文章编号：0253-374X(2013)11-1751-04 DOI:10.3969/j.issn.0253-374x.2013.11.024

倒向微分方程在一类奇异最优控制中的应用

刘国华[1,2]，朱经浩[1]
(1. 同济大学 数学系，上海 200092；2. 上海理工大学 理学院，上海 200093)

摘要：利用Krotov方法把一类奇异最优控制问题转化为一族球约束的全局优化问题，然后引入一族初值连续依赖于时间参量的倒向微分方程，给出相应的全局优化问题的解析解，用以构造最优控制的解析表达式.

关键词：奇异最优控制；全局优化；倒向微分流
中图分类号：O232 **文献标志码**：A

Solution to Singular Optimal Control by Canonical Backward Differential Equation

LIU Guohua [1,2], *ZHU Jinghao*[1]
(1. Department of Mathematics, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. College of Science, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: A singular optimal control problem is solved by Krotov Extension method and Canonical backward differential flows. By using Krotov equivalent transformation, the cost functional of the problem is converted to a class of global optimization problems which are solved by a class of backward differential equations with initial values relying on the time point continuously.

Key words: singular optimal control; global optimization; backward differential flow

考虑最优控制问题(P)

$$\min J(\boldsymbol{u}) = \int_0^{\mathrm{T}} [\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + g(\boldsymbol{u})]\mathrm{d}t \tag{1}$$

$$\text{s.t. } \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u},\quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0,\quad t \in [0,T] \tag{2}$$

式中：$\boldsymbol{c},\boldsymbol{x}_0$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中的给定向量；$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 分别为 $\mathbf{R}^{n\times n}$，$\mathbf{R}^{n\times m}$中的矩阵. 而 $g(\boldsymbol{u})$ 是一类多项式，具有如下形状：

$$g(\boldsymbol{u}) = u_1^{2l} + u_2^{2l} + \cdots + u_m^{2l} + \tilde{g}(u_1,u_2,\cdots,u_m) \tag{3}$$

其中 $\tilde{g}(u_1,u_2,\cdots,u_m)$是次数低于 $2l$ 的实值多项式函数. 为了最优解的存在，本文假设：在 $\mathbf{R}^m$ 上，$\nabla^2 g(\boldsymbol{u})\geqslant 0$. 容许控制函数 $\boldsymbol{u}(\cdot)$是在$[0,T]$上可积并有界的向量函数. 容许控制的全体所成集合记作 Φ. 最优控制问题(P)在理论和应用上都是常见的研究对象[1-2]. 由于$\nabla^2 g(\boldsymbol{u})\geqslant 0$，问题(P)是一类奇异最优控制问题.

本文首先转化这一类奇异问题为全局优化问题[3]，再利用多项式特性转化无约束优化问题为球约束下的全局优化问题，之后，利用倒向微分流求解了上述约束优化问题[4]，最后，用实例给出了该方法的演示.

1 Krotov等价变换

构造辅助函数 $\phi(t,\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{x}$，其中 $\boldsymbol{\varphi}(t)$满足方程

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{\varphi}}(t) + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varphi}(t) = \boldsymbol{c}\\ \boldsymbol{\varphi}(T) = \boldsymbol{0}\end{cases} \tag{4}$$

问题(P)中的目标泛函 $J(\boldsymbol{u})$可表示为

$$\begin{aligned}J(\boldsymbol{u}) &= \int_0^T [\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + g(\boldsymbol{u})]\mathrm{d}t = \int_0^T [\dot{\boldsymbol{\varphi}}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{x} + \\ &\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u} + g(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}]\mathrm{d}t = \\ &\int_0^T [\dot{\boldsymbol{\varphi}}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(t)\dot{\boldsymbol{x}} + g(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}]\mathrm{d}t = \\ &\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(T)\boldsymbol{x}(T) - \boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(0)\boldsymbol{x}_0 + \int_0^T [g(\boldsymbol{u}) - \\ &\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}]\mathrm{d}t = -\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(0)\boldsymbol{x}_0 + \int_0^T [g(\boldsymbol{u}) - \\ &\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}]\mathrm{d}t\end{aligned}$$

因此有

$$\min_{\Phi} J(\boldsymbol{u}) = -\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(0)\boldsymbol{x}_0 + \min_{\Phi}\int_0^T [g(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}]\mathrm{d}t \tag{5}$$

收稿日期：2012-10-26
第一作者：刘国华(1974—)，女，讲师，博士生，主要研究方向为最优控制. E-mail: liugh265@163.com
通讯作者：朱经浩(1949—)，男，教授，博士生导师，理学博士，主要研究方向为最优控制和数学规划. E-mail: jinghaok@tongji.edu.cn

要使得 $J(\boldsymbol{u})$ 最小，可对时间区间 $[0,T]$ 中的每个给定的 t，求解下面的全局优化问题：

$$\min_{\mathbf{R}^m}\{g(\boldsymbol{u})-\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}\} \tag{6}$$

若把上述优化问题中的目标函数记为 $h_t(\boldsymbol{u})=g(\boldsymbol{u})-\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$，则除了线性部分外，$h_t(\boldsymbol{u})$ 与 $g(\boldsymbol{u})$ 为同一类型的多项式. 目标函数族 $\{h_t(\boldsymbol{u})\}$ 连续依赖于时间参量 $t\in[0,T]$.

2 多项式的全局最优点

把无约束全局优化问题转换为球约束的全局优化问题. 对形如式(3)的多项式函数 $g(\boldsymbol{u})$ 有下述约束优化问题，并以 I 记其最优值，即有

$$I=\min\sum_{1\leqslant j_1,j_2,\cdots,j_{2l}\leqslant m}\frac{\partial^{2l}g(\boldsymbol{0})}{\partial u_{j_1}\partial u_{j_2}\cdots\partial u_{j_{2l}}}s_{j_1}s_{j_2}\cdots s_{j_{2l}}$$

$$\text{s.t.}\quad \|\boldsymbol{s}\|^2=s_1^2+s_2^2+\cdots+s_m^2=1$$

以下引述有关多项式 $g(\boldsymbol{u})$ 在 $\mathbf{R}^m$ 上的所有全局最小点的一个结果.

定理 1[5-6] 若 $I>0$，则多项式 $g(\boldsymbol{u})$ 在 $\mathbf{R}^m$ 上的所有全局最小点包含在球 $\|\boldsymbol{u}\|\leqslant b$ 内，其中

$$b=\max\left\{1,\frac{(2l)!\left(m+\frac{m^2}{2!}+\cdots+\frac{m^{2l-1}}{(2l-1)!}\right)M}{I}\right\}$$

$$M=\max\left\{\left|\frac{\partial^k g(\boldsymbol{0})}{\partial u_{j_1}\cdots\partial u_{j_k}}\right|:0\leqslant k\leqslant 2l-1,\ 1\leqslant j_1,j_2,\cdots,j_k\leqslant m\right\}$$

注：由于 $h_t(\boldsymbol{u})=g(\boldsymbol{u})-\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$ 与 $g(\boldsymbol{u})$ 的区别仅在线性项上，易见若取

$$\widetilde{M}=\max\{M,\max_{0\leqslant t\leqslant T}\|\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varphi}(t)\|\}$$

则对于

$$a=\max\left\{1,\frac{(2l)!\left(m+\frac{m^2}{2!}+\cdots+\frac{m^{2l-1}}{(2l-1)!}\right)\widetilde{M}}{I}\right\}$$

由于 $a>b$，又由定理 1，$g(\boldsymbol{u})$ 在 $\mathbf{R}^m$ 上的全局最优点都在 $\|\boldsymbol{u}\|\leqslant b$ 上，由此可知，对每个时刻 $t\in[0,T]$，多项式 $h_t(\boldsymbol{u})$ 在 $\mathbf{R}^m$ 上的所有全局最小点包含在开球 $\|\boldsymbol{u}\|<a$ 内部. 这样就有：

定理 2 全局优化问题式(6)等价于下面的球约束的优化问题：

$$\min\{h_t(\boldsymbol{u}):\|\boldsymbol{u}\|\leqslant a\} \tag{7}$$

3 倒向微分流

应用倒向微分流[4]求解全局优化问题

$$\min\{p(\boldsymbol{u}),\text{s.t.}\,\boldsymbol{u}\in D\} \tag{8}$$

其中 $D=\{\boldsymbol{u}\in\mathbf{R}^m:\|\boldsymbol{u}\|\leqslant a\}$，目标函数 $p(\boldsymbol{u})$ 在 $\mathbf{R}^m$ 上二阶连续可微，并且 $\nabla^2 p(\boldsymbol{u})\geqslant 0$.

注：本节所涉及的目标函数 $p(\boldsymbol{u})$ 都形如前一节的多项式，由前一节的注，可设 $p(\boldsymbol{u})$ 在 $\mathbf{R}^m$ 上的全局最优点都在 $\|\boldsymbol{u}\|\leqslant b$ 上，故以下假设：$p(\boldsymbol{u})$ 在 D 上的最小点都位于 D 的内部.

因为 $\nabla^2 p(\boldsymbol{u})\geqslant 0,\forall\boldsymbol{u}\in D$，因此，对于 $\rho>0$ 有

$$\nabla^2 p(\boldsymbol{u})+\rho I>0,\quad\forall\boldsymbol{u}\in D$$

如果存在 $(\hat{\rho},\hat{\boldsymbol{u}})\in\mathbf{R}^+\times D,\hat{\boldsymbol{u}}\neq 0$，满足

$$\nabla p(\hat{\boldsymbol{u}})+\hat{\rho}\hat{\boldsymbol{u}}=\boldsymbol{0}$$

在 $\hat{\rho}$ 附近，由下列微分方程可定义微分流 $\hat{\boldsymbol{u}}(\rho)$ 为

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{u}}(\rho)}{\mathrm{d}\rho}+[\nabla^2 p(\hat{\boldsymbol{u}}(\rho))+\rho I]^{-1}\hat{\boldsymbol{u}}(\rho)=\boldsymbol{0},\quad\hat{\boldsymbol{u}}(\hat{\rho})=\hat{\boldsymbol{u}} \tag{9}$$

定义 1[4] $\hat{\boldsymbol{u}}(\rho)$ 为由式(9)定义的微分流. 当限制在 $(0,\hat{\rho}]$ 时，称 $\hat{\boldsymbol{u}}(\rho)$ 为倒向微分流.

由微分流 $\hat{\boldsymbol{u}}(\rho)$ 所定义的对偶函数为[4,7]

$$p_{\mathrm{d}}(\rho)=p(\hat{\boldsymbol{u}}(\rho))+\frac{\rho}{2}[\hat{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}}(\rho)\hat{\boldsymbol{u}}(\rho)-a^2] \tag{10}$$

引理 1[4] 由式(9)所定义的微分流及其对偶函数成立

$$\frac{\mathrm{d}p_{\mathrm{d}}(\rho)}{\mathrm{d}\rho}=\frac{1}{2}[\hat{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}}(\rho)\hat{\boldsymbol{u}}(\rho)-a^2] \tag{11}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 p_{\mathrm{d}}(\rho)}{\mathrm{d}\rho^2}=-\left(\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{u}}(\rho)}{\mathrm{d}\rho}\right)^{\mathrm{T}}[\nabla^2 p(\hat{\boldsymbol{u}}(\rho))+\rho I]\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{u}}(\rho)}{\mathrm{d}\rho} \tag{12}$$

引理 2[4] 若 $\hat{\boldsymbol{u}}(\rho)$ 为一个由式(9)所定义的微分流，$p_{\mathrm{d}}(\rho)$ 为由式(10)给出的其相应的对偶函数，有下面的结论：

(1)若 $\rho>0$，则有 $\frac{\mathrm{d}^2 p_{\mathrm{d}}(\rho)}{\mathrm{d}\rho^2}\leqslant 0$ 成立.

(2)$\frac{\mathrm{d}p_{\mathrm{d}}(\rho)}{\mathrm{d}\rho}$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减.

(3)若 $\hat{\rho}>0$ 及 $\hat{\boldsymbol{u}}(\hat{\rho})\in D$，则 $p_{\mathrm{d}}(\rho)$ 在 $[\hat{\rho},+\infty)$ 单调递减.

4 全局最优化

利用倒向微分流求解问题(8)的全局最小点. 以下假设 $\nabla p(\boldsymbol{0})\neq\boldsymbol{0}$，并注意到 $p(\boldsymbol{u})$ 在 D 上的最小点都位于 D 的内部. 由于 D 是一个闭的有界区域，因此，存在 $\rho^*>0$，使得

$$\rho^*>\sup_D\|\nabla p(\boldsymbol{u})\| \tag{13}$$

又由于 $\nabla^2 p(\boldsymbol{u})\geqslant 0$，从而有 $\nabla^2 p(\boldsymbol{u})+\rho^* I>0$，

$\forall \boldsymbol{u}\in \mathbf{R}^m$. 由 Brown 不动点定理[8]，并注意到 $\nabla p(\mathbf{0})\neq \mathbf{0}$ 可知，存在非零点 $\boldsymbol{u}^*\in D$ 使得

$$\nabla p(\boldsymbol{u}^*)+\rho^*\boldsymbol{u}^* = \mathbf{0},$$
$$\nabla^2 p(\boldsymbol{u})+\rho^* I > 0,\quad \forall \boldsymbol{u}\in D \tag{14}$$

因为$\nabla^2 p(\boldsymbol{u})\geqslant 0$，所以只要 $\rho>0$ 就有$\nabla^2 p(\boldsymbol{u})+\rho I>0$. 由下述微分方程：

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{u}}(\rho)}{\mathrm{d}\rho}+[\nabla^2 p(\hat{\boldsymbol{u}}(\rho))+\rho I]^{-1}\hat{\boldsymbol{u}}(\rho)=\mathbf{0},$$
$$\hat{\boldsymbol{u}}(\rho^*)=\boldsymbol{u}^* \tag{15}$$

可定义$(0,+\infty)$上相应于优化问题(8)的微分流 $\hat{\boldsymbol{u}}(\rho)$，并且对$\forall \rho\in(0,+\infty)$有

$$\nabla p(\hat{\boldsymbol{u}}(\rho))+\rho\hat{\boldsymbol{u}}(\rho)=\mathbf{0},\quad \nabla^2 p(\boldsymbol{u})+\rho I>0$$

因为 $\boldsymbol{u}^*\in D$，由引理 2，当 $\rho\geqslant\rho^*$ 时微分流 $\hat{\boldsymbol{u}}(\rho)\in \operatorname{int} D$. 而当 $0<\rho\leqslant\rho^*$ 时，微分流 $\hat{\boldsymbol{u}}(\rho)$也属于 $\operatorname{int} D$，否则，存在 $\tilde{\rho}\in(0,\rho^*)$使得 $\hat{\boldsymbol{u}}(\tilde{\rho})$位于 D 的边界，即 $\|\hat{\boldsymbol{u}}(\tilde{\rho})\|=a$. 因为 $p(\boldsymbol{u})+\frac{\tilde{\rho}}{2}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}$ 是凸的，由式(14)对 $\boldsymbol{u}\in D$ 有

$$\begin{aligned}p(\boldsymbol{u}) &\geqslant p(\boldsymbol{u})+\frac{\tilde{\rho}}{2}[\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}-a^2]\geqslant\\ &\inf_D\{p(\boldsymbol{u})+\frac{\tilde{\rho}}{2}[\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}-a^2]\}=\\ &p(\hat{\boldsymbol{u}}(\tilde{\rho}))+\frac{\tilde{\rho}}{2}[\hat{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}}(\tilde{\rho})\hat{\boldsymbol{u}}(\tilde{\rho})-\\ &a^2]=p(\hat{\boldsymbol{u}}(\tilde{\rho}))\end{aligned}$$

这与函数 $p(\boldsymbol{u})$在 D 上的最小点在D 的内部相矛盾.

另外，对任意的 $\hat{\rho}>0$，由于$\nabla^2 p(\boldsymbol{u})+\hat{\rho} I>0$，$\forall \boldsymbol{u}\in\mathbf{R}^m$，可知 $\hat{\boldsymbol{u}}=\hat{\boldsymbol{u}}(\hat{\rho})(\hat{\boldsymbol{u}}\in D)$是惟一满足$\nabla p(\hat{\boldsymbol{u}})+\hat{\rho}\hat{\boldsymbol{u}}=\mathbf{0}$ 的点. 这样，由经典 ODE 理论可知，由方程(15)所得的倒向微分流也可由如下初值问题得到：

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{u}}(\rho)}{\mathrm{d}\rho}+[\nabla^2 p(\hat{\boldsymbol{u}}(\rho))+\rho I]^{-1}\hat{\boldsymbol{u}}(\rho)=\mathbf{0},\quad \hat{\boldsymbol{u}}(\hat{\rho})=\hat{\boldsymbol{u}}$$

综上所述，得到下面的结论：

引理 3　对任意正实数 $\hat{\rho}$，存在惟一 D 内的点 $\hat{\boldsymbol{u}}$，使得

$$\nabla p(\hat{\boldsymbol{u}})+\hat{\rho}\hat{\boldsymbol{u}}=\mathbf{0}$$

进一步，相应于问题式(8)的微分流是惟一的，并可由下面方程得到：

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{u}}(\rho)}{\mathrm{d}\rho}+[\nabla^2 p(\hat{\boldsymbol{u}}(\rho))+\rho I]^{-1}\hat{\boldsymbol{u}}(\rho)=\mathbf{0},\quad \hat{\boldsymbol{u}}(\hat{\rho})=\hat{\boldsymbol{u}}$$

注：换言之，相应于问题(8)的微分流 $\hat{\boldsymbol{u}}(\rho)$不依赖于初始条件.

定理 3　相应于问题(8)的微分流记为 $\hat{\boldsymbol{u}}(\rho)$，则 $\boldsymbol{u}^*=\lim\limits_{\rho\to 0^+}\hat{\boldsymbol{u}}(\rho)$存在，并且是 $p(\boldsymbol{u})$在 D 上的一个全局最小点.

证明　由引理 3，微分流 $\hat{\boldsymbol{u}}(\rho)$在$(0,+\infty)$有定义并且包含在 D 内，即$\forall\rho>0,\hat{\boldsymbol{u}}(\rho)\in D$. 因$\{\hat{\boldsymbol{u}}(\rho):\rho\in(0,+\infty)\}$有界，结合引理 2，可知存在一点 $\boldsymbol{u}^*\in D$ 及一单调递减正数序列 $\rho_j(j=1,2,\cdots)$使得 $\lim\limits_{j\to\infty}\rho_j=0$，$\lim\limits_{j\to\infty}\hat{\boldsymbol{u}}(\rho_j)=\boldsymbol{u}^*$. 注意到 $p_{\mathrm{d}}(\rho)$随正变量 ρ 趋于零时单调递增，并由 $p_{\mathrm{d}}(\rho)$的表达式及 $\hat{\boldsymbol{u}}(\rho)\in D$，可得到

$$\begin{aligned}\lim_{\rho\to 0^+}p_{\mathrm{d}}(\rho)&=\lim_{j\to\infty}p_{\mathrm{d}}(\rho_j)=\lim_{j\to\infty}[p(\hat{\boldsymbol{u}}(\rho_j))+\\ &\frac{\rho_j}{2}(\hat{\boldsymbol{u}}(\rho_j)^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{u}}(\rho_j)-a^2)]=p(\boldsymbol{u}^*)\end{aligned} \tag{16}$$

另一方面，在微分流 $\hat{\boldsymbol{u}}(\rho)$上，对任意的 $\rho\in(0,+\infty)$有

$$\nabla\{p(\hat{\boldsymbol{u}}(\rho))+\frac{\rho}{2}[\hat{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}}(\rho)\hat{\boldsymbol{u}}(\rho)-a^2]\}=$$
$$\nabla p(\hat{\boldsymbol{u}}(\rho))+\rho\hat{\boldsymbol{u}}(\rho)=\mathbf{0}$$

及

$$\nabla^2\{p(\boldsymbol{u})+\frac{\rho}{2}[\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}-a^2]\}=$$
$$\nabla^2 p(\boldsymbol{u})+\rho I>0,\ \forall \boldsymbol{u}\in D$$

因此，对$\forall \boldsymbol{u}\in D$，

$$\begin{aligned}p(\boldsymbol{u})&\geqslant p(\boldsymbol{u})+\frac{\rho}{2}[\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}-a^2]\geqslant\\ &\inf_D\left\{p(\boldsymbol{u})+\frac{\rho}{2}[\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}-a^2]\right\}=\\ &p(\hat{\boldsymbol{u}}(\rho))+\frac{\rho}{2}[\hat{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}}(\rho)\hat{\boldsymbol{u}}(\rho)-a^2]=p_{\mathrm{d}}(\rho)\end{aligned}$$

上式令 $\rho\to 0^+$，得到对$\forall \boldsymbol{u}\in D$，

$$p(\boldsymbol{u})\geqslant\lim_{\rho\to 0^+}p_{\mathrm{d}}(\rho)=p(\boldsymbol{u}^*)$$

于是得到 $\boldsymbol{u}^*$ 是 $p(\boldsymbol{u})$在 D 上的一个全局最小点.

综上所述，为得到问题(P)的最优控制，对每个 $t\in[0,T]$，由引理 3 和定理 3，求解以下倒向微分代数方程：

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{u}}(\rho)}{\mathrm{d}\rho}+[\nabla^2 p(\hat{\boldsymbol{u}}(\rho))+\rho I]^{-1}\hat{\boldsymbol{u}}(\rho)=0,\quad \hat{\boldsymbol{u}}(\hat{\rho})=\hat{\boldsymbol{u}}$$
$$\nabla p(\hat{\boldsymbol{u}})-\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varphi}(t)+\hat{\rho}\hat{\boldsymbol{u}}=\mathbf{0}$$

由引理 3，为简化计算，上式中的 $\hat{\rho}>0$ 可在较小的区间内选取，可惟一得到

$$u_t^*=\arg\min_{\mathbf{R}^m}\{p(\boldsymbol{u})-\boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}\} \tag{17}$$

由于 $\boldsymbol{\varphi}(t)$的连续性，从而微分方程的解连续依赖于初值的参数 $t\in[0,T]$，可知 u_t^* 关于 t 连续. 这样由 Krotov 延拓法可得到问题(P)的最优控制为

$$\hat{\boldsymbol{u}}(t):=u_t^*,\quad t\in[0,T]$$

5　例子

例 1　给定 $\mathbf{R}^2$ 中多项式函数

$$g(\boldsymbol{u})=u_1^4+u_2^4+3u_1^2+3u_2^2+6u_1u_2+2u_1+2u_2+3 \tag{18}$$

考虑最优控制问题

$$\min J(\boldsymbol{u})=\int_0^1[\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+g(\boldsymbol{u})]\mathrm{d}t$$

$$\text{s. t. } \dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{Bu},\quad \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{0},\quad t\in[0,1]$$

其中

$$\boldsymbol{c}=(1\quad 1)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&1\\-1&2\end{bmatrix}$$

对每个$t\in[0,1]$有$h_t(\boldsymbol{u})=g(\boldsymbol{u})+(1-t\mathrm{e}^{1-t})u_1+(-2+(3-t)\mathrm{e}^{1-t})u_2$，注意到$\nabla^2 g(\boldsymbol{u})\geqslant 0$，可知$\nabla^2 h_t(\boldsymbol{u})\geqslant 0$. 由定理1和定理2,针对多项式$g(\boldsymbol{u})$可构造全局优化问题

$$\min\{h_t(\boldsymbol{u}),\text{s. t. }\|\boldsymbol{u}\|\leqslant 64\} \tag{19}$$

由引理3和定理3，为简单计，在应用引理3时这里取$\hat{\rho}=1$，求解以下微分代数方程：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}\rho}=-\dfrac{(12u_2^2+6+\rho)u_1-6u_2}{(12u_1^2+6+\rho)(12u_2^2+6+\rho)-36}\\ \dfrac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}\rho}=-\dfrac{-6u_1+(12u_1^2+6+\rho)u_2}{(12u_1^2+6+\rho)(12u_2^2+6+\rho)-36}\\ u_1(\hat{\rho})=\hat{u}_1,\quad u_2(\hat{\rho})=\hat{u}_2\\ 4\hat{u}_1^3+6\hat{u}_1+6\hat{u}_2+\hat{\rho}\hat{u}_1=-3+t\mathrm{e}^{1-t}\\ 4\hat{u}_2^3+6\hat{u}_2+6\hat{u}_1+\hat{\rho}\hat{u}_2=(t-3)\mathrm{e}^{1-t}\\ \hat{u}_1^2+\hat{u}_2^2\leqslant 64^2\end{cases}$$

得到相应的倒向微分流$\boldsymbol{u}(\rho)=[u_1(\rho)\quad u_2(\rho)]^{\mathrm{T}}$，$\rho\in(0,1]$，选取其全局最小点为$u_t^*=\boldsymbol{u}(0^+)=[u_1(0^+)\quad u_2(0^+)]^{\mathrm{T}}$. 由Krotov方法[3]，对每个$t\in[0,1]$，最优控制取值$\hat{\boldsymbol{u}}(t)=u_t^*$. 表1是对应不同$t$时刻最优控制$\hat{\boldsymbol{u}}(t)$的取值.

表1 例1的最优控制离散数据

Tab.1 The discrete optimal control of Example 1

t	$\hat{\boldsymbol{u}}(t)$	t	$\hat{\boldsymbol{u}}(t)$
0	[0.481 6 −1.055 9]	0.60	[0.321 9 −0.694 9]
0.10	[0.469 7 −0.997 2]	0.70	[0.268 6 −0.624 0]
0.20	[0.451 6 −0.938 7]	0.80	[0.198 5 −0.540 9]
0.30	[0.428 4 −0.880 1]	0.90	[0.092 7 −0.427 4]
0.40	[0.399 6 −0.820 7]	0.95	[0.004 0 −0.337 6]
0.50	[0.364 6 −0.759 5]	1.00	[−0.165 2 −0.165 2]

参考文献：

[1] Pontryagin L S. The mathematical theory of optimal processes [M]. Oxford: Pergamon Press, 1964.

[2] Sontag E D. Mathematical control theory: deterministic finite dimensional systems[M]. 2nd ed. New York: Springer, 1998.

[3] Krotov V F. Global methods in optimal control theory[M]. New York: Marcel Dekker, 1996.

[4] ZHU Jinghao, WU Dan, Gao D Y. Applying the canonical dual theory to optimal control problems[J]. Global Optimization, 2012,54(2):221.

[5] Lasserre J B. Global optimization with polynomials and the problem of moments[J]. Global Optimization,2001:11(3):796.

[6] ZHU Jinghao, ZHANG Xi. On global optimmizations with polynomials[J]. Optimization Letters, 2008,2(2):239.

[7] Gao D. Canonical duality theory and solutions to constrained non-convex quadratic programming[J]. Global Optimization, 2004,29(4):377.

[8] Brown R F. Fixed point theory and its applications[M]. [S. l.]: American Mathematical Society, 1988.