

任意形状隧道围岩应力与位移的解析延拓求解

李培楠¹, 刘俊², 苏锋¹, 李晓军¹

(1. 同济大学 土木工程学院, 上海 200092; 2. 同济大学 测绘与地理信息学院, 上海 200092)

摘要: 考虑隧道断面开挖轮廓线为任意不规则形状的情况, 基于复变函数方法中的解析延拓法对弹性半无限空间内隧道的围岩应力与位移进行求解, 建立了任意形状隧道围岩中任意一点处的应力值和位移值的隐式解析表达式. 然后以圆形断面隧道、马蹄形断面隧道作为特例, 同时考虑隧道衬砌等内支撑法向反力作用的影响, 求解出弹性半空间内任意一点处的应力值和位移值解析解的具体显式表达式, 其中假设隧道埋深与隧道直径之比较大, 从而不用考虑重力梯度的影响, 将重力简化为作用在边界上的均布外荷载. 最后与已有的解析解与数值解进行比较, 证明了该方法的准确性. 该求解方法拓展了解析延拓法的应用, 并能快捷地评估任意断面形状隧道开挖中的围岩应力状态及位移变形情况.

关键词: 隧道; 复变函数法; 解析延拓法; 解析解; 弹性半空间

中图分类号: U451

文献标志码: A

Analytical Continuation Method for Solving Stress and Displacement of Surrounding Rock Buried Tunnel Excavation with Arbitrary Shape Section

LI Peinan¹, LIU Jun², SU Feng¹, LI Xiaojun¹

(1. College of Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. College of Surveying and Geo-informatics, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: In order to get the stress solutions and displacement solutions in rock around a tunnel excavation by taking into account of the internal pressure, an analytical solution is presented for excavation stress and displacement of tunnel with arbitrary shape and size by analytic continuation method in anelastic half-plane. As a special case, two closed solutions are given respectively for stress and displacement field around a lined circular and horseshoe-shaped tunnel at great depth considering the influences of lining forces of tunnels. Because the depth is larger than the size of the

tunnel, the effect of gravity gradient can be ignored, and gravity loads can be simplified as uniform normal loads along far-field boundary. Comparison between the results of numerical analysis by two-dimensional finite element method and those from the closed solutions indicates that the closed solution is reliable and applicable for assessment of the stress and displacement field around the tunnel in the arbitrary shape and size at great depth.

Key words: tunnels; complex variable function method; analytic continuation method; solutions; elastic half-plane

在地下工程稳定性分析和设计中经常会遇到可假定为平面应变问题的单洞与多洞问题, 带隧洞的半空间性状分析是弹性力学的基本课题之一, 历史上许多学者对其进行了研究并取得了一定的成果. 1920 年 Jeffery^[1] 利用双极坐标法给出了圆形洞室的平面应力和应变的完备解答, 但解答是建立在某些限制条件基础上的, 不但相当繁琐, 且未能给出位移边界条件下该问题的解答. Mindlin^[2-3] 同样采用双极坐标解法, 在应力势函数的推导过程中加入了介质所受的重力场和初始应力场, 从满足隧道周边的无法向和切向应力条件开始, 提取出包括开挖体重量的应力势函数, 然后为了满足位移单值和水平向无法向和切向应力边界条件采用试凑的办法开展了一系列工作, 然而由于双极坐标法本身的局限性最终仍然未能给出位移场的公式; 双极坐标法一般只能求得一些简单隧洞的应力场, 不能求出其位移场表达式, 而且当隧洞距离地表较近时, 双极坐标法往往给出错误的数值计算结果. 1777 年 Euler 建立了复变函数理论^[4], 目前已经形成了非常系统的理论并被广泛地应用到弹性力学领域^[5-8]. 复变函数在推导平面弹性静力问题时能把某些复杂几何构形的单连通域共形映射为几何构形较为简单的单连通域

收稿日期: 2013-01-30

基金项目: 国家自然科学基金(41272289); 长江学者和创新团队发展计划(JTR1029); 中央高校基本科研业务费专项资金
第一作者: 李培楠(1983—), 男, 博士生, 主要研究方向为岩土数值计算理论. E-mail: peinanli411@163.com

(例如单位圆内域或外域),把包括 1 个隧洞的半无限空间共形映射为圆环域,然后在这些区域内运用解析函数理论来求解,其中待求的解析函数就由该区域的边值条件来确定.复变函数求解单隧洞问题可以归结为 2 种方法,柯西积分法和解析延拓法.1997 年 Verruijt^[9]采用柯西积分法推导了满足水平面无法向和切向应力的第一边界条件以及隧洞周边的位移可展开成映射后域内单位复数的幂级数形式的第二边界条件的解的递推公式.1998 年 Verruijt^[10]又给出了满足水平面无法向和切向应力的第一边界条件以及隧洞周边的应力可展成单位复数的幂级数形式的第一边界条件的解的递推公式.但其工作仅局限于简单形状(圆形或椭圆形)的隧洞.陈子荫^[11]、吕爱钟等^[12]用柯西积分法求解出了任意形状隧洞在半空间的应力解和位移解,但应用于隧道开挖的分析时没有考虑隧道开挖过程中管片支撑力对其产生的影响.王志良等^[13]、张顶锋等^[14]的推导则直接将隧道断面形状简化为圆形.

本文利用复变函数方法中的解析延拓法对弹性半无限空间内任意形状隧道围岩应力与位移进行了求解,建立了任意形状隧道围岩中任意一点处的应力值和位移值隐式解析表达式.之后在考虑了隧道衬砌等内支撑法向反力作用的影响的情况,将隧洞衬砌法向反力简化为径向等压力,求出相同边界条件下圆形断面隧道在弹性半空间内任意一点处的应力值和位移值解析解的具体显示表达式,并与已有的不均匀受压圆断面水平巷道围岩的应力和位移解公式进行对比,证明了该方法的准确性.

1 问题描述

当隧道埋深与隧道直径相比较大时可以不考虑重力梯度的影响,从而直接把重力作用化为无限远处作用有 P_1, P_2 的外荷载来进行求解,图1给出了

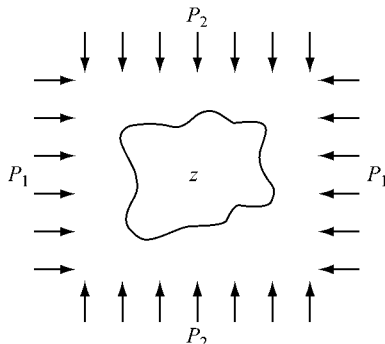


图 1 分析模型示意

Fig.1 Sketch of analysis model

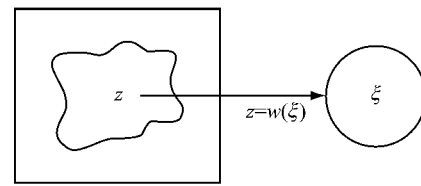


图 2 分析模型映射函数示意

Fig.2 Mapped function scheme

z 平面半无限空间任意形状隧洞的构形,图 2 为通过复变函数中保角映射后把 z 平面任意形状隧洞外域转化为 ξ 平面单位圆外域后的情况,其中 P_1 和 P_2 分别表示无穷远处水平应力值和竖向应力值, z 和 ξ 分别为隧洞在物理平面和映射平面上的复数坐标, $z=w(\xi)$ 为其映射函数.

由 Muskhelishvili 平面问题的复变函数解法^[8],各应力、位移分量可通过复平面上 2 个解析函数 $\varphi_1(z), \Psi_1(z)$ 来确定.即应力公式为

$$\sigma_x + \sigma_y = 4\text{Re}[\varphi_1'(z)] \tag{1}$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2[\bar{z}\varphi_1''(z) + \Psi_1'(z)] \tag{2}$$

位移公式为

$$2G(u + iv) = k\varphi_1(z) - z\overline{\varphi_1'(z)} - \overline{\Psi_1(z)} \tag{3}$$

式中: u 和 v 分别对应直角坐标系下 x, y 方向的位移分量; k 为与泊松比有关的常量,对于平面应变问题, $k = 3 - 4\mu$,对于平面应力问题, $k = (3 - \mu) / (1 + \mu)$, μ 为泊松比; G 为剪切模量, $G = E / [2(1 + \mu)]$, E 为弹性模量; $\bar{z}, \overline{\varphi_1'(z)}$ 和 $\overline{\Psi_1(z)}$ 分别为其对应函数的复数共轭.

2 任意形状隧洞的解析延拓法求解

将半无限平面 z 上任意形状的隧洞的外域映射到 ξ 平面的单位圆外域,其映射函数最普遍的形式可以表示为^[12]

$$z = w(\xi) = R\left(\xi + C_0 + \frac{C_1}{\xi} + \frac{C_2}{\xi^2} + \dots + \frac{C_n}{\xi^n}\right) = R\left(\xi + \sum_{k=0}^N C_k \xi^{-k}\right) \tag{4}$$

式中: R 为隧洞的半径,反映了隧洞的大小; C_1, C_2, \dots, C_n 反映了隧洞的形状, C_0 反映了隧洞在复平面坐标系中所处的位置.根据复变函数理论,对于单隧洞问题,无限域中的 2 个复应力解析函数可表示为^[11]

$$\varphi_1(z) = -\frac{1}{2\pi(1+k)}(X + iY)\ln z + Bz + \varphi_{1,0}(z) \tag{5}$$

$$\Psi_1(z) = \frac{k}{2\pi(1+k)}(X - iY)\ln z + (B' + C')z + \Psi_{1,0}(z) \quad (6)$$

式中: X 和 Y 为隧洞边界位置作用的非平衡力矢量在直角坐标系中 2 个相互垂直方向上的分量; $B = (\sigma_{x,\infty} + \sigma_{y,\infty})/4$, $B' = (\sigma_{y,\infty} - \sigma_{x,\infty})/4$, $C' = \tau_{xy,\infty}$, $\sigma_{x,\infty}$, $\sigma_{y,\infty}$ 和 $\tau_{xy,\infty}$ 分别为直角坐标系下无穷远处所作用的应力分量, 其中 $\sigma_{x,\infty} = P_1$ 和 $\sigma_{y,\infty} = P_2$, 即代表初始应力场; $\varphi_{1,0}(z)$ 和 $\Psi_{1,0}(z)$ 为隧洞外部空间中包括无穷远点在内的单值解析函数, 其形式分别为

$$\varphi_{1,0}(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots + \frac{a_n}{z^n} \quad (7)$$

$$\Psi_{1,0}(z) = b_0 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \dots + \frac{b_n}{z^n} \quad (8)$$

式中: $a_0, a_1 \dots a_n$ 和 $b_0, b_1 \dots b_n$ 为单值解析函数的常数项系数, 可根据具体边界条件和复平面点所在的具体位置求得其具体值. 根据已经确定映射函数 $z = w(\xi)$ 把 z 物理平面的应力函数转化到 ξ 平面的应力函数, 为此引用如下记号:

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) &= \varphi_1(z) = \varphi_1(w(\xi)) = \\ &= -\frac{1}{2\pi(1+k)}(X + iY)\ln w(\xi) + Bw(\xi) + \varphi_0(\xi) = \\ &= -\frac{1}{2\pi(1+k)}(X + iY)\ln\left\{R\left[\xi + \sum_{k=0}^N(C_k\xi^{-k})\right]\right\} + \\ &= BR\left[\xi + \sum_{k=0}^N(C_k\xi^{-k})\right] + \varphi_0(\xi) \quad (9) \\ \Psi(\xi) &= \Psi_1(z) = \Psi_1(w(\xi)) = \\ &= \frac{k}{2\pi(1+k)}(X - iY)\ln w(\xi) + \\ &= (B' + C')w(\xi) + \Psi_0(\xi) = \\ &= \frac{1}{2\pi(1+k)}(X - iY)\ln\left\{R\left[\xi + \sum_{k=0}^N(C_k\xi^{-k})\right]\right\} + \\ &= (B' + C')R\left[\xi + \sum_{k=0}^N(C_k\xi^{-k})\right] + \Psi_0(\xi) \quad (10) \end{aligned}$$

考虑边界条件为无穷远点处刚体转动为零, 隧洞周边没有作用面力, 则

$$\varphi(\xi) = \varphi_1(z) = \varphi_1(w(\xi)) = Bw(\xi) + \varphi_0(\xi) = BR\left[\xi + \sum_{k=0}^N(C_k\xi^{-k})\right] + \varphi_0(\xi) \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \Psi(\xi) &= \Psi_1(z) = \Psi_1(w(\xi)) = \\ &= (B' + C')w(\xi) + \Psi_0(\xi) = \\ &= (B' + C')R\left[\xi + \sum_{k=0}^N(C_k\xi^{-k})\right] + \Psi_0(\xi) \quad (12) \end{aligned}$$

设应力函数

$$\Phi(\xi) = \varphi'_1(z) = \frac{\varphi'_1(\xi)}{w'(\xi)} = B + \frac{\varphi'_0(\xi)}{w'(\xi)} \quad (13)$$

$$\Psi(\xi) = \Psi'_1(z) = \frac{\Psi'_1(\xi)}{w'(\xi)} = (B' + C') + \frac{\Psi'_0(\xi)}{w'(\xi)} \quad (14)$$

又因为

$$w'(\xi) = R\left[1 - \sum_{k=0}^N(C_k k \xi^{-k-1})\right] \quad (15)$$

故用式(13)乘以式(15)得

$$\begin{aligned} w'(\xi) \cdot \Phi(\xi) &= R\left[1 - \sum_{k=0}^N(C_k k \xi^{-k-1})\right] \cdot \\ &= \left[\frac{1}{4}(P_1 + P_2) + \frac{\varphi'_0(\xi)}{w'(\xi)}\right] \quad (16) \end{aligned}$$

平面弹性复变函数求解应力公式为

$$\begin{cases} \sigma_x + \sigma_y = 4\text{Re}[\Phi(\xi)] \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2\left[\overline{w(\xi)} \frac{\Phi'(\xi)}{w'(\xi)} + \Psi(\xi)\right] \end{cases} \quad (17)$$

利用解析延拓法结合式(17)把单位圆内域、圆外域问题化为 Riemann 问题^[15]求解可得式(18):

$$\begin{cases} w'(\xi) \cdot \Phi_{\triangleright}(\xi) = A_0 + \frac{A_1}{\xi} + \frac{A_2}{\xi^2} + \dots + \frac{A_{n+1}}{\xi^{n+1}} \\ w'(\xi) \Psi_{\triangleright}(\xi) = \frac{1}{\xi^2} \overline{w'(\frac{1}{\xi})} \left[\overline{\Phi_1(\frac{1}{\xi})} + \Phi(\xi) \right] - \overline{w(\frac{1}{\xi})} \Phi'(\xi) \end{cases} \quad (18)$$

其中

$$\Phi_{\triangleright}(\xi) = \begin{cases} \Phi_{\triangleright}^+(\xi) = \Phi_1(\xi), & \xi \in S^+ \\ \Phi_{\triangleright}^-(\xi) = \Phi(\xi), & \xi \in S^- \end{cases} \quad (19)$$

$$\Psi_{\triangleright}(\xi) = \begin{cases} \Psi_{\triangleright}^+(\xi) = \Psi_1(\xi), & \xi \in S^+ \\ \Psi_{\triangleright}^-(\xi) = \Psi(\xi), & \xi \in S^- \end{cases} \quad (20)$$

$$\Phi_{\triangleright}^-(t) - \Phi_{\triangleright}^+(t) = \Phi(t) - \Phi_1(t) = N(t) + iT(t) \quad (21)$$

式中: $N(t), T(t)$ 为隧洞开挖边界处面力; 应力函数 $\Phi_1(\xi)$ 是应力函数 $\Phi(\xi)$ 在单位圆内域的解析延拓应力函数. 由于假设隧洞开挖边界处面力为零, 推出

$$\Phi_{\triangleright}^-(t) - \Phi_{\triangleright}^+(t) = 0 \quad (22)$$

所以式(18)对应应力函数 $\Phi_{\triangleright}^+(\xi), \Phi_{\triangleright}^-(\xi)$ 和 $\Psi_{\triangleright}^+(\xi), \Psi_{\triangleright}^-(\xi)$ 均适用. 根据解析延拓公式, 当 ξ 取值在单位圆外域时, 有

$$w'(\xi) \cdot \Phi_{\triangleright}^-(\xi) = A_0 + \frac{A_1}{\xi} + \frac{A_2}{\xi^2} + \dots + \frac{A_{n+1}}{\xi^{n+1}} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{\triangleright}^-(\xi) &= \Phi(\xi) = \\ &= \frac{1}{w'(\xi)} \left[A_0 + \frac{A_1}{\xi} + \frac{A_2}{\xi^2} + \dots + \frac{A_{n+1}}{\xi^{n+1}} \right] = \\ &= \frac{1}{R\left(1 - \sum_{k=0}^N \frac{C_k}{\xi^{k+1}}\right)} \left[A_0 + \frac{A_1}{\xi} + \frac{A_2}{\xi^2} + \dots + \frac{A_{n+1}}{\xi^{n+1}} \right] \quad (24) \end{aligned}$$

比较式(16)和式(24), 且由于在式(16)中的

$\frac{\varphi'_0(\xi)}{w'(\xi)}$ 只包含 $\left(\frac{1}{\xi^2}, \frac{1}{\xi^3}, \dots, \frac{1}{\xi^n}\right)$ 项, 通过运算可得

$$\begin{cases} A_0 = \frac{1}{4}R(P_1 + P_2) \\ A_1 = 0 \end{cases}$$

对于式(24)中的其他系数,则需要通过式(18)中的第 2 式计算求得,由于式(18)中第 2 式 $w'(\xi)\Psi_{\triangleright}(\xi)$ 为圆外无极点解析函数,所以式中无 ξ 的正幂次项,即所有含 ξ 的正幂次项系数均为零,因此可以根据这个条件通过解线性方程组来求其他待定系数,又由于

$$w(\xi) = R\left(\xi + \sum_{k=0}^N C_k \xi^{-k}\right) \quad (25)$$

$$w'(\xi) = R\left(1 - \sum_{k=0}^N k C_k \xi^{-k-1}\right) \quad (26)$$

$$w\left(\frac{1}{\xi}\right) = R\left(\frac{1}{\xi} + \sum_{k=0}^N C_k \xi^k\right) \quad (27)$$

$$\overline{w\left(\frac{1}{\xi}\right)} = R\left(\frac{1}{\xi} + \sum_{k=0}^N C_k \xi^k\right) \quad (28)$$

$$w'\left(\frac{1}{\xi}\right) = R\left(1 - \sum_{k=0}^N k C_k \xi^{k+1}\right) \quad (29)$$

$$\Phi_1(\xi) = \Phi(\xi) = \frac{1}{w'(\xi)} \left[A_0 + \frac{A_1}{\xi} + \frac{A_2}{\xi^2} + \dots + \frac{A_{n+1}}{\xi^{n+1}} \right] \quad (30)$$

$$w'(\xi)\Psi(\xi) = \frac{1}{\xi^2} \overline{w'\left(\frac{1}{\xi}\right)} \left[\overline{\Phi_1\left(\frac{1}{\xi}\right)} + \Phi(\xi) \right] - \frac{\overline{w\left(\frac{1}{\xi}\right)} \Phi'(\xi)}{w\left(\frac{1}{\xi}\right)} \quad (31)$$

把式(25)~(30)代入式(31),经过一系列运算得

$$\begin{aligned} w'(\xi)\Psi(\xi) &= \frac{1}{\xi^2} \overline{w'\left(\frac{1}{\xi}\right)} \left[\overline{\Phi_1\left(\frac{1}{\xi}\right)} + \Phi(\xi) \right] - \\ &\frac{\overline{w\left(\frac{1}{\xi}\right)} \Phi'(\xi)}{w\left(\frac{1}{\xi}\right)} = \left[\overline{A_{k+1}} - \sum_{k=0}^N (C_k k A_0) \right] \xi^{k-1} + \\ &\overline{A_k} \xi^{k-2} + \left\{ \overline{A_{k-1}} - \sum_{k=0}^N [C_k (k-2) A_2] \right\} \xi^{k-3} + \\ &\left\{ \overline{A_{k-2}} - \sum_{k=0}^N [C_k (k-3) A_3] \right\} \xi^{k-4} + \dots + \\ &\left[\overline{A_2} - \sum_{k=0}^N (C_k A_{k-1}) \right] \end{aligned} \quad (32)$$

式中:应力方程 $\Phi(\xi)$ 和 $\Psi(\xi)$ 中的系数 A_0, \dots, A_{n+1} 是由圆外无极点解析函数 $w'(\xi)\Psi_{\triangleright}(\xi)$ 表达式中所有含 ξ 的正幂次项系数均为零得到,解下列线性方程组可以求得其他待定系数.

$$\begin{cases} \overline{A_{k+1}} - \sum_{k=0}^N (C_k k A_0) = 0 \\ \overline{A_k} = 0 \\ \overline{A_{k-1}} - \sum_{k=0}^N [C_k (k-2) A_2] = 0 \\ \vdots \\ \overline{A_2} - \sum_{k=0}^N (C_k A_{k-1}) = 0 \end{cases} \quad (33)$$

根据方程组(33)即可求的任意形状隧洞在半无限平面隧洞外域的应力函数 $\Phi(\xi)$ 和 $\Psi(\xi)$,然后再结合式(34)即可求出半无限平面隧洞外域任意一点的应力解和位移解的普遍表达式.

$$\begin{cases} \sigma_x + \sigma_y = 4\text{Re}[\Phi(\xi)] \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2\left[\overline{w(\xi)} \frac{\Phi'(\xi)}{w'(\xi)} + \Psi(\xi)\right] \\ 2G(u + iv) = k\varphi(\xi) - w(\xi) \frac{\overline{\Phi'(\xi)}}{w'(\xi)} - \overline{\Psi(\xi)} \end{cases} \quad (34)$$

3 圆形隧洞算例求解验证

式(34)为隐式解析表达式,在求解具体隧道断面问题时还需进一步求解,不同断面形式的具体显式表达式不同.这里简化为圆形隧道断面进行求解验证.以隧洞衬砌周边受法向支撑力 P 模拟隧洞开挖时的荷载释放;考虑水平向无穷远处和竖向无穷远处分别受 P_1, P_2 外载.根据线性方程(28)和式(13),取 $z=R\xi$,单位圆外域应力函数 $\Phi(\xi)$ 可简化为

$$\Phi(\xi) = -\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{N + iT}{t-z} dt + B + \frac{B' - iC'}{z^2} \quad (35)$$

且根据洞周边界条件可得

$$\begin{aligned} \Phi_{\triangleright}(t) - \Phi_{\triangleleft}(t) &= \Phi(t) - \Phi_1(t) = \\ N(t) + iT(t) &= -P \end{aligned}$$

把上式代入式(16),(24)和(33)即可求得圆外域应力函数表达式为

$$\Phi(\xi) = \frac{1}{R} \left(A_0 + \frac{A_1}{\xi} + \frac{A_2}{\xi^2} \right) = \frac{P}{2} + \frac{E}{\xi^2} + \frac{D}{2} \quad (36)$$

$$\Psi(\xi) = \frac{3E}{\xi^4} + \frac{D}{\xi^2} + E \quad (37)$$

其中

$$\begin{cases} D = (P_1 + P_2)/2 \\ E = (P_2 - P_1)/2 \end{cases}$$

把式(36),(37)代入式(34)即可求得隧外域平面任意一点的应力解和位移解的具体显式表达式.

设 ρ, θ 为 ξ 平面极坐标, $\sigma_{\rho}, \sigma_{\theta}$ 和 τ_{ρ} 为 z 平面正交曲线坐标系下的应力分量,由于所讨论的为 z 平面半径为 R 的圆形隧洞,所以可采用 z 平面极坐标表示.

因 $z=R\xi, z=re^{i\alpha}, r$ 和 a 是 z 平面极坐标,故可得出

$$re^{i\alpha} = R\rho e^{i\theta}$$

把上式分开实部与虚部后为

$$\begin{cases} r \cos a = R \rho \cos \theta \\ r \sin a = R \rho \sin \theta \end{cases}$$

则得

$$\begin{cases} r^2 = R^2 \rho^2 \\ a = \theta \end{cases}$$

故 $\sigma_\rho, \sigma_\theta$ 和 $\tau_{\rho\theta}$ 可分别写成 σ_r, σ_θ 和 $\tau_{r\theta}$, 因此, 其应力解的具体表达式为

$$\begin{cases} \sigma_\theta = -P + D + \frac{DR^2}{r^2} + \left(E + \frac{3ER^4}{r^4}\right) \cos 2\theta \\ \sigma_r = P + D - \frac{DR^2}{r^2} + \left(-E + \frac{4ER^2}{r^2} - \frac{3ER^4}{r^4}\right) \cos 2\theta \\ \tau_{r\theta} = \left(E + \frac{2ER^2}{r^2} - \frac{3ER^4}{r^4}\right) \sin 2\theta \end{cases} \quad (38)$$

根据式(34), 其位移解可表示为

$$2G(u + iv) = (k-1) \left(\frac{P}{2} + \frac{D}{2}\right) R\xi + \frac{RkE}{\xi} - ER\bar{\xi} + \frac{RD}{\xi} - \frac{RE\xi}{\xi^2} + \frac{ER^3}{\xi^3} \quad (39)$$

其中公式中的实部、虚部即为所对应具体问题的位移解 u 和 v . 其位移解具体表达式如下所示:

$$u = \frac{(1+\mu)r}{E_0} \left[\left(P + D(1-2\mu) + \frac{DR^2}{r^2}\right) - E \cdot \cos 2\theta \left(1 + \frac{4R^2}{r^2}(1-\mu) - \frac{R^4}{r^4}\right) \right] \quad (40)$$

$$v = -\frac{2(1+\mu)}{E_0} \cdot P\theta + \frac{(1+\mu)r}{E_0} \cdot E \cdot \sin 2\theta \cdot \left[1 + \frac{R^4}{r^4} + 2(1-2\mu) \frac{R^2}{r^2} \right] \quad (41)$$

由于式(40)和(41)计算所得为绝对位移, 而对实际工程具有指导意义的是需要获取隧道开挖后的相对位移, 所以必须从绝对位移中减去隧道开挖前就存在的初始位移. 为了得到初始位移, 在式(40)和(41)中分别令 $R=0, p=0$, 则得

$$u_0 = \frac{(1+\mu)r}{E_0} [D(1-2\mu) - E \cdot \cos 2\theta] \quad (42)$$

$$v_0 = \frac{(1+\mu)r}{E_0} \cdot E \cdot \sin 2\theta \quad (43)$$

由此可得隧道开挖时隧道周边的相对位移为

$$u' = u - u_0 = \frac{(1+\mu)r}{E_0} \left[P + \frac{DR^2}{r^2} - E \cdot \cos 2\theta \left(\frac{4R^2}{r^2}(1-\mu) - \frac{R^4}{r^4}\right) \right] \quad (44)$$

$$v' = v - v_0 = -\frac{2(1+\mu)}{E_0} \cdot P\theta + \frac{(1+\mu)r}{E_0} \cdot E \cdot \sin 2\theta \left[\frac{R^4}{r^4} + 2(1-2\mu) \frac{R^2}{r^2} \right] \quad (45)$$

其中

$$\begin{cases} D = (P_1 + P_2)/2 \\ E = (P_2 - P_1)/2 \end{cases}, k = \begin{cases} 3-4\mu \\ 3-\frac{\mu}{1+\mu} \end{cases}, G = \frac{E_0}{2(1+\mu)}$$

式中: E_0 为弹性模量; μ 为泊松比. 由于本研究对象为平面应变问题, 所以 E_0 和 μ 可用 $E_0/(1-\mu^2)$ 和 $\mu/(1-\mu)$ 代替.

由上述推导可以看出, 为验证任意形状隧道应力及位移公式的正确性, 在简化条件下, 以圆形隧道作为特例, 求出应力解表达式为式(38), 位移解的表达式为式(44)和(45), 该表达式与已有的非均匀受压圆断面水平巷道围岩的应力和位移解公式一致^[16], 证明了本文方法的准确性.

4 马蹄形隧洞算例求解验证

利用上述所求得的解析解来求解非圆形隧洞开挖时其应力场与位移场的分布状况, 设单心圆仰拱马蹄形隧道的典型断面如图 3, 其中 $R_1=4\ 000\text{ mm}$, $R_2=12\ 000\text{ mm}$. 因隧洞埋深与孔径相比较较大从而不考虑重力梯度影响, 直接把重力作用化为边界作用的 P_1 和 P_2 外载来求解, 即在无穷远处作用的地表竖向外荷载具体取值为 18 MPa , 弹性模量为 4.0 GPa , 泊松比为 0.22 . 设水平向固定边界条件为 $P_1=0\text{ kPa}$.

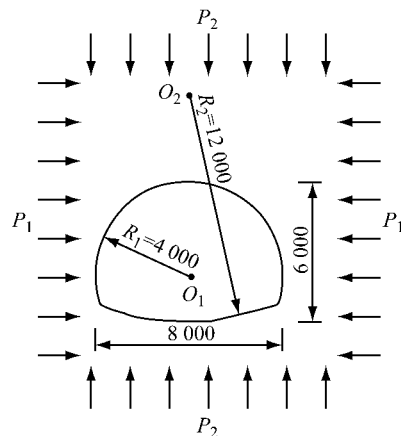


图 3 单心圆仰拱马蹄形隧道计算尺寸示意(单位: mm)
Fig. 3 Calculated chart of horseshoe-shaped tunnel(unit: mm)

根据式(4)的表达形式求映射函数最终化为求映射函数中的参数 R 和 C_k , 求解步骤如下.

(1) 在 z 平面选定直角坐标系, 使单心圆仰拱马蹄形隧道对称于 x 轴, 并从其左边圆周上逆时针任取控制点 i , 使点 i 的直角坐标和相应极坐标分别为

(x_i, y_i) 和 (r_0, a_i) ,令 $i=0$ 对应的坐标点为 $(r_0, 0)$,其在 ξ 平面单位圆圆周上对应的直角坐标和极坐标均为 $(1, 0)$,则最终可推出

$$R = r_0 / \left(1 + \sum_{k=0}^n C_k\right) \quad (46)$$

(2)利用复合最优化技术来确定 C_k ,设目标函数为

$$f = \sum_{i=1}^m \left\{ r_i - R \left[\cos(a_i - \beta_i) + \sum_{k=0}^n C_k \cos(a_i + k\beta_i) \right] \right\}^2 \quad (47)$$

由于在映射函数的级数中只需取很少的几项计算就能满足结果的精确性.因此,通过验算,在该单心圆仰拱马蹄形隧道断面的映射函数中取 $k=5$.利用最优化方法计算所得的映射函数为

$$w(\xi) = 3.67 \times (\xi - 0.23 - 0.115\xi^{-1} + 0.082\xi^{-2} - 0.021\xi^{-3} + 0.009\xi^{-4} + 0.0034\xi^{-5}) \quad (48)$$

然后通过保角映射结合优化算法,可求得应力函数 $\varphi(\xi)$ 和 $\Psi(\xi)$.把应力函数代入式(34),再通过坐标变换公式,最终可求得单心圆仰拱马蹄形隧道的 $(\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta})$ 和位移 (u, v) .

采用大型三维有限元分析软件 ANSYS 建立二

维平面应变模型对理论推导单心圆仰拱隧道解析解公式进行验证;为了和前面解析解计算结果进行对比分析,数值模型中取均值岩层进行分析,岩层弹性模量为4.0 GPa,竖向地表外荷载为18 MPa,泊松比为0.22.水平向为固定边界条件($P_1 = 0$ kPa).模型计算范围水平方向的左右两边各取3倍隧洞跨宽,垂直方向的上下边界也各取3倍隧洞跨宽.

为了便于分析,通过等角度逆时针把隧道洞周划分为12等份,并分别比较了在解析解计算中所得到的隧道洞周附近各区域的 σ_θ 应力值和 u, v 等位移值(取上半平面)和数值解所得到的隧道洞周附近各区域的 σ_θ 应力值和 u, v 等位移值,并对其误差大小进行分析.从图4的计算结果可以看出在隧道周边各点处的应力值与位移值的变化趋势基本一致,其中,隧道周边的环向应力值 σ_θ 解析解的计算结果中最大值为62.48 MPa,位置大约在逆时针方向 116° ,环向应力值的最大误差为仅为12.1%;对于位移的比较,其中水平位移最大误差为18.1%,而竖向位移的最大误差为16.4%.从整体上看,误差都比较小.因此,综上所述,该计算分析和比较验证结果也都说明了本文所推导的公式的正确性和可靠性.

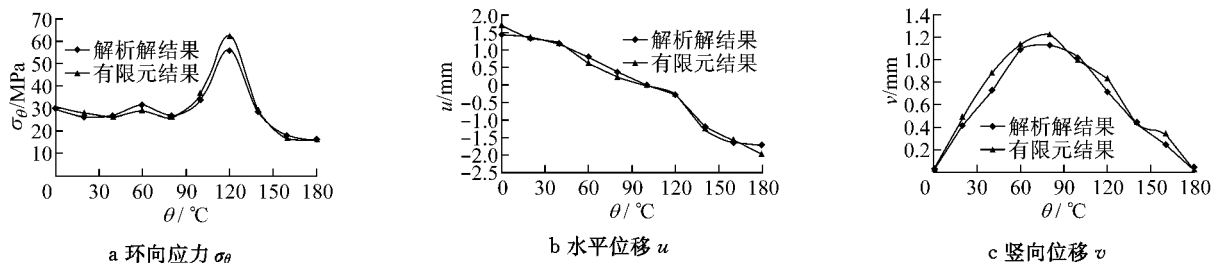


图4 隧道周边 σ_θ, u, v 解析解和数值计算结果比较

Fig.4 Comparison between analytical and numerical results of σ_θ, u and v

5 结论

基于解析延拓法对半空间任意形状的单隧道周边围岩的应力值和位移值进行了解析解的推导,并考虑了隧道的法向支撑力,给出了地下半空间任意形状的单隧洞在弹性半空间内任意一点处应力值和位移值的解析解普遍表达式;并以圆形隧道、马蹄形隧道分别作为简化条件下的特例,求出其弹性半空间内任意一点处应力值和位移值的解析解的具体显式表达式,通过与已有的数值解和解析解的比较证明了本文方法的有效性和准确性.

参考文献:

- [1] Jeffery G B. Plane stress and plane strain in Bipolar coordinates[J]. Transaction of the Royal Society, Series A, 1921,221:265.
- [2] Mindlin R D. Stress distribution around a tunnel [J]. Transaction of the ASCE, 1940,195(1):1117.
- [3] Mindlin R D. Stress distribution around a hole near the edge of a plate under tension [J]. Proceedings of the Society Experimental Stress Analysis, 1948,5(2):56.
- [4] 钟玉泉. 复变函数论[M]. 北京: 高等教育出版社, 2004. ZHONG Yuquan. Function of complex variable theory [M]. Beijing: Higher Education Press, 2004.
- [5] 徐芝纶. 弹性力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2004.

- XU Zhilun. Elastic mechanics[M]. Beijing: Higher Education Press, 2004.
- [6] Timoshenko S P, Goodier J N. Theory of elasticity[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004.
- [7] Muskhelishvili N I. Mathematical theory of elasticity[M]. Leyden: International Publishing, 1954.
- [8] 路见可. 平面弹性复变函数方法[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2002.
- LU Jianke. Plane elasticity function of complex variable method[M]. Wuhan: Wuhan University Press, 2002.
- [9] Verruijt A. A complex variable solution for a deforming circular tunnel in an elastic half plane[M]. Geotechnique, 1997, 21(4): 77.
- [10] Verruijt A. Deformations of an elastic half plane with a circular cavity[J]. International Journal of Solids Structures, 1998, 35(21): 2795.
- [11] 陈子荫. 围岩力学分析中的解析方法[M]. 北京: 煤炭工业出版社, 1994.
- CHEN Ziyin. Analytical method for rock mechanical analysis[M]. Beijing: China Coal Industry Publishing House, 1994.
- [12] 吕爱钟, 张路青. 地下隧洞力学分析的复变函数方法[M]. 北京: 科学出版社, 2007.
- LÜ Aizhong, ZHANG Luqing. Mechanical analysis of the underground tunnel using function of complex variable[M]. Beijing: Science Press, 2007.
- [13] 王志良, 申林方, 姚激, 等. 浅埋隧道围岩应力场的计算复变函数求解法[J]. 岩土力学, 2010, 31(1): 86.
- WANG Zhiliang, SHEN Linfang, YAO Ji, et al. Calculation of stress field in surrounding rocks of shallow tunnel using computational function of complex variable method[J]. Rock and Soil Mechanics, 2010, 31(1): 86.
- [14] 张顶峰, 杜守继. 盾构隧道并行施工对既有隧道影响的理论分析[J]. 力学季刊, 2010, 31(4): 582.
- ZHANG Dingfeng, DU Shouji. Theoretical analysis of existing tunnel affect under shield tunnel parallel construction[J]. Chinese Quarterly of Mechanics, 2010, 31(4): 582.
- [15] CHEN Y Z. Multiple circular hole problem for an elastic half-plane[J]. Computers and Structures, 1994, 52(6): 1277.
- [16] 郑雨天. 岩石力学的弹塑性理论[M]. 北京: 煤炭工业出版社, 1988.
- ZHENG Yutian. Theoretical basis of elastic-plastic viscosity in rock mechanics[M]. Beijing: China Coal Industry Publishing House, 1988.

(上接第 1482 页)

(1)在计算拉索材料用量时必须计入其自重的影响。

(2)从经济性能角度出发,建议部分地锚斜拉桥各主要结构参数取值如下:地锚与中跨跨径比为 0.30~0.40,边中跨比为 0.40~0.45,塔跨比为 0.15~0.20。

(3)随着跨径的增长,部分地锚斜拉桥的经济性能优于全自锚斜拉桥,跨径分界点随工程条件恶化在约 800~1 600 m 范围内逐渐增大。

需要说明的是,本文参数研究仅限于现有常规工程材料,如果采用高性能钢材或 FRP (fiber reinforced polymer) 拉索等材料得到的最优结构参数和最优结构跨径分界点可能有所变化,但部分地锚斜拉桥经济性能优于全自锚斜拉桥的趋势保持不变。

参考文献:

- [1] Gimsing N J. Cable supported bridges—concept and design [M]. 3rd ed. Chichester: John Wiley & Sons Ltd, 2012.
- [2] Muller J. Bi-stayed cable-stayed bridge [C]// International Conference on Bridge. Leningrad: IABSE, 1991:455-460.
- [3] SUN Bin, CHENG Jin, XIAO Rucheng. Preliminary design and parametric study of a 1400m partially earth-anchored cable-stayed bridge [J]. Science in China Series E: Technological Sciences, 2010, 53(2): 502.
- [4] 孙斌,肖汝诚,贾丽君. 主跨 1 400 m 部分地锚式斜拉桥方案试设计[J]. 桥梁建设, 2009(3): 51.
- SUN Bin, XIAO Rucheng, JIA Lijun. Trial design of a proposed partially ground-anchored cable-stayed bridge with a main span 1 400 m [J]. Bridge Construction, 2009(3): 51.
- [5] 孙斌,肖汝诚,贾丽君,等. 斜拉-悬吊协作体系桥经济性能研究 [C]// 第十四届全国桥梁学术会议论文集. 上海: 同济大学出版社, 2000: 542-549.
- SUN Bin, XIAO Rucheng, JIA Lijun, et al. Economical behavior of cable-stayed-suspension bridge [C]// 14th National Conference on Bridge. Shanghai: Tongji University Press, 2000: 542-549.