

三维位势快速多极虚边界元最小二乘法

司 炜, 许 强

(同济大学 土木工程学院, 上海 200092)

摘要: 将快速多极展开法(FMM)和广义极小残值法(GMRES)结合于三维位势问题的虚边界元最小二乘法, 使求解方程的计算量和储存量与所求问题的计算自由度成线性比例; 欲达到数值模拟大规模自由度问题的目的. 基于位势问题虚边界元最小二乘法的数值求解格式, 将对角化和指数展开系数的概念引入到常规的快速多极展开法中, 将三维位势问题的基本解推导为更适合于快速多极算法的展开格式, 并用广义极小残值法求解方程组, 旨在达到进一步提高效率且仍保证较高计算精度的目的. 数值算例说明了该方法的可行性, 及计算效率和计算精度.

关键词: 快速多极展开法; 广义极小残值; 虚边界元; 最小二乘; 对角化

中图分类号: O343.1; TB33

文献标志码: A

Fast Multipole Virtual Boundary Element Least Square Method for Solving Three-dimensional Potential Problems

SI Wei, XU Qiang

(College of Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: The fast multipole method (FMM) and generalized minimal residual (GMRES) algorithm are applied to virtual boundary element least square method to solve three-dimensional potential problems, so that the amount of the computational elapsed time and the memory volume of the storage problems with the calculation of demand are linearly proportional to the number of degrees of freedom of the problem to be solved. Then the numerical simulation large-scale degrees of freedom question might be achieved by the method. Based on the numerical form of virtual boundary element-least square method for potential problems, the fundamental solutions of three-dimensional potential problems are derived as the numerical scheme to be more suitable for FMM, through the introduction of concepts of diagonalization

and exponential expansion moments, in order to further improve the efficiency of the problem with almost the same high-precision. The GMRES algorithm is adopted to find the solution of matrix equation. The numerical examples relating to simulation of large-scale problems achieved by the method verify the feasibility, efficiency and calculation precision of the method.

Key words: fast multipole method (FMM); generalized minimal residual algorithm (GMRES); virtual boundary element (VBEM); least square; diagonalization

虚边界元(VBEM)最小二乘法具有自身的优点: 相对于边界元直接法, 它无需处理奇异积分和不存在边界层效应^[1-2]. 但是由于常规虚边界元最小二乘法所形成的系数矩阵是非稀疏的对称满阵, 当问题的总自由度为 $O(N)$ 量级时, 其系数矩阵的储存量将达到 $O(N^2)$, 计算量将达到 $O(N^3)$, 此时采用虚边界元法求解大规模问题时存在着耗时多、存储量大的瓶颈; 边界元直接法也存在此弱点.

基于快速多极迭代算法(fast multipole method, FMM)具备将存储量和计算量均降低到 $O(N)$ 量级的优势, 因而将快速多极展开技术运用于边界元直接法和虚边界元法中以形成求解大规模复杂问题的算法, 既保留了半解析性质数值算法所具备的计算结果高精度的特点, 同时也克服了边界元类数值算法在大自由度问题求解上的瓶颈. 基于此原因, 一些学者结合该算法思想开展了很多有意义的应用研究工作^[3-6].

本文以三维位势问题为研究背景, 在常规的快速多极展开技术^[4]的基础上, 将对角化和指数展开系数的概念引入到常规的快速多极展开法中, 推导出一种更适合快速多极展开的三维问题虚边界元最小二乘法的数值求解格式. 该方法在虚拟边界上采

收稿日期: 2013-02-25

第一作者: 司 炜(1980—), 男, 博士生, 主要研究方向为结构数值分析、结构工程. E-mail: 2009swreal@tongji.edu.cn

通讯作者: 许 强(1951—), 男, 教授, 工学博士, 博士生导师, 主要研究方向为计算固体力学、结构分析与优化.

E-mail: xuqiang@tongji.edu.cn

用数值积分,在实际边界上有限个点处满足给定问题的边界条件.其较为突出的优点有:(1)相对于虚边界等额配点法,最小二乘配点法在实边界上配点是依据加权残数法中超额配点,其系数矩阵具有对称性,其计算时间只与虚边界所划单元数有关,从而达到节省存储空间和计算时间的目的;(2)对角化概念和指数展开系数的引入,使得本方法较原有快速多极虚边界元法的实现过程更为复杂,但是在计算大规模问题时仍然能够保证很高的精度;与常规快速多极算法相比,本文算法在存储量增加不大的同时,在计算量上有较大幅度的减少,从而进一步提高求解效率.

1 三维位势问题的虚边界元最小二乘法数值求解格式

虚边界元最小二乘法在虚边界上采用数值积分,在实际边界上有限个点处满足给定问题的边界条件.在虚边界上积分是为了能寻求到使原问题得到正确解的较好的分布虚体力;在实边界上采用“超额配点”,即依据最小二乘配点法的思想,其详尽的理论导出可参照文献[1-2].以下述其概要.

设三维问题的域定义为 Ω ,其实际边界为 Γ ,虚拟边界为 S (图1).设在虚拟边界 S 上存在着与问题真实的解相对应的虚拟源函数 $\varphi(y)$,这里的 y 称之为位于虚边界上的源点. $\bar{U}(x)$ 为实边界上已知位势, $\bar{Q}(x)$ 为实边界上已知位势导数,忽略体力源的三维位势问题虚边界元法的积分方程为

$$U(x) = \int_S u^*(x, y) \cdot \varphi(y) dS \quad (1)$$

$$Q(x) = \int_S q^*(x, y) \cdot \varphi(y) dS \quad (2)$$

式中: $U(x)$ 为待求位势; $Q(x)$ 为待求位势导数; $u^*(x, y)$ 和 $q^*(x, y)$ 分别是三维位势问题的位势和位势导数基本解.依据所给问题的边界条件,由最小二乘法可建立关于虚拟函数 $\varphi(y)$ 的方差泛函如下:

$$J[\varphi(y)] = \sum_{k=1}^{M_1} \beta_k [U(x_k) - \bar{U}(x_k)]^2 + \sum_{k=M_1+1}^{M_2} \beta_k [Q(x_k) - \bar{Q}(x_k)]^2 \quad (3)$$

式中: M_1 为位势边界上的配点数, $(M_2 - M_1)$ 为位势导数边界上的配点数; $\bar{U}(x_k)$ 、 $\bar{Q}(x_k)$ 分别为位势边界和位势导数边界上点 x_k 的已知函数; β_k 为位势边界和位势导数边界上各配点处的相对加权系数.虚

边界上虚拟函数 $\varphi(y)$ 可令式(3)中方差泛函的一阶变分为零求得,即得出最小二乘变分方程:

$$\delta J[\varphi(y)] = 0 \quad (4)$$

现将虚拟边界采用等参元进行离散化,并带回最小二乘变分方程,经整理后得到求解虚边界上各结点处虚拟场源值的控制方程.

$$C\varphi = D \quad (5)$$

一旦各结点上虚拟场源值确定,则根据叠加原理,利用式(1)和(2)可求解域内任意点位势和位势导数.

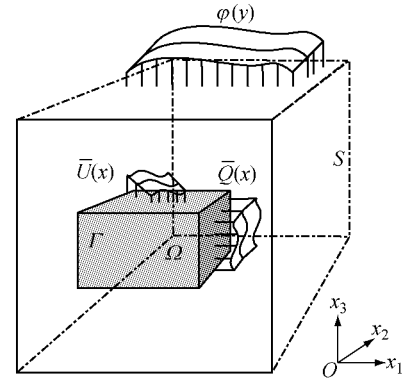


图1 虚边界元法示意图

Fig.1 Sketch map of VBEM

2 三维快速多极虚边界元法

快速多极展开迭代算法^[3-11]主要特点是在每一次迭代中,使用树结构等价存储系数矩阵与向量相乘后的结果及相关信息,因而系数矩阵不需要存储.快速多极算法的树结构的存储和计算复杂度都是 $O(N)$,使得该算法的效率比传统算法大大提高,从而适合处理大规模问题.

下面针对虚边界元最小二乘法所形成的线性代数方程组,直接给出引入对角化后的快速多极算法的完整实现格式,即按照如下步骤:核函数的多极展开、多极展开系数的转移、核函数的指数展开、多极展开系数向指数展开系数的转移、指数展开系数的转移、指数展开系数向局部展开系数的转移、局部展开系数的转移依次进行阐述推导(图2).图中, c_1, c_2, c_3, c_4 分别为4个立方体.

2.1 核函数的多极展开

设 y 和 x 分别表示三维空间中的任一源点和场点,而将靠近点 y 的 y_0 视为过渡点.为了确保计算精度,要求

$$|\vec{y_0 y}| \leq \frac{1}{2} |\vec{y_0 x}|$$

运用球谐函数,可使距离 $|\vec{y}\vec{x}|$ 的倒数展开成如下形式,从而达到变量 y 和 x 的分离,即

$$\frac{1}{|\vec{y}\vec{x}|} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \bar{S}_{n,m}(\vec{y}_0\vec{x}) R_{n,m}(\vec{y}_0\vec{y}) \quad (6)$$

其中 $R_{n,m}(\vec{y}_0\vec{y})$, $S_{n,m}(\vec{y}_0\vec{x})$ 为球谐函数. 将位势方向导数基本解 $q^*(x, y)$ 改写成如下形式:

$$q^*(x, y) = \frac{\partial u^*}{\partial x_i} n_i = -\frac{r_i}{4\pi r^3} n_i \quad (7)$$

式中: u^* 为位势基本解; n_i 为法向余弦; r 为距离; r_i 为 r 在 i 方向的投影长度. 将式(6)代入式(7),可得基本解的标准双重求和展开形式如下:

$$q^*(x, y) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \bar{S}_{n,m}(\vec{y}_0\vec{x}) R_{n,m}(\vec{y}_0\vec{y}) n_i \quad (8)$$

这里的 $\bar{S}_{n,m}(\vec{y}_0\vec{x})$ 只与变量 x 有关; 而 $R_{n,m}(\vec{y}_0\vec{y})$ 则仅与变量 y 有关. 再将式(8)代入式(2), 则得

$$Q(x) = \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \bar{S}_{n,m}(\vec{y}_0\vec{x}) n_i M_{n,m}(y_0)$$

其中

$$M_{n,m}(y_0) = \int_S R_{n,m}(\vec{y}_0\vec{y}) \cdot \varphi(y) dS \quad (9)$$

这里, $M_{n,m}(y_0)$ 称作多极展开系数或多极矩, 可适用于不同源点的核函数积分, 其在传递过程中仅需计算一次.

2.2 多极展开系数的转移

图 2 中给出的立方体 c_2 是由 8 个大小相同的子立方体组成, 其形心位置以 y_{c_2} 表示. 图中, x_{c_3} 为立方体 c_3 的形心坐标; 将其中一个子立方体示为 c_1 , 对应的形心位置以 y_0 表示. 将基本解中的 y 视为自变量, 以 y_{c_2} 为新的展开点, 利用球谐函数将其展开成双重求和形式, 可得到与式(9)相似的表达和新的多极展开系数. 新的多极展开系数可以由老的多极展开系数计算得到. 在满足下式要求的前提下,

$$|\vec{y}_{c_2}\vec{y}| \leq \frac{1}{2} |\vec{y}_{c_2}\vec{x}|$$

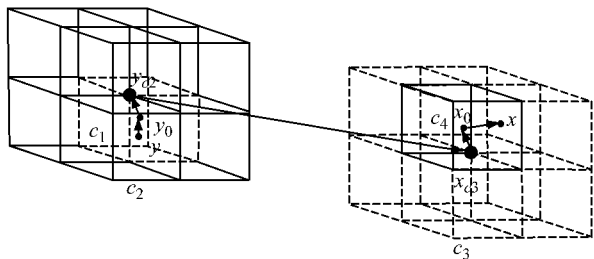


图 2 展开与传递立体图

Fig.2 The schematic diagram of the expansion and translation

根据球谐函数 R 的固有传递性质, 依据式(9), 对 y_{c_2} 点展开, 有

$$M_{n,m}(y_{c_2}) = \sum_{n'=0}^n \sum_{m'=-n'}^{n'} R_{n',m'}(\vec{y}_{c_2}\vec{y}_0) M_{n-n',m-m'}(y_0) \quad (10)$$

通过多极展开系数的传递, 把子立方体的多极展开系数集成到了父立方体的多极展开系数.

2.3 核函数的指数展开

核函数指数展开的基础是 $\frac{1}{r}$ 的指数展开. r 是源点 y 和场点 x 之间的距离, 而位势力学问题的基本解即是由 r 和 r 的导数构成. 在图 3 中, 所有的立方体边长均为 1, 带阴影的立方体用 R 表示, 透明立方体表示为 Q . 如果当 $y \in R, x \in Q$ 时, 式(11)中的指数积分可以用指数展开级数近似得到:

$$\frac{1}{|\vec{y}-\vec{x}|} = \frac{\omega_p}{M(p)d} \sum_{p=1}^{s(\epsilon)} \sum_{q=1}^{M(p)} e^{-\lambda_p(\vec{y}\vec{x})_3} \cdot e^{i\lambda_p((\vec{y}\vec{x})_1 \cos \alpha_q(p) + (\vec{y}\vec{x})_2 \sin \alpha_q(p))} \quad (11)$$

式中: d 为立方体边长; p, q 为和式下标; $M(p), \omega_p, \lambda_p, \alpha_q(p)$ 均为计算系数^[6].

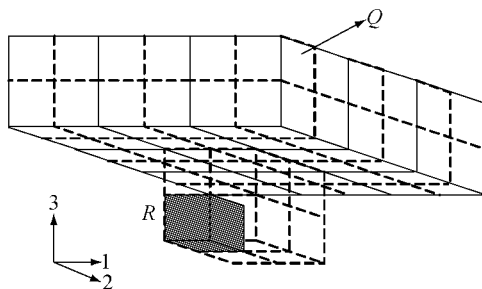


图 3 指数展开的条件

Fig.3 Requirements for exponential expansion

2.4 多极展开系数向指数展开系数的转移

通过多极展开系数向指数展开系数的传递, 可将多极展开系数转换成了属于同一个立方体的指数展开系数. 指数展开系数 $X(p, q; y_0)$ 可表达为

$$X(p, q; y_0) = \frac{\omega_p}{M(p)d} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-i)^m e^{-i\omega_{pq}(p)} \cdot \sum_{n=|m|}^{\infty} (\lambda_p/d)^n M_{n,m}(y_0) \quad (12)$$

2.5 指数展开系数的转移

又如图 2 可知, 立方体 c_3 也是由 8 个大小相同的子立方体组成, 其形心位置以 x_{c_3} 表示; 将其中一个子立方体示为 c_4 , 对应的形心位置以 x_0 表示. c_3 与 c_2 大小相同. 以 x 为自变量, 以 x_{c_3} 为中心. 在满足下式要求的前提下,

$$|\vec{x}_{c_3}\vec{x}| \leq \frac{1}{2} |\vec{y}_{c_2}\vec{x}_{c_3}|$$

将指数展开中心从 y_{c_2} 移至 x_{c_3} , 可得新的指数展开系数. 而新旧指数展开系数的传递关系:

$$X(p, q; x_0) = X(p, q; y_0) \cdot e^{-(\lambda_p/d)(\vec{x}_0 \vec{x}_0)_3 + i(\lambda_p/d)((\vec{x}_0 \vec{x}_0)_1 \cos \alpha_q(p) + (\vec{x}_0 \vec{x}_0)_2 \sin \alpha_q(p))} \quad (13)$$

通过指数展开系数之间的传递, 把 y_{c_2} 为中心的立方体的指数展开系数传递到了以 x_{c_3} 为中心的立方体的指数展开系数. 通过式(13)可见, 指数展开系数之间的传递关系是一对一的, 这种一对一的传递方式就称作对角化.

2.6 指数展开系数向局部展开系数的转移

由指数函数的展开性质:

$$e^{-(\lambda_p/d)(\vec{x}_0 \vec{x}_0)_3 + i(\lambda_p/d)((\vec{x}_0 \vec{x}_0)_1 \cos \alpha_q(p) + (\vec{x}_0 \vec{x}_0)_2 \sin \alpha_q(p))} = \sum_{n=0}^{\infty} (-\lambda_p/d)^n \sum_{m=-n}^n (-i)^m e^{-im\alpha_q(p)} R_{n,m}(\vec{x}_0 \vec{x})$$

整理后可通过指数展开系数向局部展开系数的传递, 把指数展开系数转换成了属于同一个立方体的局部展开系数. 二者的传递关系如下:

$$L_{n,m}(x_{0c}) = \sum_{p=1}^{s(e)} \sum_{q=1}^{M(p)} X(p, q; x_{0c}) (-i)^m \cdot (-\lambda_p/d)^n e^{-im\alpha_q(p)} \quad (14)$$

2.7 局部展开系数的转移

新老局部展开系数之间同样具有传递关系. 为能达到快速收敛, 要求

$$|\vec{x}_0 \vec{x}| \leq \frac{1}{2} |\vec{y}_{c_2} \vec{x}_0|$$

可采用与多极展开中关于平移的相同推导方式, 可得:

$$L_{n,m}(x_0) = \sum_{n'=nm}^{\infty} \sum_{m'=-n'}^{n'} R_{n'-n, m'-m}(\vec{x}_{c_3} \vec{x}_0) \cdot L_{n', m'}(x_{c_3}) \quad (15)$$

以 x_0 为中心的新的局部展开系数可以由 x_{c_3} 为中心的老的局部展开系数经传递计算得到. 通过局部展开系数的传递, 把父立方体的局部展开系数传递到其所包含的子立方体的局部展开系数.

3 数值算例

3.1 算例 1

如图 4 所示, 考察立方体温度场问题, 验证本方法的计算精度. 已知立方体边长 $L=100$, 立方体顶面 ($z=100$) 和底面 ($z=0$). 温度边界为: $U_{z=100}=200, U_{z=0}=100$; 其余 4 个面均绝热. 虚、实边界的距离均取为 50 mm. 计算内容: (1) 采用本文的快速多极虚边界元法和虚边界元直接法分别计算不同自由度下立方体中心 A 点温度与热流密度; (2) 固定自由

度, 比较快速多极虚边界元法所得结果与解析解的相对误差. 快速多极虚边界元法的级数截断阶数取为 $p=10, q=18$, 收敛残差取为 1×10^{-5} .

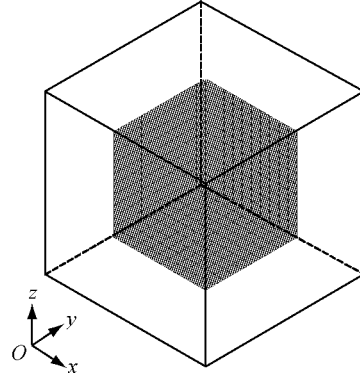


图 4 立方体温度场

Fig.4 Cube temperature field

(1) 虚边界元法是一种半解析性质的数值方法, 且只在表面划分网格, 具有较少自由度即得较高精度的特点; 快速多极虚边界元法是在几乎无损的展开基本解的基础上逐步推导出数值格式, 理论上应该同样具有较高精度, 从实际算例中可以得到验证. 表 1 和表 2 分别列出立方体中心点 A 在此两种算法下、不同计算自由度数时的温度值和 Z 方向温度热流密度的计算结果. 可看出本文的快速多极虚边界元和虚边界元直接法的计算精度都随着边界配点的增加很快逼近解析解.

表 1 A 点温度

Tab.1 Temperature at point A

自由度数	虚边界元直接迭代	快速多极虚边界元
26	150.005 136	150.005 131
218	149.996 801	149.996 853
602	150.004 698	150.004 874
1 178	150.003 900	150.003 916
1 946	150.002 214	150.002 244
解析解	150.000 0	

表 2 A 点热流密度

Tab.2 Heat-flow density at point A

自由度数	虚边界元直接迭代	快速多极虚边界元
26	1.000 406	1.000 406
218	0.999 877	0.999 878
602	0.999 899	0.999 899
1 178	0.999 910	0.999 910
1 946	0.999 917	0.999 912
解析解	1.000 0	

(2) 当自由度只取 26 时, 在立方体内取过中心点 A 点沿着 Z 轴方向的一条直线 L, 线长为 100. 于其上均匀取出 6 个点. 用本方法分别计算此组点的温度值和 Z 方向温度热流密度, 并与解析值比较相

对误差率,见表 3 和表 4. 可见,温度值和热流密度的相对误差率处于 10×10^{-5} 和 10×10^{-4} 之内,说明即使在较小自由度的情况下,本方法仍然具有较高的计算精度. 而且,快速多极虚边界元可以根据实际需要,通过调整快速多极虚边界元法的级数截断阶数调整计算精度和计算速度的合理平衡.

表 3 线 L 上各点温度

Tab.3 Each point temperature on the line L

Z 向坐标	快速多极虚边界元	解析解	相对误差/ 10^{-5}
$Z=0$	100.000 046	100.000	0.045
$Z=20$	119.999 918	120.000	0.068
$Z=40$	140.001 221	140.000	0.872
$Z=60$	160.008 471	160.000	5.295
$Z=80$	180.005 639	180.000	3.133
$Z=100$	200.000 041	200.000	0.021

表 4 线 L 上各点热流密度

Tab.4 Each point heat-flow density on the line L

Z 向坐标	快速多极虚边界元	解析解	相对误差/ 10^{-4}
$Z=0$	1.000 730	1.000 0	7.303
$Z=20$	0.999 796	1.000 0	2.033
$Z=40$	1.000 334	1.000 0	3.343
$Z=60$	1.000 221	1.000 0	2.213
$Z=80$	0.999 517	1.000 0	4.828
$Z=100$	1.000 528	1.000 0	5.286

3.2 算例 2

如图 5 所示,绝热长方体内多热源的热传导问题. 长方体 X 向、 Y 向、 Z 向边长分别为 600, 900, 600 mm. 于上下两侧各布置两层热源球体,球体半径均为 $R=10$ mm,每层球体个数 25,形心间距均为

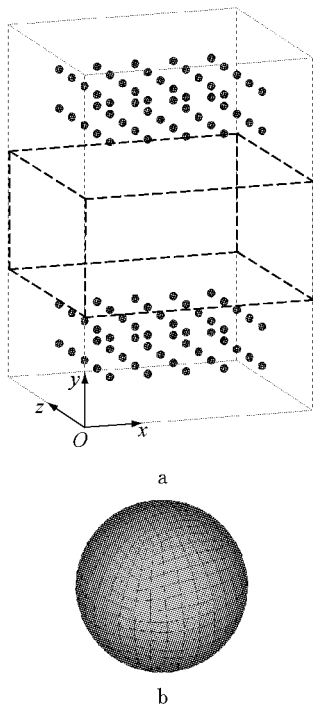


图 5 含多热源球体的长方体

Fig.5 The heat source spheres in cuboid

$L=100$ mm,共计 100 个热源球. 长方体四周绝热,内部 100 个热源球的温度设置为 0 至 500 度区间内随机取出的 100 个温度值. 球体中间长方体区域(用虚线画出) X 、 Y 、 Z 向边长分别为 600, 400, 600 mm, 现用本文方法求出此长方体区域在两侧多热源球体的共同影响下,内部温度的分布情况,特别统计出温度最高点,并画出经过此点三个互相垂直的平面上温度变化趋势图. 本算例可体现快速多极虚边界元法在大规模计算中的效率优势. 快速多极虚边界元法的级数截断阶数取为 $p=10, q=18$,收敛残差取为 1×10^{-4} .

对每个热源球体和外侧正方体采用四边形等参元划分表面,当单个球体划分单元数分别为 40、360、810、1 210、1 690 个单元时,外侧正方体划分单元数为 3 200、28 800、64 800、96 800、135 200,相对应的整个结构的自由度分别达到 7 402、65 002、146 002、218 002、304 402.

图 6 就该问题在不同自由度下分别采用两种算法计算所花费的时间对比. 虚边界元直接法计算时间随自由度按指数增长的趋势攀升,尤其是超过 10 000 自由度时,计算时间和内存要求迅速临近并超出所能承受的极限;而快速多极算法计算大规模自由度时,计算时间维持一定的斜率以直线方式发展.

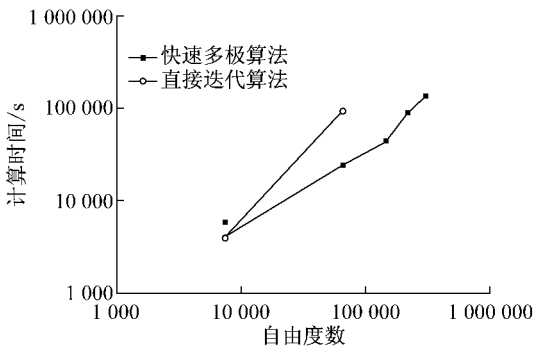


图 6 快速多极算法和虚边界元直接迭代法计算时间对比
Fig.6 Comparison of computation time of the new fast multipole virtual boundary element (VBEM)

分析内侧虚线表示的长方体区域. 从三个坐标轴方向按照 2 mm 为单位长度对区域体积进行网格划分,以三维网格节点作为待求温度的空间节点. 然后在利用控制方程求出虚边界上的虚拟函数后,根据叠加原理,依次求出 18 210 801 个空间节点的温度值. 由于在此虚线所示长方体区域内等距分布 18 210 801 个节点,可认为它们较为真实全面地反映了此区域在两侧多热源球体的共同影响下,内部温度的分布情况. 这些节点所得温度的最大值即是整个区域的最高温度值,相应的节点即是最高温度点.

求解内部长方体区域中全部空间节点的温度值时,由于节点分布密集,虚边界元直接法的计算时间无法满足需要.此过程本质上也是多源点对多场点累加影响效应,且多组影响效应有其内在统一的规律;基于此,同样采用快速多极的思路求解,图7即显示了针对此长方体内部区域大规模点群,采用快速多极算法计算时间随实边界初始配点个数变化的时间趋势线,计算时间与自由度数基本成线性规律;而用虚边界元直接法去计算如此规模点群所花费的时间过大,无需验证.可见快速多极的思路不仅在求解控制方程中能够改善运行效率,在进一步计算大量节点的位势值或位势导数值时也能发挥效用,这在复杂位势场中可以提供更为精准全面的结果.

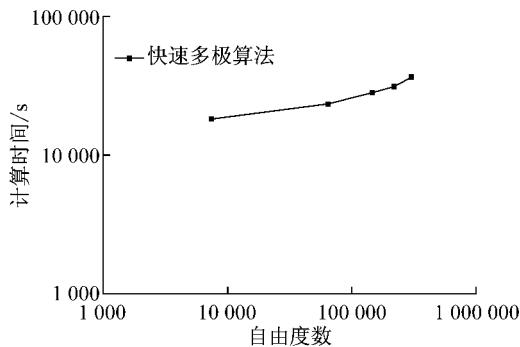
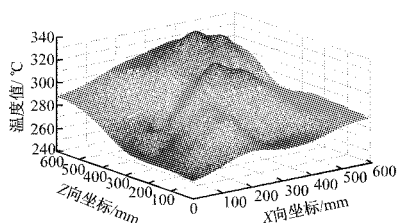


图7 快速多极算法计算时间

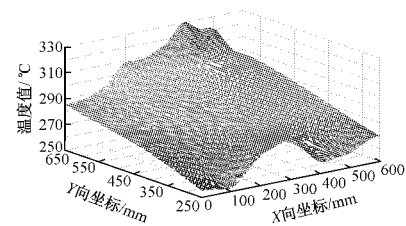
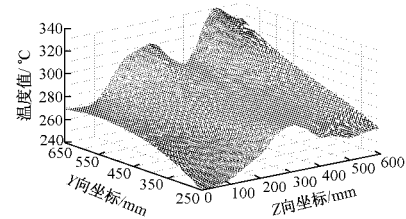
Fig.7 Computation time of the new fast multipole VBEM

得到全部空间节点的温度值后,可以根据实际需要查看经过任意空间节点任意平面上的温度变化趋势.此特别取出最高温度点(设为 M 点)观察.最高温度 $T_{\max} = 329.586\ 961$;对应坐标位置: $X_M = 402.0$, $Y_M = 650.0$, $Z_M = 510.0$.现进一步取出经过 M 点的三个互相垂直的面 S_{XOZ} , S_{XOY} , S_{YOZ} ,其中 S_{XOZ} 表示此面平行于坐标系基准面 XOZ ,面 S_{XOY} 和 S_{YOZ} 同理设定.图8~10精确、直观地描绘出其上温度的变化趋势.

图8 面 S_{XOZ} 上温度趋势图Fig.8 Temperature trend diagram on surface S_{XOZ}

4 结束语

本文给出一种引入对角化概念的快速多极虚边

图9 面 S_{XOY} 上温度趋势图Fig.9 Temperature trend diagram on surface S_{XOY} 图10 面 S_{YOZ} 上温度趋势图Fig.10 Temperature trend diagram on surface S_{YOZ}

界元最小二乘法思路,并成功地对三维位势问题进行了模拟.文中算例验证了本方法的可行性、精确性和高效性,快速多极边界元法在继承传统虚边界的计算精度高、无需处理奇异积分等优势的前提下,计算量和存储量却有数量级上的减少,同时在求解大规模问题方面体现出较强的能力,具有广泛的工程应用前景.

参考文献:

- [1] 孙焕纯,张立州,许强等.无奇异边界元法[M].大连:大连理工大学出版社,1999.
SUN Huanchun, ZHANG Lizhou, XU Qiang, et al. Nonsingularity boundary element methods[M]. Dalian: Dalian University of Technology Press, 1999.
- [2] 许强,孙焕纯.厚壳三维分析的虚边界元最小二乘法[J].大连理工大学学报,1996,36(4):413.
XU Qiang, SUN Huanchun. Virtual boundary element least square method for three-dimensional problems of thick shell [J]. Journal of Dalian University of Technology, 1996,36(4): 413.
- [3] ZHANG Zhijia, XU Qiang. Application of fast multipole VBEM to two-dimensional potential problems[C]//2009 International Conference on Engineering Computation. [S. l.]: ICEC, 2009: 217-220.
- [4] Liu J Y, Nishimura N. The fast multipole boundary element method for potential problems—a tutorial [J]. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2000,30: 371.
- [5] Peirce A P, Napier J A L. A spectral multipole method for efficient solutions of large scale boundary element models in elastostatics[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1995,38:4009.
- [6] Hrycak T, Rokhlin V. An improved fast multipole algorithm for potential fields[J]. Journal of Scientific Computing, 1998,19: 1804.