬索桥近似计算理论<sup>[8-9]</sup>的基础上,根据协作桥的力学特点,应用重力刚度法<sup>[9-10]</sup>,推导悬吊部分在活载作用下的竖向位移表达式,并针对多塔协作桥的关键力学问题<sup>[11]</sup>,给出主梁最大活载挠度、塔顶纵向位移和中塔主缆抗滑移系数等关键力学响应参数的估算公式.

## 1 基本方程的推导

协作桥的主梁在斜拉和悬吊的结合部位,通过可靠的构造措施连接以确保两部分变形连续.然而,就结构整体而言,两部分的竖向变形相互影响很小.因此,进行活载效应近似计算时,可将两部分分开独立分析.斜拉部分的索、塔、梁构成三角几何不变体,悬索部分的索塔、主缆、吊索和主梁形成几何可变

体.在活载作用下,斜拉部分抵抗变形的能力远高于悬吊部分,主梁活载挠度最大值一般位于悬吊部分.此外,悬吊部分的中塔主缆还存在抗滑移稳定问题.因此,多塔协作桥活载效应近似计算的核心是悬吊部分的活载效应.

根据上述特点,应用重力刚度法推导多塔协作桥悬吊部分在竖向荷载作用下的竖向位移表达式,基本假定为:① 吊杆为竖直,且沿桥跨密布,当作仅在竖向有抗力的薄膜;② 活载作用下,不考虑吊索的拉伸和倾斜;③ 恒载沿跨径均布,主缆线形为抛物线,且抗弯刚度很小;④ 忽略主梁抗弯刚度,假定主梁各跨简支并布满全跨,且截面特性为常量;⑤ 主缆在锚碇处无变位.

### 1.1 重力刚度方程

多塔协作桥悬吊部分简化计算模型如图1所示.图中 $w_j$ 表示有主梁位置的均布荷载,为一、二期恒载之和; $w_{cj}$ 表示无主梁位置的均布荷载,为主缆线荷载; $u_1, u_2, \dots, u_{n+1}$ 表示塔顶纵向位移; $y_j$ 表示第 $j$ 跨主缆的恒载线形,分布规律为抛物线,根据协作桥的受力特点,各主跨的主缆线形分为三段抛物线; $v_j(x_j)$ 表示活载作用下第 $j$ 跨主梁的竖向挠度; $l_1, l_2$ 分别表示悬吊区域和非悬吊区域的长度; $L_j$ 表示第 $j$ 跨的跨径长度; $F_j$ 表示第 $j$ 跨主缆垂度.

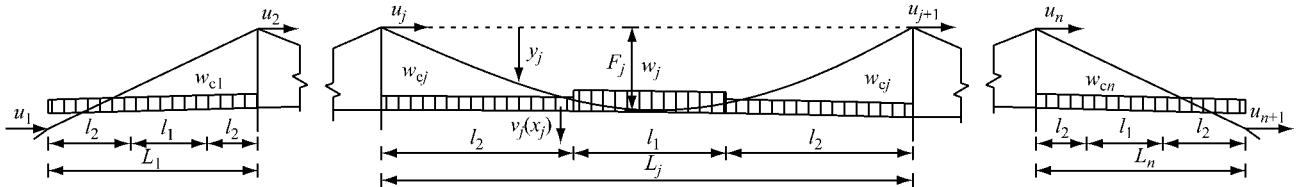


图1 多塔协作桥简化计算模型

Fig.1 Model of multi-span cable-stayed suspension bridges

由假定条件②可知,主缆的水平分力为常量,且在恒载作用下,各跨主缆的水平分力相等.根据挠度理论,多塔协作桥第 $j$ 跨主梁的挠度方程为

$$E_b I_b \frac{d^4 v_j}{dx_j^4} - (H_w + h_j) \frac{d^2 v_j}{dx_j^2} = p_j + h_j \frac{d^2 y_j}{dx_j^2} \quad (1)$$

式中: $H_w$ 为主缆恒载水平分力, $h_j$ 为第 $j$ 跨主缆活载水平分力, $p_j$ 为第 $j$ 跨活载, $E_b$ 为主梁弹性模量, $I_b$ 为主梁截面惯性矩.忽略主梁抗弯刚度,挠度方程改写为

$$-(H_w + h_j) \frac{d^2 v_j}{dx_j^2} = p_j + h_j \frac{d^2 y_j}{dx_j^2} \quad (2)$$

由此可得

$$v_j'' = -\frac{p_j}{H_j} - \frac{h_j}{H_j} y_j'' \quad (3)$$

式中: $H_j = H_w + h_j$ .根据协作桥主跨恒载的分布规律,将挠度方程分为以下三段:

$$\begin{cases} v_j'' = -\frac{p_j}{H_j} + \frac{\epsilon_{j2} w_j h_j}{H_w H_j}, & 0 \leq x_j \leq l_2 \\ v_j'' = -\frac{p_j}{H_j} + \frac{w_j h_j}{H_w H_j}, & l_2 \leq x_j \leq l_2 + l_1 \\ v_j'' = -\frac{p_j}{H_j} + \frac{\epsilon_{j2} w_j h_j}{H_w H_j}, & l_2 + l_1 \leq x_j \leq L_j \end{cases} \quad (4)$$

式中: $\epsilon_{j2} = w_{cj}/w_j$ .根据式(4),可将主梁挠度分解为活载挠度 $\bar{v}_j$ 和主缆活载张力挠度 $\bar{\bar{v}}_j$ ,其中

$$v_j = \bar{v}_j - \bar{\bar{v}}_j \quad (5)$$

$$\bar{\bar{v}}_j'' = \frac{-p_j}{H_j} \quad (6)$$

$$\bar{v}_j'' = -\frac{\epsilon_{j2} w_j h_j}{H_w H_j} \text{ 或 } \bar{v}_j'' = -\frac{w_j h_j}{H_w H_j} \quad (7)$$

式(6)求解方法可参考文献[9],不再赘述. 式(7)求解必须利用缆索系统变形相容方程,即全桥主缆长度变化的水平投影为零.

各跨主缆长度变化水平投影为

$$u_{j+1} - u_j = \frac{h_j L_j}{EA} - \frac{\epsilon_{j2} w_j}{H_w} \int_0^{l_2} v_j dx_j - \frac{w_j}{H_w} \int_{l_2}^{l_2+l_1} v_j dx_j - \frac{\epsilon_{j2} w_j}{H_w} \int_{l_2+l_1}^{L_j} v_j dx_j \quad (8)$$

式中:  $E$  为主缆弹性模量,  $A$  为主缆截面面积. 假定  $EA = \infty$ , 可得

$$u_{j+1} - u_j = -\frac{\epsilon_{j2} w_j}{H_w} \int_0^{l_2} v_j dx_j - \frac{w_j}{H_w} \int_{l_2}^{l_2+l_1} v_j dx_j - \frac{\epsilon_{j2} w_j}{H_w} \int_{l_2+l_1}^{L_j} v_j dx_j \quad (9)$$

将各跨进行叠加,可得

$$u_n - u_1 = \sum \left[ \frac{w_j}{H_w} \left( -\epsilon_{j2} \int_0^{l_2} v_j dx_j - \int_{l_2}^{l_2+l_1} v_j dx_j - \epsilon_{j2} \int_{l_2+l_1}^{L_j} v_j dx_j \right) \right] \quad (10)$$

由于锚碇处主缆变位为零,则式(10)简化为

$$\frac{w_j}{H_w} \sum \left( \epsilon_{j2} \int_0^{l_2} v_j dx_j + \int_{l_2}^{l_2+l_1} v_j dx_j + \epsilon_{j2} \int_{l_2+l_1}^{L_j} v_j dx_j \right) = 0 \quad (11)$$

将式(5)代入式(11)可得

$$w_j \sum \left( \epsilon_{j2} \int_0^{l_2} \bar{v}_j dx_j + \int_{l_2}^{l_2+l_1} \bar{v}_j dx_j + \epsilon_{j2} \int_{l_2+l_1}^{L_j} \bar{v}_j dx_j \right) = w_j \sum \left( \epsilon_{j2} \int_0^{l_2} \bar{v}_j dx_j + \int_{l_2}^{l_2+l_1} \bar{v}_j dx_j + \epsilon_{j2} \int_{l_2+l_1}^{L_j} \bar{v}_j dx_j \right) \quad (12)$$

对于多塔协作桥,单主跨加载时主梁挠度最大,即  $\bar{v}_j$  在非加载跨始终为零. 由此,式(12)可表示为

$$w_j \sum \left( \epsilon_{j2} \int_0^{l_2} \bar{v}_j dx_j + \int_{l_2}^{l_2+l_1} \bar{v}_j dx_j + \epsilon_{j2} \int_{l_2+l_1}^{L_j} \bar{v}_j dx_j \right) = w_j \left( \epsilon_{i2} \int_0^{l_2} \bar{v}_i dx_i + \int_{l_2}^{l_2+l_1} \bar{v}_i dx_i + \epsilon_{i2} \int_{l_2+l_1}^{L_i} \bar{v}_i dx_i \right) \quad (13)$$

式中:下标  $i$  为加载跨跨号. 式(13)的左边对应图 2 所示均布荷载作用下简支梁弯矩图的面积,图中  $a_j^* = w_j h_j / H_w H_j$ ; 右边对应加载跨活载  $p_i$  缩小  $H_w$  倍后作用于简支梁所产生弯矩的面积.

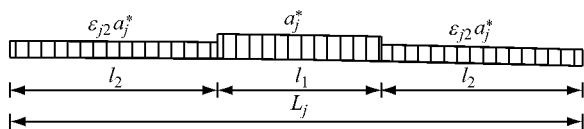


图 2  $\bar{v}_j$  计算模型示意图

Fig. 2 Model of  $\bar{v}_j$

图 2 中简支梁弯矩即为  $\bar{v}_j$ , 其值为

$$\bar{v}_j(x_j) = \begin{cases} a_j^* \left( \epsilon_{j2} l_2 x_j + \frac{l_1 x_j}{2} - \frac{\epsilon_{j2} x_j^2}{2} \right), & 0 \leq x_j \leq l_2 \\ a_j^* \left[ \frac{l_1 x_j}{2} + \frac{\epsilon_{j2} l_2^2}{2} - \frac{(x_j - l_2)^2}{2} \right], & l_2 \leq x_j \leq l_2 + l_1 \\ a_j^* \left[ \epsilon_{j2} l_2 (L_j - x_j) + \frac{l_1 x_j}{2} - \frac{\epsilon_{j2} (L_j - x_j)^2}{2} \right], & l_2 + l_1 \leq x_j \leq L_j \end{cases} \quad (14)$$

对  $\bar{v}_j$  积分并叠加可得

$$\sum \left[ w_j \left( \epsilon_{j2} \int_0^{l_2} \bar{v}_j dx_j + \int_{l_2}^{l_2+l_1} \bar{v}_j dx_j + \epsilon_{j2} \int_{l_2+l_1}^{L_j} \bar{v}_j dx_j \right) \right] = \sum \frac{a_j^* w_j (12 \epsilon_{j2} l_1 l_2^2 + l_1^3 + 6 l_1^2 l_2 + 8 \epsilon_{j2}^2 l_2^3)}{12} \quad (15)$$

假定以加载跨  $i$  的  $a_i^*$  和  $w_i$  为基准值,将各跨由活载引起的主缆水平力  $h_j$  视为常量,则  $a_i^*$  和  $w_i$  成正比. 令

$$\frac{a_j^*}{a_i^*} = \frac{w_j}{w_i} = \epsilon_{j1} \quad (16)$$

联立式(15),(16)和(13)可得

$$\frac{a_i^*}{12} \sum \epsilon_{j1}^2 (12 \epsilon_{j2} l_1 l_2^2 + l_1^3 + 6 l_1^2 l_2 + 8 \epsilon_{j2}^2 l_2^3) = \epsilon_{i2} \int_0^{l_2} \bar{v}_i dx_i + \int_{l_2}^{l_2+l_1} \bar{v}_i dx_i + \epsilon_{i2} \int_{l_2+l_1}^{L_i} \bar{v}_i dx_i \quad (17)$$

令

$$L_j^{*3} = \epsilon_{j1}^2 (12 \epsilon_{j2} l_1 l_2^2 + l_1^3 + 6 l_1^2 l_2 + 8 \epsilon_{j2}^2 l_2^3) \quad (18)$$

$$a_i^* = \frac{L_i^{*3}}{\sum L_j^{*3}} \quad (19)$$

将式(18),(19)代入(17)可得

$$a_i^* = \frac{12 a_i^*}{L_i^{*3}} \left[ \epsilon_{i2} \int_0^{l_2} \bar{v}_i dx_i + \int_{l_2}^{l_2+l_1} \bar{v}_i dx_i + \epsilon_{i2} \int_{l_2+l_1}^{L_i} \bar{v}_i dx_i \right] \quad (20)$$

联立式(5),(14),(16)和(20)可得活载作用下多塔协作桥主梁的竖向挠度. 主梁在活载加载跨的竖向挠度最大,设加载跨号为  $i$ ,其竖向挠度方程为

$$v_i(x_i) = \begin{cases} \bar{v}_i(x_i) - a_i^* \left( \epsilon_{i2} l_2 x_i + \frac{l_1 x_i}{2} - \frac{\epsilon_{i2} x_i^2}{2} \right), & 0 \leq x_i \leq l_2 \\ \bar{v}_i(x_i) - a_i^* \left[ \frac{l_1 x_i}{2} + \frac{\epsilon_{i2} l_2^2}{2} - \frac{(x_i - l_2)^2}{2} \right], & l_2 \leq x_i \leq l_2 + l_1 \\ \bar{v}_i(x_i) - a_i^* \left[ \epsilon_{i2} l_2 (L_i - x_i) + \frac{l_1 x_i}{2} - \frac{\epsilon_{i2} (L_i - x_i)^2}{2} \right], & l_2 + l_1 \leq x_i \leq L_i \end{cases} \quad (21)$$

估算时,一般忽略主缆活载轴力对总轴力的影



因此分析传统双塔悬吊桥时,忽略索塔刚度不会产生较大的误差.对于多塔缆索承重桥,中索塔刚度是影响结构整体刚度的主要因素之一,将其忽略将产生很大的误差,必须加以考虑.另外,主缆伸长使其垂度增大,进而增大主梁挠度,计算时宜考虑其影响.下面推导考虑主缆及索塔刚度的协作桥活载效应估算公式.

如图 1 所示,假设主缆在锚碇点及塔顶处的纵向位移依次为  $u_1, u_2, \dots, u_{n+1}$ , 因为锚碇位置主缆无变位,所以  $u_1 = u_{n+1} = 0$ ; 自左向右索塔的柔度为  $f_2, f_3, \dots, f_{n+1}$ , 由相容方程式(8)可得

$$\begin{cases} u_2 = \frac{h_1 L_1}{EA} - \frac{\epsilon_{12} w_1}{H_w} \int_0^{l_2} v_1 dx_1 - \\ \quad \frac{w_1}{H_w} \int_{l_2}^{l_2+l_1} v_1 dx_1 - \frac{\epsilon_{12} w_1}{H_w} \int_{l_2+l_1}^{L_1} v_1 dx_1 \\ u_{j+1} - u_j = \frac{h_j L_j}{EA} - \frac{\epsilon_{j2} w_j}{H_w} \int_0^{l_j} v_j dx_j - \\ \quad \frac{w_j}{H_w} \int_{l_j}^{l_j+l_1} v_j dx_j - \frac{\epsilon_{j2} w_j}{H_w} \int_{l_j+l_1}^{L_j} v_j dx_j \\ -u_n = \frac{h_n L_n}{EA} - \frac{\epsilon_{n2} w_n}{H_w} \int_0^{l_n} v_n dx_n - \\ \quad \frac{w_n}{H_w} \int_{l_n}^{l_n+l_1} v_n dx_n - \frac{\epsilon_{n2} w_n}{H_w} \int_{l_n+l_1}^{L_n} v_n dx_n \end{cases} \quad (31)$$

假定斜拉部分的斜拉索对索塔无水平力作用,由索塔水平力平衡条件可得

$$u_j = f_j (h_j - h_{j-1}), \quad 2 \leq j \leq n \quad (32)$$

将式(5)和(32)代入式(31),并考虑到非加载跨所对应的  $\bar{v}_j$  积分为零条件,进行整理后可得

$$\begin{cases} \left( f_2 + \frac{L_1}{EA} + \frac{w_1^2 L_1^{*3}}{12 H_w^2 H_1} \right) h_1 - f_2 h_2 = 0 \\ -f_j h_{j-1} + \left( \frac{L_j}{EA} + \frac{w_j^2 L_j^{*3}}{12 H_w^2 H_j} + f_j + \right. \\ \quad \left. f_{j+1} \right) h_j - f_{j+1} h_{j+1} = \frac{\epsilon_{j2} w_j}{H_w} \int_0^{l_j} \bar{v}_j dx_j + \\ \quad \frac{w_j}{H_w} \int_{l_j}^{l_j+l_1} \bar{v}_j dx_j + \frac{\epsilon_{j2} w_j}{H_w} \int_{l_j+l_1}^{L_j} \bar{v}_j dx_j \\ - \left( f_n + \frac{L_n}{EA} + \frac{w_n^2 L_n^{*3}}{12 H_w^2 H_n} \right) h_n + f_n h_{n-1} = 0 \end{cases} \quad (33)$$

令  $f_1^* = f_2 + g_1, f_j^* = f_j + f_{j+1} + g_j, f_n^* = f_n + g_n$ , 其中  $g_j = \frac{L_j}{EA} + \frac{w_j^2 L_j^{*3}}{12 H_w^2 H_j}$ . 式(33)中除加载跨外,其余各跨等式的右侧项为零.由此,可将所有非加载跨主缆活载水平力  $h_j$  表示为加载跨主缆活载水平力  $h_i$  的函数,并代入加载跨对应的相容方程,求得  $h_i$ , 再求得  $a_i^*$ , 进而获得加载跨主梁挠度.下面以三塔协作桥为例,推导主梁活载挠度的计算公式.由式(33)

可得

$$f_1^* h_1 - f_2 h_2 = 0 \quad (34a)$$

$$-f_2 h_1 + f_2^* h_2 - f_3 h_3 = \frac{\epsilon_{22} w_2}{H_w} \int_0^{l_2} \bar{v}_2 dx_2 + \frac{w_2}{H_w} \int_{l_2}^{l_2+l_1} \bar{v}_2 dx_2 + \frac{\epsilon_{22} w_2}{H_w} \int_{l_2+l_1}^{L_2} \bar{v}_2 dx_2 \quad (34b)$$

$$-f_3 h_2 + f_3^* h_3 - f_4 h_4 = 0 \quad (34c)$$

$$-f_n^* h_4 + f_4 h_3 = 0 \quad (34d)$$

由式(34a), (34c)和(34d)将  $h_1, h_3$  和  $h_4$  表示为  $h_2$  的表达式,并将之代入式(34b)可得

$$\left[ f_2^* - \frac{f_2^2}{f_1^*} - \frac{f_3^2}{f_3^* - \frac{f_4^2}{f_4^*}} \right] h_2 = \frac{\epsilon_{22} w_2}{H_w} \int_0^{l_2} \bar{v}_2 dx_2 + \frac{w_2}{H_w} \int_{l_2}^{l_2+l_1} \bar{v}_2 dx_2 + \frac{\epsilon_{22} w_2}{H_w} \int_{l_2+l_1}^{L_2} \bar{v}_2 dx_2 \quad (35)$$

将式(25)代入式(35),并令  $P=1$  可得加载跨主缆活载水平分力影响线为

$$h_2 = \frac{\frac{w_2}{H_w^2} \left[ \frac{\beta}{2} + \frac{l_2^2}{2} (\epsilon_{j2} - 1) \right]}{\left[ f_2^* - \frac{f_2^2}{f_1^*} - \frac{f_3^2}{f_3^* - \frac{f_4^2}{f_4^*}} \right]} \quad (36)$$

进一步可得参数  $a_2^*$  的影响线为

$$a_2^* = \frac{\frac{w_2^2}{H_w^3 H_2} \left[ \frac{\beta}{2} + \frac{l_2^2}{2} (\epsilon_{j2} - 1) \right]}{\left[ f_2^* - \frac{f_2^2}{f_1^*} - \frac{f_3^2}{f_3^* - \frac{f_4^2}{f_4^*}} \right]} \quad (37)$$

再按第 1.2 和 1.3 节的方法计算三塔协作桥第一主跨主梁最大活载挠度.如果进一步计算各跨主缆活载水平分力  $h_i$ , 代入式(32)即可求得索塔纵向位移,并为中塔主缆抗滑移计算提供重要参数.

### 3 中塔主缆抗滑移系数估算

悬吊桥主缆的抗滑移系数计算公式为<sup>[12]</sup>

$$K_c = \frac{\mu \theta}{\ln(T_1/T_2)} \quad (38)$$

式中:  $\mu$  为主缆与槽底间的摩擦系数,  $\theta$  为主缆在鞍槽上的包角,  $T_1$  为主缆紧边轴拉力,  $T_2$  为主缆松边轴拉力.可见,当鞍室两侧主缆的总轴力差值最大时,主缆抗滑移稳定系数最小.

三塔协作桥中塔主缆抗滑移最不利加载形式如图 6 所示,最不利加载模式为第一主跨的悬吊区及第二主跨中塔侧斜拉区满载,活载集中力位于悬吊区.四塔及以上协作桥中间索塔主缆抗滑移系数的最不利加载模式与三塔相似,主要由索塔两侧主跨

活荷载贡献. 由悬吊区活载引起的主缆活载水平分力可按前述方法计算, 由斜拉区引起的主缆水平分力推导过程如下:

活载作用下, 中塔斜拉区域采用王伯惠<sup>[13-14]</sup>的“平均索法”进行简化. 边塔受边缆约束, 纵向活载位移很小, 塔顶可简化为铰接, 而中塔两侧主缆对其约束较小, 故塔顶可简化为弹性铰接. 不失一般性, 索塔按一端固结一端弹性铰接模拟, 假定弹性系数为  $k_e$ , 如图 7 所示. 图中  $L_c$  为主跨跨径, 将斜拉区域中的均布活荷载简化成作用于中点位置的集中荷载  $P$ , 荷载由斜拉索传递给索塔即为图中  $h_c$ , 再由索鞍传递给主缆.



图 6 中塔主缆抗滑移系数影响线

Fig. 6 Influence of main cable anti-slide factor at middle tower

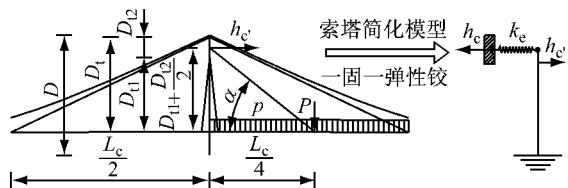


图 7 中塔斜拉区域加载简化计算模型

Fig. 7 Model of live load distribution in the cable-stayed part

由此, 可得支反力  $h_c$  的计算公式如下:

$$h_c = \frac{pL_c}{2} \frac{\bar{D}^2 (3D_t - \bar{D})}{6EI_t [1/k_e + D_t^3/(3EI_t)]} \cot \alpha \quad (39)$$

式中:  $\bar{D} = D_1 + D_2/2$ .

根据塔顶位移特点, 计算边塔时,  $k_e = \infty$ ; 计算中塔时, 忽略主缆对其产生的约束作用, 仅考虑自身抗推刚度, 即  $k_e = 3EI_t/D^3$ . 假定斜拉区域活载引起的水平力  $h_c$  通过索塔经鞍室全部传给加载跨主缆, 设  $\gamma$  为中塔主缆的水平倾角, 可得

$$T_1 = \frac{H_w + h_2 + h_c}{\cos \gamma}$$

$$T_2 = \frac{H_w + h_3}{\cos \gamma}$$

代入式(38)获得主缆抗滑移系数. 同时, 斜拉区活载引起索塔纵向位移, 式(32)中水平力须计入  $h_c$ .

## 4 算例验证

### 4.1 验证 1——主跨跨径的影响

主跨为 600, 1 080 和 1 400 m 三塔协作桥的总

体布置如图 8 所示, 结构对称布置, 总体参数见表 1.

主梁采用流线型扁平钢箱梁, 塔根处主梁的轴力较大, 主梁板厚适当加厚. 边塔采用全混凝土结构, 中塔采用全钢结构. 索塔采用单室箱型, 纵、横桥向宽度均由塔顶至塔底线性增加. 计算中采用的主梁和索塔典型截面的几何参数见表 2.

表 1 结构参数

Tab. 1 Structure parameters		
跨径/m	跨径组合/m	边、中跨比
600	44+108+600+600+108+44	0.25
1 080	112+228+1080+1080+228+112	0.31
1 400	108+160+200+1400+1400+200+160+108	0.33

表 2 典型截面的几何参数

Tab.2 Geometric parameters of beam sections						
跨径/m	断面部位	面积/ m <sup>2</sup>	面内抗弯 惯距/m <sup>4</sup>	面外抗弯 惯距/m <sup>4</sup>	抗扭惯 距/m <sup>4</sup>	
600	主梁	1.753	3.818	198.520	11.142	
	边塔	塔顶	30.276	104.482	102.520	176.804
		塔底	48.476	408.764	388.057	661.689
	中塔	塔顶	1.890	3.984	5.216	4.655
		塔底	2.962	38.697	11.647	16.670
	主梁	2.271	7.804	270.942	19.909	
1 080	边塔	塔顶	43.060	296.597	282.639	504.468
		塔底	74.070	2 231.721	935.740	2 250.122
	中塔	塔顶	2.927	9.495	8.956	9.484
		塔底	5.232	131.791	22.647	37.385
	主梁	2.601	9.966	378.292	25.921	
	1 400	边塔	塔顶	58.560	592.154	367.029
塔底			115.960	5 263.670	2 039.357	5 060.992
中塔		塔顶	3.467	23.054	15.654	20.483
		塔底	6.768	263.052	44.017	68.789

应用推导的公式计算主梁最大活载挠度和塔顶纵向位移, 并与有限元值进行比较, 计算结果见表 3. 估算时, 加载区域为第一主跨的悬吊区.

表中数据表明: ① 忽略索塔及主缆刚度, 主梁挠度最大误差超过 420.6%; ② 考虑索塔及主缆刚度时, 主梁挠度最大误差为 -14.9%, 边塔位移最大误差为 -9.4%, 中塔位移最大误差为 16.2%; ③ 跨径增加时, 结构变形估算值与有限元值的相对误差略有增大.

由式(38)可知, 中塔鞍室两侧主缆的恒、活载轴力(主缆跨中恒载水平力等于该处主缆轴力, 下文统称为轴力)是计算抗滑移系数的重要参数, 计算结果见表 4. 估算时, 由图 6 确定加载区域为中塔左侧主跨的悬吊区和右侧近塔处的斜拉区. 表中数据表明: ① 主缆恒、活载轴力的最大误差为 8.4%; ② 主缆抗滑移系数的最大误差为 -25.6%, 因其值依赖于

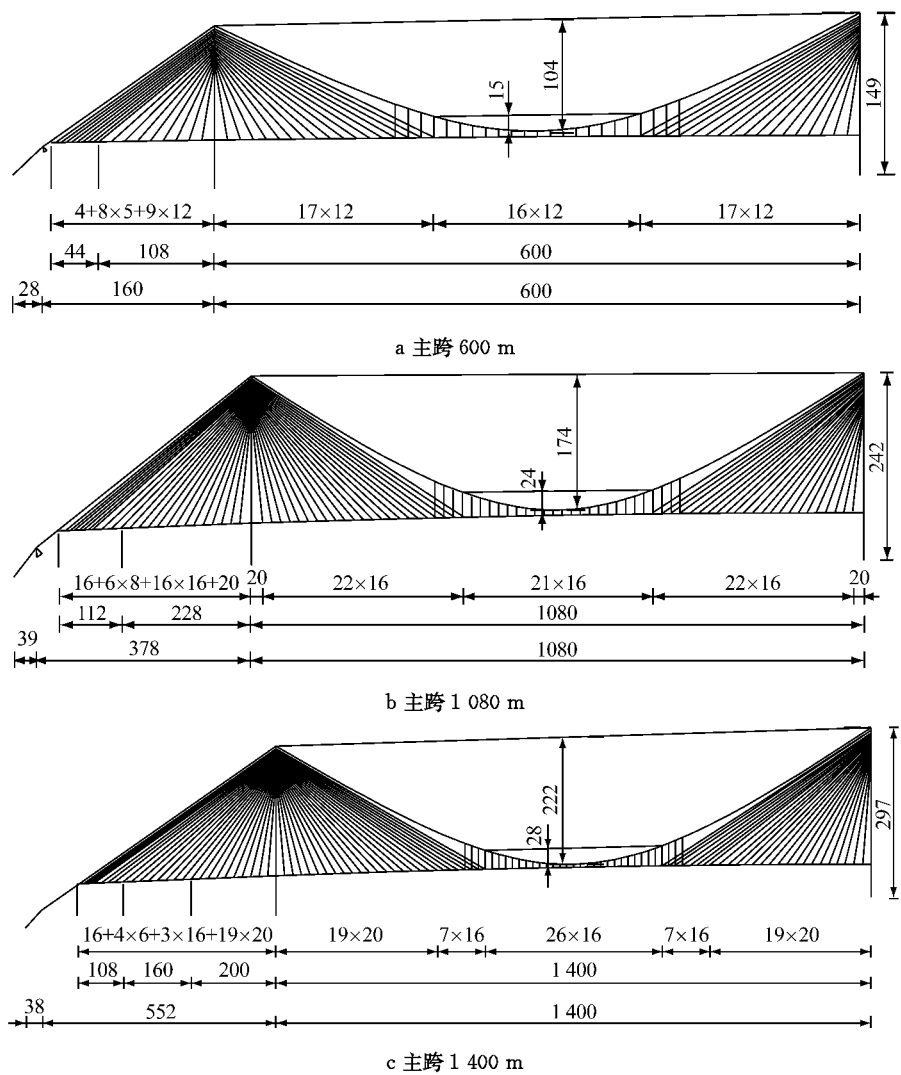


图 8 三塔协作桥总体布置图(单位:m)

Fig.8 Elevation of three-towered cable-stayed suspension bridges (unit: m)

表 3 活载变形估算

Tab.3 Deformation approximation

跨径/m	主梁挠度最大值					索塔位移					
	$v_0$ /m	$v_1$ /m	误差/%	$v_2$ /m	误差/%	$u_{s0}$ /m	$u_s$ /m	误差/%	$u_{c0}$ /m	$u_c$ /m	误差/%
600	2.500	13.000	420.6	2.644	5.8	0.122	0.131	7.1	1.310	1.522	16.2
1 080	5.600	16.200	190.1	4.985	-11.0	0.228	0.225	-1.2	2.877	3.152	9.5
1 400	6.700	17.500	161.9	5.700	-14.9	0.309	0.280	-9.4	3.265	3.589	9.9

注:  $v_0$  为有限元值,  $v_1$  为忽略索塔刚度及主缆伸长时主梁挠度的估算值,  $v_2$  为考虑索塔刚度及主缆伸长时主梁挠度的估算值;  $u_{s0}$ ,  $u_{c0}$  和  $u_s$ ,  $u_c$  分别为边、中塔塔顶纵向位移有限元值和估算值。

表 4 三塔协作桥主缆轴力估算

Tab.4 Axis force approximation of main cables of three-towered cable-stayed suspension bridges

跨径/m	计算方法	$H_w$ /MN	误差/%	$T_1$ /MN	误差/%	$T_2$ /MN	误差/%	$K_c$	误差/%
600	有限元 估算	28.7	-5.1	38.0	0.7	32.5	-5.7	1.07	-25.6
		27.2		38.3		30.7		0.80	
1 080	有限元 估算	63.8	2.5	81.6	4.9	71.2	2.9	1.23	-12.0
		65.4		85.6		73.3		1.08	
1 400	有限元 估算	91.2	5.7	115.0	8.4	102.2	6.3	1.42	-9.7
		96.4		124.7		108.7		1.28	

主缆轴力的估算精度,误差累积效应明显;③ 主缆轴力的计算精度受跨径影响较小。

#### 4.2 验证 2——索塔总数的影响

主跨 1 400 m 的多塔协作桥的总体布置如图 9 所示,考虑到结构对称性,图中仅示出左半桥。

主梁最大活载挠度和塔顶纵向位移的计算结果见表 5。估算时,加载区域为中间主跨的悬吊区。

表中数据表明:① 忽略索塔及主缆刚度,主梁挠度最大误差超过 158.9%;② 考虑索塔及主缆刚度时,主梁挠度最大误差为-18.8%,边塔变形最大误差为-11.9%,中塔变形最大误差为-17.2%;③ 索塔数增加时,结构变形估算值与有限元值的相对误差略有增大。

主缆的恒、活载轴力及中塔主缆抗滑移系数的计算结果见表 6。估算时,加载区域与三塔协作桥相同,忽略其他不利加载区域的影响。

表中数据表明:① 主缆恒、活载轴力的最大误

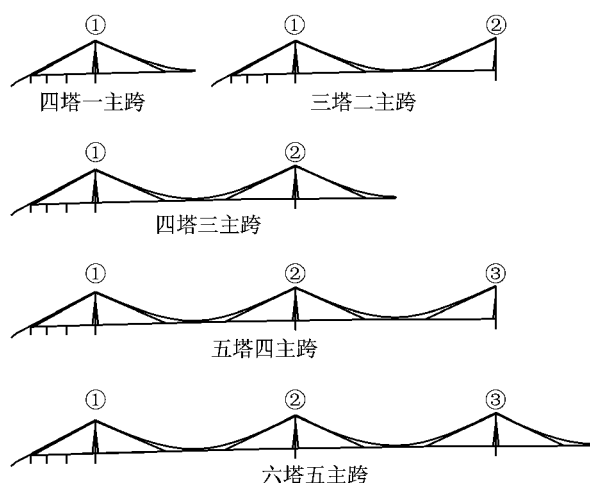


图 9 多塔协作桥总体布置图

Fig. 9 Elevation of multi-towered cable-stayed suspension bridges

差为 9.0%;② 主缆抗滑移系数的最大误差为+25.7%;③ 主缆轴力的计算精度受索塔数影响较小。

表 5 多塔协作桥活载变形估算

Tab.5 Deformation approximation of multi-towered cable-stayed suspension bridges under live load

塔数	中间跨主梁挠度最大值					中间索塔纵向位移					
	$v_0/\text{m}$	$v_1/\text{m}$	误差/%	$v_2/\text{m}$	误差/%	$u_0/\text{m}$	$u_1/\text{m}$	误差/%	$u_{10}/\text{m}$	$u_r/\text{m}$	误差/%
二塔	1.697	1.320	-22.2	1.759	3.7	0.242	0.270	11.4	0.242	0.270	11.4
三塔	6.736	17.437	158.9	5.891	-12.5	0.294	0.275	-6.3	3.260	3.613	10.8
四塔	10.772	22.847	112.1	9.079	-15.7	3.685	3.266	-11.4	3.685	3.266	-11.4
五塔	11.032	25.560	131.7	9.138	-17.2	3.683	3.260	-11.5	3.944	3.315	-16.0
六塔	11.332	27.191	139.9	9.198	-18.8	3.753	3.308	-11.9	3.995	3.308	-17.2

注: $u_0$ ,  $u_{10}$  和  $u_1$ ,  $u_r$  分别为加载跨左、右侧索塔塔顶纵向位移有限元值和估算值。

表 6 多塔协作桥主缆轴力估算

Tab.6 Axis force approximation of main cables of multi-towered cable-stayed suspension bridges

塔数	计算方法	$H_w/\text{MN}$	误差/%	$T_1/\text{MN}$	误差/%	$T_2/\text{MN}$	误差/%	$K_c$	误差/%
二塔	有限元估算	97.6	0.0	134.3	-6.2	129.6	-6.9	5.29	-16.9
		97.6		126.0		120.7		4.39	
三塔	有限元估算	95.1	2.1	124.1	4.0	104.1	4.7	0.98	4.1
		97.1		129.1		109.0		1.02	
四塔	有限元估算	93.0	4.4	127.3	0.4	104.1	4.6	0.87	25.7
		97.1		127.8		108.9		1.09	
五塔	有限元估算	90.8	6.9	120.8	5.8	99.8	9.0	0.91	18.4
		97.1		127.8		108.7		1.08	
六塔	有限元估算	87.9	8.3	120.5	6.2	100.6	8.3	0.97	12.3
		97.1		128.0		108.9		1.09	

## 5 结论

(1) 估算时应计入索塔和主缆刚度,否则无法正确评估结构的内力和变形状态。

(2) 对于多塔协作桥的结构变形和主缆轴力,

估算值与有限元计算值的相对误差均不超过 20%。

(3) 由于误差累积效应,主缆抗滑移系数的误差较大,宜进一步修正。

(4) 主跨跨径和索塔总数对公式的精度影响较小,适合采用系数修正。



## 参考文献:

- [1] Brotton D M. The solution of suspension bridge problems by digital computers, Part I [J]. The Structure Engineering, 1965, 41(3): 200.
- [2] Brotton D M. The solution of suspension bridge problems by digital computers, Part II [J]. The Structure Engineering, 1965, 41(7): 213.
- [3] Buonopane S G, Billington D P. Theory and history of suspension bridge design from 1823 to 1940 [J]. Journal of Structural Engineering, 1993, 119(3): 954.
- [4] 杨进. 多塔多跨悬索桥应用于海峡长桥建设的技术可行性与技术优势[J]. 桥梁建设, 2009(2): 36.  
YANG Jin. Technical feasibility and advantages of applying multi-tower and multi-span suspension bridge to construction of long bridge across straits[J]. Bridge Construction, 2009(2): 36.
- [5] 张哲,王会利,石磊,等. 自锚式斜拉-悬索协作体系桥基础微分方程近似推导[J]. 工程力学, 2008(5): 131.  
ZHANG Zhe, WANG Huili, SHI Lei, et al. Approximate deduction of the basic differential equations for self-anchored cable-stayed suspension bridges[J]. Engineering Mechanics, 2008(5): 131.
- [6] 叶毅. 自锚式斜拉-悬索协作体系桥参数敏感性与若干问题研究[D]. 大连:大连理工大学土木工程学院, 2010.  
YE Yi. Study on parameter sensitivity and several problems of self-anchored cable-stayed suspension bridge [D]. Dalian: College of Civil Engineering of Dalian University of Technology, 2010.
- [7] 夏国平. 斜拉-悬索协作体系桥的结构体系研究及其弹性地基梁算法[D]. 大连:大连理工大学土木工程学院, 2010.  
XIA Guoping. Structure system research and elastic foundation beam method of cable-stayed suspension bridge[D]. Dalian: College of Civil Engineering of Dalian University of Technology, 2010.
- [8] Koichi S. Deflection theory of multispan suspension bridges considering deflection of towers and its numerical examples of various influence lines[C]// Proceeding of Japan Society of Civil Engineers. [S. l.]: Japan Society of Civil Engineers, 1971, 190: 11-22.
- [9] Alan J. Gravity stiffness of classical suspension bridges[J]. Journal of Structural Engineering, 1983, 109(1): 16.
- [10] 徐君兰,向中富. 关于悬索桥的重力刚度[J]. 重庆交通学院学报, 2000, 19(2): 71.  
XU Junlan, XIANG Zhongfu. Discussing gravity stiffness of suspension bridge [J]. Journal of Chongqing Jiaotong University, 2000, 19(2): 71.
- [11] 尼·吉姆辛. 缆索支承桥梁——概念与设计[M]. 2版. 北京:人民交通出版社, 2002.  
Gimsing N J. Cable supported bridges—conception and design [M]. 2nd ed. Beijing: China Communications Press, 2002.
- [12] 万田保. 悬索桥主鞍座的几何位移特征及与总体布置的关系[J]. 桥梁建设, 2003(3): 28.  
WAN Tianbao. Relationship between geometric displacement and overall layout of suspension bridge tower saddles [J]. Bridge Construction, 2003(3): 28.
- [13] 王伯惠. 斜拉桥的极限跨径(I)[J]. 公路, 2002(3): 46.  
WANG Bohui. Extreme span length of cable-stayed bridge(I) [J]. Highway, 2002(3): 46.
- [14] 王伯惠. 斜拉桥的极限跨径(II)[J]. 公路, 2002(4): 38.  
WANG Bohui. Extreme span length of cable-stayed bridge(II) [J]. Highway, 2002(4): 38.