

含剪切自由度的厚薄通用三角形层合板单元

田 娇^{1,2}, 蔡永昌^{1,2}, 田龙岗^{1,2}, 戴子枢^{1,2}

(1. 同济大学 土木工程学院, 上海 200092; 2. 同济大学 岩土及地下工程教育部重点实验室, 上海 200092)

摘要: 基于 1 阶剪切变形理论(FSDT), 构造了一种新型的消除剪切闭锁的三角形层合板单元, 简记为 CDST-S6 单元. 该单元剪应变场及单元转角场由结点包含有 2 个剪切自由度的 DST-S6 单元理论确定, 不需要借助减缩积分, 假设应力或应变等辅助数学手段, 也不会产生对稳定性带来影响的附加零能模式, 较好地解决了厚薄板单元的剪切闭锁难题, 且其公式推导过程和最终的表达式比目前能考虑剪切变形的绝大多数层合板单元更为简单, 可方便地进行有限元数值求解分析. 数值算例表明, CDST-S6 单元有较高的精度和收敛性, 是一种厚薄通用的优质层合板单元.

关键词: 1 阶剪切变形理论; 剪切闭锁; 层合板; 剪切自由度

中图分类号: TB33; TU33

文献标志码: A

A New Laminated Plate Element CDST-S6 for Thin or Thick Plates

TIAN Jiao^{1,2}, CAI Yongchang^{1,2}, TIAN Longgang^{1,2}, DAI Zishu^{1,2}

(1. College of Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. Key Laboratory of Geotechnical and Underground Engineering of the Ministry of Education, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: Based on the first-order shear deformation laminated plate theory (FSDT), a new three-node triangular laminated plate element, labelled here as composite discrete shear triangular element with 6 extra shear degrees of freedom (CDST-S6), is proposed. The transverse shear strains and rotations of the element are the same with DST-S6. The proposed CDST-S6 can eliminate the shear locking without any numerical expediences such as the reduced integration, the use of the assumed strains/stresses, or the need for the stabilization of the attendant zero energy mode. The expression of the CDST-S6 is simple in formulation and easy to be implemented by using finite element method.

Numerical examples indicate that the element has high accuracy and high convergence rates for solving thin or thick laminated plates.

Key words: first-order shear deformation laminated plate theory(FSDT); shear locking; laminated plate; shear degrees of freedom

复合材料层合板具有强度高、强度质量比高、抗疲劳寿命长、耐化学腐蚀等特点, 已经被广泛使用于各种工业领域. 研究和研发高效实用的复合材料层合板理论、板单元以准确地分析层合板结构的受力及变形状态, 一直以来都是计算力学领域里一个比较活跃的研究方向和焦点问题. 目前用于分析层合板的计算理论主要有基于 Kirchhoff 假设的经典层合板理论、1 阶剪切变形理论、高阶层合板理论及叠层理论等. 经典层合板理论比较简单且计算代价小, 通常能够较准确地描述薄板的变形, 但由于该理论忽略了剪切变形的影响, 因此随着层合板厚度变大, 该理论预测板变形的精度变差. 高阶理论满足板边界上剪应力为零的条件, 也能使单元间剪切变形连续, 但是与 1 阶剪切变形理论相比, 高阶理论的精度提高不多, 但计算代价却增加很多, 而 1 阶剪切变形理论能够给出相对精确、经济、简便的协调解^[1]. 从理论的预测能力和计算代价这两方面来权衡, 1 阶剪切变形理论有非常大的优势, 且该理论能适应于大部分工程的计算分析. 国内外学者研究了大量基于 1 阶剪切变形理论的层合板弯曲单元^[2-5], 然而当板很薄时(跨厚比 $L/h > 100$), 横向剪切应变 ϵ_{xz} 和 ϵ_{yx} 应该趋向于 0, 通常基于 1 阶剪切变形理论的板弯曲单元不能满足这个条件, 这将导致计算的横向位移远小于真实解, 习惯上称这种现象为剪切闭锁^[6]. 如何解决剪切闭锁以构造经济适用的层合板单元是学者

收稿日期: 2012-12-19

基金项目: 国家“九七三”重点基础研究发展计划(2011CB013800); 长江学者和创新团队发展计划(IRT1029)

第一作者: 田 娇(1985—), 女, 博士生, 主要研究方向为隧道及地下建筑工程. E-mail: tianjiaoj@163.com

通讯作者: 蔡永昌(1972—), 男, 教授, 博士生导师, 工学博士, 主要研究方向为岩土计算力学. E-mail: yccai@tongji.edu.cn

们一直所关心的问题. 龙驭球等对层合板进行了大量研究, 提出了利用广义协调厚薄板通用单元构造新型层合板单元的新思路, 为层合板理论的发展做出了重要贡献, 文献[7-8]基于 1 阶剪切变形理论, 分别以厚薄板四边形单元 TMQ^[9] (Timoshenko-Mindlin 四边形板单元) 和单元 ARS-Q12^[10] (Ai-Kah Soh 四边形板单元) 为基础, 引入面内双线性位移场, 建立了新型优质的位移复合材料层合板单元 TMQ12 (Timoshenko-Mindlin 复合材料层合板单元) 和 CTMQ20 (Timoshenko-Mindlin 四边形层合板单元). 文献 [11] 在 DKT (Discrete Kirchhoff Triangular) 单元基础上引入独立的剪切自由度, 创建了 DST-S6 单元 (有 6 个附加剪切自由度的 Discrete Shear Triangular 板单元), 较好地解决了剪切闭锁问题, 且不需要特殊的数学处理, 比如减缩积分, 假设应力应变或消除零能模式等. 受文献[7-8]的启发, 本文将平面内双线性位移场引入 DST-S6 单元中, 将其发展为基于 1 阶剪切变形理论的层合板单元 CDST-S6 (有 6 个附加剪切自由度的 Discrete Shear Triangular 层合板单元). 该 CDST-S6 层合板单元的公式推导过程和最终的表达式比目前能考虑剪切变形的绝大多数层合板单元更为简单, 可方便地进行有限元数值求解分析. 数值算例表明, 本单元有较高的精度和收敛性, 是一种厚薄通用的优质层合板单元.

1 基本理论

1.1 层合板 1 阶剪切变形理论

板中面的面内位移为 u_0, v_0 , 中面的横向位移为 w , 中面转角为 Ψ_x, Ψ_y , 任意层复合材料层合板的变形为

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z\Psi_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z\Psi_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w(x, y) \end{aligned} \tag{1}$$

板的面内总应变场为

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_0 + z\boldsymbol{\kappa} \tag{2}$$

式中: $\boldsymbol{\varepsilon}_0, \boldsymbol{\kappa}$ 分别为中面面内应变场与曲率场.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}]^T \tag{3}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = [\varepsilon_{x0} \quad \varepsilon_{y0} \quad \gamma_{xy0}]^T = \left[\frac{\partial u_0}{\partial x} \quad \frac{\partial v_0}{\partial y} \quad \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right]^T \tag{4}$$

$$\boldsymbol{\kappa} = [\kappa_x \quad \kappa_y \quad 2\kappa_{xy}]^T = \left[-\frac{\partial \Psi_x}{\partial x} \quad -\frac{\partial \Psi_y}{\partial y} \quad -\frac{\partial \Psi_x}{\partial y} - \frac{\partial \Psi_y}{\partial x} \right]^T \tag{5}$$

1.2 DST-S6 单元简介

DST-S6 单元在 DKT 单元基础上引入独立的剪切自由度, 剪切应变假设为

$$\gamma_x = \sum_{i=1}^3 (L_i \gamma_{xi}), \quad \gamma_y = \sum_{i=1}^3 (L_i \gamma_{yi}) \tag{6}$$

$$L_i = \frac{1}{2A} (a_i + b_i x + c_i y), \quad i = 1, 2, 3 \tag{7}$$

式中: A 是三角形单元的面积;

$$a_i = x_j y_m - x_m y_j, \quad b_i = y_j - y_m, \quad c_i = -x_j + x_m, \tag{8}$$

$$i = 1, 2, 3, \quad j = 2, 3, 1, \quad m = 3, 1, 2$$

γ_{xi} 和 γ_{yi} 是节点 i 的独立自由度. 考虑横向剪切变形的影响, 节点的转角为

$$\theta_x = \tilde{\theta}_x - \gamma_x, \quad \theta_y = \tilde{\theta}_y - \gamma_y \tag{9}$$

其中 $\tilde{\theta}_x$ 与 $\tilde{\theta}_y$ 为 DKT 单元节点的转角.

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}_x &= \sum_{i=1}^3 (R_i w_i + R_{xi} \tilde{\theta}_{xi} + R_{yi} \tilde{\theta}_{yi}) \\ \tilde{\theta}_y &= \sum_{i=1}^3 (H_i w_i + H_{xi} \tilde{\theta}_{xi} + H_{yi} \tilde{\theta}_{yi}) \end{aligned} \tag{10}$$

式(10)中各符号的含义见文献[11]. 将式(6)和(10)代入式(9), 并注意在节点 i 处有 $\tilde{\theta}_{xi} = \theta_{xi} + \gamma_{xi}, \tilde{\theta}_{yi} = \theta_{yi} + \gamma_{yi}$, 可以得到

$$\left. \begin{aligned} \theta_x &= \sum_{i=1}^3 \left[R_i w_i + R_{xi} \theta_{xi} + R_{yi} \theta_{yi} + (R_{xi} - L_i) \gamma_{xi} + R_{yi} \gamma_{yi} \right] \\ \theta_y &= \sum_{i=1}^3 \left[H_i w_i + H_{xi} \theta_{xi} + H_{yi} \theta_{yi} + H_{xi} \gamma_{xi} + (H_{yi} - L_i) \gamma_{yi} \right] \end{aligned} \right\} \tag{11}$$

2 新型三角形层合板单元

新型三角形层合板单元 CDST-S6 是基于 1 阶剪切变形理论, 在 DST-S6 板单元上发展起来的. CDST-S6 单元示意图如图 1 所示.

每个 CDST-S6 单元有 3 个节点, 每个节点有 7 个自由度, 节点位移向量为

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_e &= \{a_{e1} \quad a_{e2} \quad a_{e3}\}^T, \\ \mathbf{a}_{ei} &= \{u_i \quad v_i \quad w_i \quad \theta_{xi} \quad \theta_{yi} \quad \gamma_{xi} \quad \gamma_{yi}\}^T, \\ & \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned} \tag{12}$$

2.1 单元剪应变场及单元转角场

CDST-S6 单元的剪应变场及转角场与 DST-S6 一致, 剪应变场见式(6), 转角场见式(11). 将剪应变场记为

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \end{bmatrix} = [\mathbf{B}_{s1} \quad \mathbf{B}_{s2} \quad \mathbf{B}_{s3}] \mathbf{a}_e = \mathbf{B}_s \mathbf{a}_e \tag{13}$$

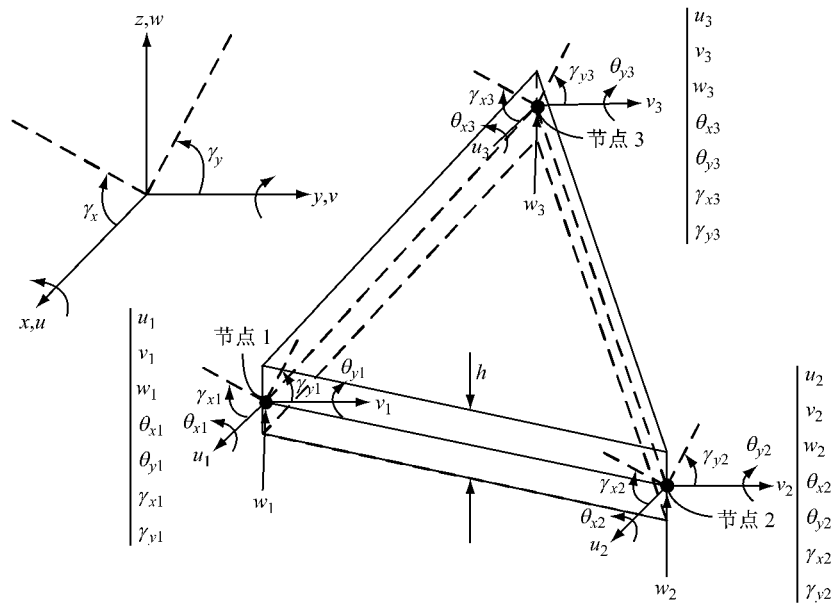


图 1 三角形层合板单元 CDST-S6

Fig.1 Three node triangular laminated plate element CDST-S6

其中, $B_{si} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_i \end{bmatrix}$, $i=1,2,3$.

其中 $[B_{10} \ B_{20} \ B_{30}]a_e = B_0 a_e$ (15)

2.2 单元中面面内位移插值

设单元中面面内位移场为双线性位移场

$$u_0 = \sum_1^3 L_i u_i, \quad v_0 = \sum_1^3 L_i v_i \quad (14)$$

$$B_{i0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial L_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial L_i}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial L_i}{\partial y} & \frac{\partial L_i}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, 3.$$

2.3 单元中面面内应变场和单元曲率场

将式(14)代入式(4),可得单元中面面内应变场为

注意到式(11),可得单元曲率场为

$$\epsilon_0 = \begin{bmatrix} \epsilon_{x0} \\ \epsilon_{y0} \\ \gamma_{xy0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{bmatrix} =$$

$$\kappa = \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ 2\kappa_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\Psi_{x,x} \\ -\Psi_{y,y} \\ -\Psi_{x,y} - \Psi_{y,x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_{y,x} \\ -\theta_{x,y} \\ \theta_{y,y} - \theta_{x,x} \end{bmatrix} = [B_{b1} \ B_{b2} \ B_{b3}]a_e = [B_b]a_e \quad (16)$$

其中

$$B_{bi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & R_{i,x} & R_{y^i,x} & -R_{x^i,x} & R_{x^i,x} - \frac{\partial L_i}{\partial x} & R_{y^i,y} \\ 0 & 0 & H_{i,y} & H_{y^i,y} & -H_{x^i,y} & H_{x^i,y} & H_{y^i,x} - \frac{\partial L_i}{\partial x} \\ 0 & 0 & R_{i,y} + H_{i,x} & R_{y^i,y} + H_{y^i,x} & -R_{x^i,y} - H_{x^i,x} & R_{x^i,y} - \frac{\partial L_i}{\partial y} + H_{x^i,x} & R_{y^i,x} + H_{y^i,y} - \frac{\partial L_i}{\partial y} \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, 3.$$

于是可得到单元的应变矩阵为

$$U_e = \frac{1}{2} a_e^T \iint_{A_e} B_p^T C_p B_p dA a_e + \frac{1}{2} a_e^T \iint_{A_e} B_s^T C_s B_s dA a_e \quad (18)$$

$$\epsilon_p = \begin{Bmatrix} \epsilon_0 \\ \kappa \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_0 \\ B_b \end{bmatrix} a_e = B_p a_e \quad (17)$$

2.4 单元刚度矩阵

单元的应变能为

式中: A_e 是单元的面积; C_p 和 C_s 分别为耦合刚度与剪切刚度,可由 1 阶剪切变形理论求得,则单元刚度

矩阵为

$$K_e = \iint_{A_e} \mathbf{B}_p^T \mathbf{C}_p \mathbf{B}_p dA + \iint_{A_e} \mathbf{B}_s^T \mathbf{C}_s \mathbf{B}_s dA \quad (19)$$

2.5 单元荷载

在单元的推导过程中没有涉及挠度场 ω 的插值,为了计算横向分布荷载的节点等效荷载列阵,可以设挠度场 ω 为

$$\omega = \mathbf{L}_\omega \mathbf{a}_e \quad (20)$$

其中

$$\mathbf{L}_\omega = \begin{bmatrix} 0 & 0 & L_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

对于横向分布荷载 $q(x, y)$, 单元等效节点荷载为

$$\mathbf{f}_e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & f_{z1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_{z2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_{z3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (22)$$

其中分布荷载

$$f_{zi} = \iint_{A_e} q(x, y) L_i dA, \quad i = 1, 2, 3 \quad (23)$$

3 数值算例

3.1 受双正弦荷载作用的方板

本文基于 Matlab 软件编程实现 CDST-S6 的有限元计算过程. 下面对受双正弦荷载作用的四边硬筒支正交铺设 3 层和 9 层方板进行计算,以验证单元 CDST-S6 的性能. 该经典算例由 Pagano 和 Hatfield 提出^[12], 如图 2 所示. 图中,几何参数为:边长 $L=1\ 000\ \text{mm}$, 板厚设置为 $h=250, 100, 20, 10, 1, 0.1\ \text{mm}$. 材料参数为:同一材料正交铺设,表面铺层 $E_1=25.0\ \text{GPa}, E_2=1.0\ \text{GPa}; G_{12}=0.5\ \text{GPa}, G_{13}=0.5\ \text{GPa}, G_{23}=0.2\ \text{GPa}; \mu_{12}=0.25$. 考虑两种铺设情况:ST1 对应于 3 层板 $(0, 90, 0)$; ST2 对应于 9 层板 $(0, 90, 0, 90, 0, 90, 0, 90, 0)$. 在两种铺设情况中, 0° 铺设的总厚度和 90° 铺设的总厚度相等,各 0° 铺设厚度相等,各 90° 铺设厚度相等. 四边均为硬筒支,各边的边界条件为:AB 边 $u = \omega = \Psi_x = 0$; BC 边 $u = \Psi_x = 0$; CD 边 $v = \Psi_y = 0$; DA 边 $v = \omega = \Psi_y = 0$. 荷载

条件为:双正弦荷载 $q = q_0 \sin \frac{\pi x}{L} \sin \frac{\pi y}{L}$.

为了将 CDST-S6 的解与其他文献进行比较,挠度按以下格式化形式给出: $w = \frac{\pi^4 Q}{12 q_0 S^4 h} \omega$. 其中, $S = L/h, Q = 4G_{12} + \frac{[E_1 + E_2(1 + 2\mu_{23})]}{(1 - \mu_{12}\mu_{21})}$.

将单元 CDST-S6 的计算结果与其他文献的解析解列于表 1 和表 2 中,可以看出在任何宽厚比条

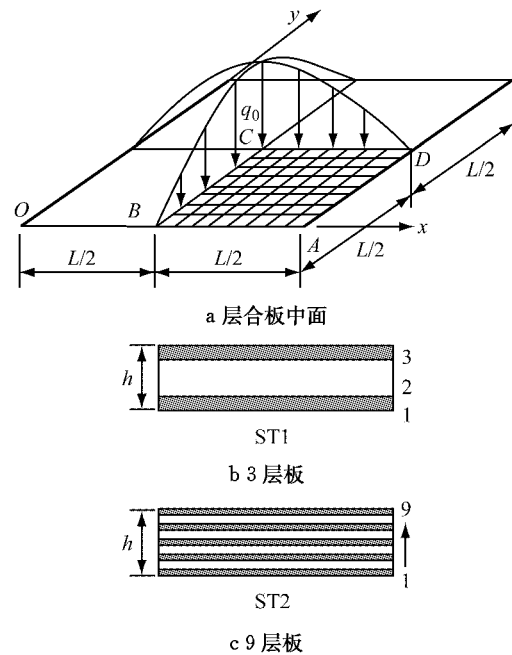


图 2 受双正弦荷载的四边简支 3 层和 9 层正交铺设方板
Fig.2 Three-layer and nine-layer orthogonal laid square plates with four simply supported edges by double sine loads

表 1 受双正弦荷载作用的四边硬筒支正交 3 层层合方板 $(0, 90, 0)$ 的最大挠度

Tab.1 The maximum deflection of the three layer square plate $(0, 90, 0)$ with four simply supported edges by double sinusoidally loads

计算单元	层合板宽厚比 $S=L/h$			
	10	50	100	100 000
FSDT	1.727	1.031	1.008	1.000
CTMQ20 ^[8] (8×8)	1.729	1.031	1.008	1.000
3 维弹性解 ^[12]	1.709	1.031	1.008	—
DST ^[13]	1.727	1.067	—	—
TMQ20 ^[14] (8×8)	1.728	1.031	1.008	1.000
CDST-S6 (8×8)	1.709	1.031	1.008	1.000

表 2 受双正弦荷载作用的四边硬筒支正交 9 层层合方板 $(0, 90, 0, 90, 0, 90, 0, 90, 0)$ 的最大挠度

Tab.2 The maximum deflection of the nine layer square plate $(0, 90, 0, 90, 0, 90, 0, 90, 0)$ with four simply supported edges by double sinusoidally loads

计算单元	层合板宽厚比 $S=L/h$			
	10	50	100	100 000
FSDT	1.522	1.021	1.005	1.000
CTMQ20 ^[8] (8×8)	1.523	1.021	1.005	1.000
3 维弹性解 ^[12]	1.512	1.021	1.005	—
DST ^[13]	1.526	1.021	—	—
TMQ20 ^[14] (8×8)	1.524	1.021	1.005	1.000
CDST-S6 (8×8)	1.512	1.021	1.005	1.000

件下,对于板的最大挠度,单元 CDST-S6 的解与 3 维弹性解都非常吻合,具有很好的精度. 当层合板的

宽厚比较小时,CDST-S6 比其他所有解的精度更高。当层合板很薄时,CDST-S6 与其他不会发生剪切闭锁的单元有相同的解,不会发生剪切闭锁的现象。

不同宽厚比下各单元求解的层合板最大挠度与 3 维弹性解的相对误差见表 3,图 3 及图 4。由对比分析可知,本文 CDST-S6 单元比目前常用的能解决剪切闭锁的单元精度更高,CDST-S6 单元与 3 维弹性解误差接近 0。可见 CDST-S6 单元是性能优异的厚薄通用的层合板单元。

表 3 受双正弦荷载作用的四边硬筒支正交层合方板最大挠度计算误差

Tab.3 The error on the maximum deflection of the square plate with four simply supported edges by double sinusoidally loads

层合板类型	计算单元	层合板宽厚比 $S=L/h$		
		10	50	100
3 层板	FSDT	1.8	0	0
	CTMQ20 ^[8] (8×8)	1.9	0	0
	DST ^[13]	1.8	4.6	—
	TMQ20 ^[14] (8×8)	1.9	0	0
	CDST-S6(8×8)	0	0	0
9 层板	FSDT	1.0	0	0
	CTMQ20 ^[8] (8×8)	1.1	0	0
	DST ^[13]	1.4	0	—
	TMQ20 ^[14] (8×8)	1.1	0	0
	CDST-S6(8×8)	0	0	0

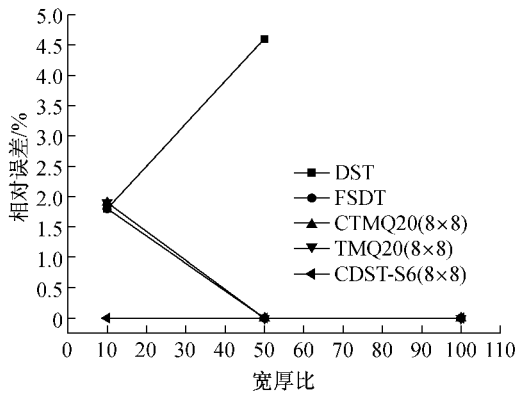


图 3 受双正弦荷载的四边简支 3 层方板最大挠度计算误差
Fig.3 The error on the maximum deflection of the three layer square plate with four simply supported edges by double sinusoidally loads

3.2 受双正弦荷载及均布荷载作用的方板

板的各铺层厚度相等,其他几何、材料和荷载参数与算例 3.1 相同,采用 4×4,8×8,16×16,32×32 这 4 种网格对整板进行计算,考虑 3 种不同的跨厚比,剪切修正系数采用 $k_1^2 = k_2^2 = 5/6$ 。分别计算双正弦荷载及均布荷载作用下层合板的挠度,然后对最大挠度值 w_0 进行量纲一化处理,即 $\bar{w} =$

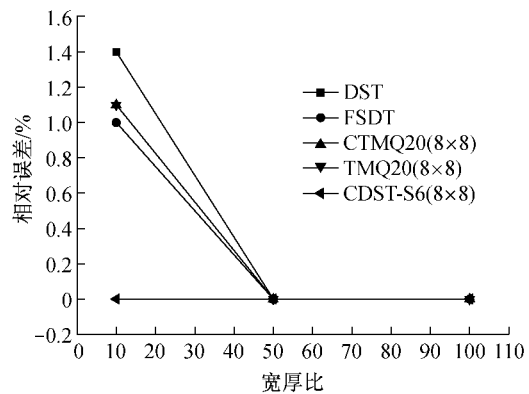


图 4 受双正弦荷载的四边简支 9 层方板最大挠度计算误差
Fig.4 The error on the maximum deflection of the nine layer square plate with four simply supported edges by double sinusoidally loads

$w_0 \left(\frac{L}{2}, \frac{L}{2} \right) \frac{E_2 h^3}{L^4 q_0}$, 计算结果列于表 4 和 5。对比分析可知,在 3 种宽厚比情况下 CDST-S6 的解均能与文献[1]的解析解较好吻合。可见 CDST-S6 有较好的收敛性,且能适用于非正交层合板的计算分析。

表 4 受双正弦荷载作用的四边简支反对称铺设 8 层层合方板 $[(-45, 45)_4]_s$ 的最大挠度

Tab.4 The maximum deflection of eight-layer anti-symmetric angle-ply square plate $[(-45, 45)_4]_s$ with four simply supported edges by double sinusoidally load

宽厚比 L/h	网格数	FDST ^[1]	CTMQ20 ^[8]	TMQ20 ^[14]	CDST-S6
10	4×4	0.419 8	0.406 3	0.405 7	0.369 1
	8×8	0.419 8	0.415 7	0.415 7	0.413 9
	16×16	0.419 8	0.418 8	0.418 8	0.420 9
	32×32	0.419 8	0.419 6	0.419 6	0.419 7
20	4×4	0.289 6	0.276 4	0.276 4	0.257 2
	8×8	0.289 6	0.284 6	0.284 6	0.287 1
	16×16	0.289 6	0.288 1	0.288 1	0.290 6
	32×32	0.289 6	0.289 2	0.289 2	0.289 3
100	4×4	0.247 9	0.244 0	0.243 8	0.211 7
	8×8	0.247 9	0.246 3	0.246 3	0.237 6
	16×16	0.247 9	0.247 1	0.247 1	0.245 3
	32×32	0.247 9	0.247 6	0.247 6	0.246 4

4 结论

本文提出了一种基于 1 阶剪切变形理论的三节点三角形层合板单元 CDST-S6,单元的每个节点有 7 个自由度,其中含 2 个附加的剪切自由度。CDST-S6 单元的明显优势是其表达式简洁,可方便地进行有限元数值求解分析。数值算例表明,CDST-S6 单元有较高的精度和收敛性,较好地避免了板的剪切闭锁现象,是一种性能优异的厚薄通用的层合板单元。

当用 CDST-S6 单元计算单层各向同性板的弯曲问题时,其结果可以退化为文献[11]中的 DST-S6 的结果.从文献[11]的数值算例中可以看到,对于单层各向同性板精度高,收敛性好,当板厚趋于 0 时,单元可以退化为 DKT 单元.

表 5 受均布荷载作用的四边简支反对称铺设 8 层层合板 $[(-45, 45)_4]_s$ 的最大挠度

Tab.5 The maximum deflection of eight-layer anti-symmetric angle-ply square plate $[(-45, 45)_4]_s$ with four simply supported edges by uniformly distributed loads

宽厚比 L/h	网格数	FDST ^[1]	CTMQ20 ^[8]	TMQ20 ^[14]	CDST-S6
10	4×4	0.636 6	—	—	0.639 6
	8×8	0.636 6	—	—	0.649 0
	16×16	0.636 6	—	—	0.643 1
	32×32	0.636 6	—	—	0.637 5
20	4×4	0.448 3	—	—	0.446 9
	8×8	0.448 3	—	—	0.458 4
	16×16	0.448 3	—	—	0.453 5
	32×32	0.448 3	—	—	0.448 5
100	4×4	0.388 3	—	—	0.367 9
	8×8	0.388 3	—	—	0.382 4
	16×16	0.388 3	—	—	0.386 7
	32×32	0.388 3	—	—	0.386 4

参考文献:

- [1] Reddy J N. Mechanics of laminated composite plates and shells theory and analysis[M]. Boca Raton: CRC Press, 1997.
- [2] Singh G, Raju K K, Rao G V. A new lock-free material finite element for flexure of moderately thick rectangular composite plates[J]. Computers & Structures, 1998, 69:609.
- [3] Sadek E A. Some serendipity finite element for the analysis of laminated plates[J]. Computers & Structures, 1998, 69:37.
- [4] Auricchio F, Sacco E. A mixed-enhanced finite-element for the analysis of laminated composite plates [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1999, 44: 1481.
- [5] Alfano G, Auricchio F, Rosati L, et al. MITC finite elements for laminates composite plates[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2001, 50(3):707.
- [6] 吴振.高性能整体-局部高阶理论及高阶层合板单元[D].大连:大连理工大学工程力学系,2007.
- WU Zhen. High performance of global-local higher-order theory and high-order laminated plate elements [D]. Dalian: Department of Mechanical Engineering Dalian University of Technology, 2007.
- [7] 岑松,龙驭球,姚振汉.基于一阶剪切变形理论的新型复合材料层合板单元[J].工程力学,2002,19(1):1.
- CEN Song, LONG Yuqiu, YAO Zhenhan. A new element based on the first-order shear deformation theory for the analysis of laminated composite plates[J]. Engineering Mechanics, 2002, 19(1):1.
- [8] CEN Song, LONG Yuqiu, YAO Zhenhan. A new hybrid-enhanced displacement-based element for the analysis of laminated composite plates[J]. Computers & Structures, 1999, 16(4):1.
- [9] 岑松,龙志飞,龙驭球.对转角场和剪应变场进行合理插值的厚薄板通用四边形单元[J].工程力学,1999,16(4):1.
- CEN Song, LONG Zhifei, LONG Yuqiu. A mindlin quadrilateral plate element with improved interpolation for the rotation and shear strain fields[J]. Engineering Mechanics, 1999, 16(4): 1.
- [10] SOH Aikah, CEN Song, LONG Yuqiu, et al. A new twelve DOF quadrilateral element for analysis of thick and thin plates [J]. European Journal of Mechanics A, 2001, 20:299.
- [11] Cai Y C, Tian L G, Atluri S N. A simple locking-free discrete shear triangular plate element [J]. Computer Modeling in Engineering & Sciences, 2011, 77:221.
- [12] Pagano N J, Hatfield S J. Elastic behavior of multilayered composites [J]. American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1972, 10:931.
- [13] Lardeur P, Batoz J L. Composite plate analysis using a new discrete shear triangular finite element [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1989, 27:343.
- [14] 岑松,龙驭球,姚振汉.用杂交法改善应力解的新型复合材料层合板单元[J].工程力学,2002,19(2):7.
- CEN Song, LONG Yuqiu, YAO Zhenhan. A new displacement-based element for the analysis of laminated composite plates with hybrid-enhance stress solutions [J]. Engineering Mechanics, 2002, 19(2):7.