

运费有差异的多品种流交通网络最小费用算法

寇玮华, 崔皓莹

(西南交通大学 交通运输与物流学院, 四川 成都 610031)

摘要: 对运费有差异的多品种流交通网络进行了分析, 构建了复合参数和复合指标, 借鉴连续最短路算法和 Ford-Fulkerson 算法, 设计了运费有差异的多品种流最小费用算法, 并通过算例证明了算法的可行性, 为解决实际交通网络的相关问题提供了参考。

关键词: 交通网络; 多品种流; 费用差异; 最小费用流; 连续最短路算法; Ford-Fulkerson 算法

中图分类号: U113

文献标志码: A

An Algorithm for Minimum Cost in Multi-commodity Flow Traffic Network with Different Conveyance Costs

KOU Weihua, CUI Haoying

(School of Transportation and Logistics, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)

Abstract: Based on an analysis of the multicommodity flow traffic network with different costs, the composite parameters system and the composite indicators system were built. An algorithm for the minimum cost was designed with a reference to the successive shortest path algorithm and the Ford-Fulkerson algorithm, and the feasibility of the algorithm is proved by the example, and the algorithm provides the basis for solving the related issues in actual traffic network.

Key words: traffic network; multi-commodity flow; cost diversity; minimum-cost flow; successive shortest path algorithm; Ford-Fulkerson algorithm

最小费用流问题是网络与流的核心问题之一, 基本算法是 Ford-Fulkerson 算法, 还有网络单纯形算法 (Graph Simplex Algorithm)、松弛算法 (Relaxation Algorithm)、消圈算法 (cycle-canceling algorithm)、瑕疵算法 (Out-Of-Kilter Algorithm) 等

等^[1-8], 这些算法都只能解决单一品种流的最小费用流分配, 而且每个单一品种流在每一个阶段即在每个边上的费用代价是相同的. 在实际交通网络应用中, 普遍出现了多品种流问题, 所以有了流变换、流分解、组合应用、多品种流及预流推进等新的理论和方法^[9-10], 但这些算法都没有彻底解决多品种流的最小费用流分配问题, 尤其是针对不同品种流在同一个阶段的运费有差异的问题还没有很好地解决。

针对交通运输领域出现的运费有差异的多品种流交通网络有必要做深入研究. 本文首先对运费有差异的多品种流交通网络相关问题进行分析, 再基于连续最短路算法 (Successive Shortest Path Algorithm) 和 Ford-Fulkerson 算法的思路构造费用有差异的多品种流交通网络的最小费用流算法。

1 运费有差异的多品种流交通网络分析

1.1 运费有差异的多品种流的交通网络引例

为了了解运费有差异的多品种流交通网络最小费用流问题, 先给出运费有差异的多品种流交通网络的一个简单引例。

有一交通网络如图 1 所示, x_1, x_2 为发送地, v_1, v_2, v_3 为中转地, y_1, y_2, y_3 为接收地, 图中的边分别给出了运送能力和运送量, 即边的容量、流量 (零流). 其中 x_1 有产品 I, II, 数量分别为 18 t 和 8 t; x_2 有产品 II, III, 数量分别为 6 t 和 19 t. y_1 需要产品 I, II, 需求量分别为 6 t 和 7 t; y_2 需要产品 II, III, 需求量分别为 4 t 和 9 t; y_3 需要产品 I, III, 需求量分别为 8 t 和 13 t. 另外, 每种品种在每条边上的运费如表 1 所示, 其中运费按照品种序号排序, 即为 (w_I, w_{II}, w_{III}) , 如果与某品种无关, 运费设为 $+\infty$. 现在需要设计的方案是, 在满足总运费最少的前提下将尽可能多的产品运送到需求地。

收稿日期: 2013-05-10

基金项目: 国家自然科学基金(71271176)

第一作者: 寇玮华(1967—), 男, 副教授, 硕士生导师, 工程博士, 主要研究方向为交通运输网络控制及应用、交通信息工程及控制、智能交通. E-mail: kwh613@home.swjtu.edu.cn

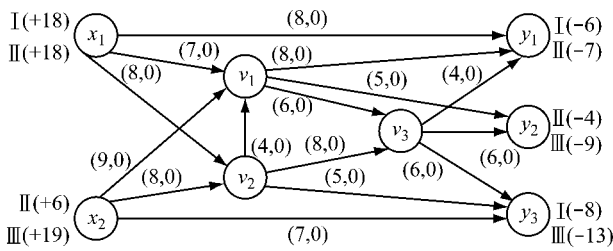


图 1 多品种流交通网络

Fig.1 Multi-commodity flow traffic network

表 1 不同品种流的运费

Tab.1 The conveyance cost of different commodity flows

顶点	v_1	v_2	v_3	y_1	y_2	y_3
x_1	(3,8,+∞)	(6,4,+∞)	—	(23,18,+∞)	—	—
x_2	(+∞,6,9)	(+∞,7,8)	—	—	—	(+∞,14,16)
v_1	—	—	(4,5,8)	(9,8,+∞)	(+∞,6,5)	—
v_2	(8,7,8)	—	(9,8,6)	—	—	(7,+∞,9)
v_3	—	—	—	(6,4,+∞)	(+∞,8,5)	(5,+∞,6)

e_2, \dots, e_m), 对集合 V 取定 2 个非空子集 X 和 Y , X 为只发出流量的顶点集合, Y 为只接收流量的顶点集合, 且 $X \cap Y = \emptyset$, 把 X 中的顶点 x 称为网络 G 的源, Y 中的顶点 y 称为网络 G 的汇. 针对边 (v_i, v_j) 赋予 3 个非负的整数参数 c_{ij}, f_{ij}, w_{ij} , 分别为容量、流量、费用. 设顶点 $v_i \notin X, v_i \notin Y$, 即 v_i 为转运点, 用 $f^+(v_i)$ 表示顶点 v_i 发出的流量之和, $f^-(v_i)$ 表示顶点 v_i 接收的流量之和. 设分配目标流的流值为 A , f_A 为流值为 A 的网络流, 用 V_{alt} 表示流量的状态值, 此时有 $V_{\text{alt}} = A$.

以上描述是针对单一品种流的, 而且每一种品种在每一个阶段即在每个边上的费用是相同的. 在实际的交通网络中, 多品种流现象普遍存在, 而且在同一个阶段的不同品种流运费可能不尽相同. 下面对运费有差异的多品种流交通网络特点进行分析.

设 r 为 q 个多品种中的第 r 个品种, 其中 $r=1, 2, \dots, q$. f_{ijr} 为第 r 个品种在边 (v_i, v_j) 上的流量, $f^+(v_i)$ 表示顶点 v_i 发出第 r 个品种的流量之和, $f^-(v_i)$ 表示顶点 v_i 接收第 r 个品种的流量之和, w_{ijr} 为第 r 个品种在边 (v_i, v_j) 上的运费. 边 (v_i, v_j) 也要遵从容量约束条件, 即所有品种的流量之和要小于该边的容量, 则有 $0 \leq \sum_{r=1}^q f_{ijr} \leq c_{ij}$. 所有转运顶点 v_i 也要遵从流量守恒条件, 这里所谓的流量守恒是既要保证所有品种的流量总和守恒, 也要保证每一品种的分量之和守恒, 则有 $\sum_{r=1}^q f^+(v_i) = \sum_{r=1}^q f^-(v_i), f^+(v_i) = f^-(v_i)$.

针对此引例, 如果再利用传统的最小费用流算法, 就不能设计出可行的最小费用流分配方案, 所以有必要研究运费有差异的多品种流交通网络最小费用流问题.

1.2 运费有差异的多品种流交通网络问题分析

先给定单一品种流的交通网络 $G=(V, E, C, F, W, X, Y)$, 其中 C 为容量集合, F 为流量集合, W 为费用集合, 顶点集合 $V=(v_1, v_2, \dots, v_n)$, 边 $E=(e_1,$

基于以上分析, 运费有差异的多品种流交通网络最小费用流线性规划模型如模型(1)所示.

$$\min z = \sum_{r=1}^q \sum_{ij} f_{ijr} w_{ijr} \quad (1)$$

s. t.

$$\begin{cases} 0 \leq \sum_{r=1}^q f_{ijr} \leq c_{ij} \text{ (容量约束条件)} \\ \sum_{r=1}^q f^+(v_i) = \sum_{r=1}^q f^-(v_i) \text{ (总流量守恒条件)} \\ f^+(v_i) = f^-(v_i) \text{ (品种分流量守恒条件)} \\ f_{ij} = \sum_{r=1}^q f_{ijr} \text{ (边流量等于分量之和)} \\ \sum f^+(x_i) = \sum f^-(y_i) \leq A \text{ (目标流限制条件)} \end{cases}$$

2 运费有差异的多品种流交通网络最小费用流算法设计

运费无差异的单一品种流最小费用流 Ford-Fulkerson 算法是先构造增流网络, 在增流网络中寻找关于费用代数和最小的路径, 再针对此路径所对应原网络中的增流链进行流量调整. 针对运费有差异的多品种流交通网络, 如果再构造增流网络势必会造成增流网络结构庞大而且复杂, 同时计算过程更为繁琐, 所以直接利用 Ford-Fulkerson 算法可行但不是优化的方法.

2.1 算法思想

在借鉴连续最短路算法和 Ford-Fulkerson 算法的基础上, 将网络图中边的属性设计为复合参数的形式, 再针对流量分配构建复合指标, 从而建立运费

有差异的多品种流交通网络最小费用流算法。

(1) 复合参数. 费用没有差异的单一品种流交通网络中,边 (v_i, v_j) 的属性参数为 (c_{ij}, f_{ij}, w_{ij}) . 针对运费有差异的多品种流,把边 (v_i, v_j) 的属性设计为复合参数形式,即为 $[c_{ij}, f_{ij}(f_{ij1}, \dots, f_{ijr}, \dots, f_{ijq}), (w_{ij1}, \dots, w_{ijr}, \dots, w_{ijq})]$, 其中 $f_{ij}(f_{ij1}, \dots, f_{ijr}, \dots, f_{ijq})$ 表示边 (v_i, v_j) 的总流量 f_{ij} 中每个品种的分流量各为多少; $(w_{ij1}, \dots, w_{ijr}, \dots, w_{ijq})$ 表示每个品种在边 (v_i, v_j) 上的运费。

(2) 复合指标. 连续最短路算法中,顶点 v_j 的指标为 $(l(v_j), v_i)$, 其中 $l(v_j)$ 表示从起点经顶点 v_i 到顶点 v_j 关于费用的最短路长度, v_i 表示 v_j 前一个顶点. Ford-Fulkerson 算法针对流量调整, 设定 u 表示被标识点 v_j 前一个顶点; D 表示边的方向, 通过“+”或“-”来标识是前向边还是后向边; δ 表示流量的调整量, 构建顶点 v_j 的指标 (u, D, δ) . 针对多品种流交通网络, 既要考虑最短路指标和流量调整指标, 也要考虑多品种及运费有差异的问题, 所以构建复合指标 $[\dots, (l_{(r)}(v_j), v_i, D, \delta_r), \dots] | (m, \delta)$, 其中 $l_{(r)}(v_j)$ 表示第 r 个品种从起点经过前一个顶点 v_i 到顶点 v_j 关于运费最低的最短路长度; v_i 表示顶点 v_j 的前一个顶点; “边的方向”表明边 (v_i, v_j) 是前向边还是后向边, 即 (v_i, v_j) 的流量是增加还是减少; δ_r 表示关于第 r 个品种最短路所对应的第 r 个品种的流量调整量; m 表示在所有品种的最短路径中路径长度最小所对应的品种, 即有 $l_{(m)}(v_j) = \min\{l_{(1)}(v_j), \dots, l_{(r)}(v_j), \dots, l_{(q)}(v_j)\}$; δ 表示第 m 品种的流量调整量, 即有 $\delta = \delta_m$.

(3) 算法思路. 利用给出的复合参数和复合指标能找出费用最低的最短路, 并可以确定出其对应的品种, 再判断此最短路是否为增流链, 如果是增流链, 就对相应的品种进行流量调整, 即通过修改复合参数值来分配流量, 这样就可以避免先指定某一品种进行最小费用流分配的错误. 以上思路是二次求解法, 即先寻找关于费用最低的最短路, 再判断此最短路是否为增流链. 但本文算法的核心思路是, 随着所求最短路的延伸, 同时消除非增流边, 这样既杜绝了二次求解问题, 也避免了全枚举的问题。

2.2 算法步骤

步骤 1: 设源 $X = \{x_1, \dots, x_i, \dots, x_n\}$, 转运点 $V = \{v_1, \dots, v_i, \dots, v_n\}$, 汇 $y_i = \{y_1, \dots, y_i, \dots, y_n\}$. 设源 x_i 具有第 r 品种的数量为 $s_{(r),i}$, 汇 y_i 需要第 r 品种的数量为 $t_{(r),i}$. 设 $\delta_r = +\infty$. 被标识的顶点写入集合 S 中, 初始时 $S = \emptyset$, 设顶点集合 $T = \{x_1, \dots,$

$x_i, \dots, x_n, v_1, \dots, v_i, \dots, v_n, y_1, \dots, y_i, \dots, y_n\}$.

步骤 2: 对运费有差异的多品种流交通网络在平凡流基础上利用给出的容量、费用把边的属性设为复合参数形式, 即 $[c_{ij}, f_{ij}(f_{ij1}, \dots, f_{ijr}, \dots, f_{ijq}), (w_{ij1}, \dots, w_{ijr}, \dots, w_{ijq})]$, 此时初始的流量 $f_{ij}(f_{ij1}, \dots, f_{ijr}, \dots, f_{ijq})$ 均为 $0(0, \dots, 0, \dots, 0)$, 即有 $V_{\text{aff}} = 0$.

步骤 3: 设 $l_{(r)}(x_i) = 0$, 对起点 x_i 赋予复合指标, 即 $[(0, 0, +, +\infty), \dots, (0, 0, +, +\infty), \dots, (0, 0, +, +\infty)] | (0, +\infty)$; 设其余顶点 $l_{(r)}(v_i) = +\infty, l_{(r)}(y_i) = +\infty$, 则其余顶点均可以赋予复合指标, 即 $[(+\infty, 0, +, +\infty), \dots, (+\infty, 0, +, +\infty), \dots, (+\infty, 0, +, +\infty)] | (0, +\infty)$.

步骤 4: 选择起点 x_i 检查, 将起点 x_i 复合指标上*, 表示顶点 v_i 已被检查. 同时设集合 $S = \{x_i\}, x_i \notin T$.

步骤 5: 若 x_i 与其他顶点没有直接连线, 其他顶点的复合指标保持不变; 若有直接连线, 则计算其他顶点的复合指标值, 计算方法如下。

(1) (x_i, v_j) 为前向边. ①若 $f_{ij} = c_{ij}$, 此时流量不能增加, 边 (x_i, v_j) 不能成为增流链的边, 那么最短路不能经过该边, 此时顶点 v_j 复合指标不变. ②若 $f_{ij} < c_{ij}$, 此时流量可以增加, 边 (x_i, v_j) 可以成为增流链的边, 最短路就可以经过该边. 复合指标的各指标计算如下. 设 $l_{(r)}(v_j) = \min\{l_{(r)}(v_j), l_{(r)}(x_i) + W_{ijr}\}$, 若 $l_{(r)}(v_j)$ 值来自第 1 项 $l_{(r)}(v_j)$, 那么顶点 v_j 复合指标第 1 复合项关于第 r 品种的子指标组保持不变; 若 $l_{(r)}(v_j)$ 值来自第 2 项 $l_{(r)}(x_i) + W_{ijr}$, 当 $v_j \in V$ 时, $\delta_r = \min\{c_{ij} - f_{ij}, s_{(r),i} - f^+(x_{i^*}), \delta_r\}$; 当 $v_j \in Y$ 时, 若 $s_{(r),i} - f^+(x_{i^*}) = 0$ 或 $t_{(r),j} - f^-(y_{j^*}) = 0$, 顶点 v_j 复合指标中第 1 复合项关于第 r 品种的子指标组保持不变, 否则 $\delta_r = \min\{c_{ij} - f_{ij}, s_{(r),i} - f^+(x_{i^*}), t_{(r),j} - f^-(y_{j^*}), \delta_r\}$, 此时将顶点 v_j 复合指标中第 1 复合项关于第 r 品种的子指标组修改为 $(l_{(r)}(v_j), x_i, +, \delta_r)$. 设第 m 个品种的 $l_{(m)}(v_j) = \min\{l_{(1)}(v_j), \dots, l_{(r)}(v_j), \dots, l_{(q)}(v_j)\}$, 令 $\delta = \{\delta_m, A - V_{\text{aff}}\}$, 将顶点 v_j 复合指标中的第 2 复合项修改为 (m, δ) .

(2) (x_i, v_j) 为后向边. ①若 $f_{ij} = 0$, 此时流量不能减少, 边 (x_i, v_j) 不能成为增流链的边, 那么最短路不能经过该边, 此时顶点 v_j 复合指标保持不变. ②若 $f_{ij} > 0$, 此时流量可以减少, 边 (x_i, v_j) 可以成为增流链的边, 最短路就可以经过该边. 复合指标的各个指标计算如下. 设 $l_{(r)}(v_j) = \min\{l_{(r)}(v_j), l_{(r)}(x_i) - W_{ijr}\}$, 如果 $l_{(r)}(v_j)$ 值来自第 1 项 $l_{(r)}(v_j)$, 那么顶点

v_j 复合指标中第 1 复合项关于第 r 品种的子指标组保持不变; 如果 $l_{(r)}(v_j)$ 值来自第 2 项 $l_{(r)}(x_i) - W_{ijr}$, 当 $v_j \in V$ 时, $\delta_r = \min\{f_{ij}, f_{ijr}, s_{(r),i} - f^+(x_{ir}), \delta_r\}$; 当 $v_j \in Y$ 时, 若 $s_{(r),i} - f^+(x_{ir}) = 0$ 或 $t_{(r),j} - f^-(y_{jr}) = 0$, 顶点 v_j 复合指标中第 1 复合项关于第 r 品种的子指标组保持不变, 否则 $\delta_r = \min\{f_{ij}, f_{ijr}, s_{(r),i} - f^+(x_{ir}), t_{(r),j} - f^-(y_{jr}), \delta_r\}$, 此时将顶点 v_j 复合指标中第 1 复合项关于第 r 品种的子指标组修改为 $(l_{(r)}(v_j), x_i, -, \delta_r)$. 设第 m 个品种的 $l_{(m)}(v_j) = \min\{l_{(1)}(v_j), \dots, l_{(r)}(v_j) \dots, l_{(q)}(v_j)\}$, 令 $\delta = \{\delta_m, A - V_{\text{alf}}\}$, 将顶点 v_j 复合指标中的第 2 复合项修改为 (m, δ) .

步骤 6: 针对顶点 v_j , 计算 $l_{(m)}(v_j)^* = \min\{l_{(m)}(v_j)\}$; 其中 $j=1, 2, \dots, n; v_j \notin S$. 将顶点 v_j 复合指标标上*, 表示顶点 v_j 已被检查, 设集合 $S = \{x_i, \dots, v_j\}$; $v_j \notin T$. 当 $v_j \in Y$ 时, 转步骤 9.

步骤 7: 从顶点 v_j 出发, 求其他顶点 v_k 的复合指标. 若顶点 v_j 与顶点 v_k 没有直接连线, 顶点 v_k 的复合指标保持不变; 若有直接连线, 则计算顶点 v_k 的复合指标值, 计算方法如下.

(1) (v_j, v_k) 为前向边. ①若 $f_{jk} = c_{jk}$, 此时流量不能增加, 边 (v_j, v_k) 不能成为增流链的边, 那么最短路径不能经过该边, 此时顶点 v_k 复合指标保持不变. ②若 $f_{jk} < c_{jk}$, 此时流量可以增加, 边 (v_j, v_k) 可以成为增流链的边, 最短路径就可以经过该边. 复合指标的各个指标计算如下. 设 $l_{(r)}(v_k) = \min\{l_{(r)}(v_k), l_{(r)}(v_j) + W_{jkr}\}$, 若 $l_{(r)}(v_k)$ 值来自第 1 项 $l_{(r)}(v_k)$, 那么顶点 v_k 复合指标中第 1 复合项关于第 r 品种的子指标组保持不变; 若 $l_{(r)}(v_k)$ 值来自第 2 项 $l_{(r)}(v_j) + W_{jkr}$, 当 $v_k \in V$ 时, $\delta_r = \min\{c_{jk} - f_{jk}, \delta_r\}$; 当 $v_j \in Y$ 时, 若 $t_{(r),j} - f^-(y_{jr}) = 0$, 顶点 v_j 复合指标中第 1 复合项关于第 r 品种的子指标组保持不变, 否则 $\delta_r = \min\{c_{ij} - f_{ij}, t_{(r),j} - f^-(y_{jr}), \delta_r\}$, 此时将顶点 v_j 复合指标中第 1 复合项关于第 r 品种的子指标组修改为 $(l_{(r)}(v_k), v_j, +, \delta_r)$. 设第 m 个品种的 $l_{(m)}(v_k) = \min\{l_{(1)}(v_k), \dots, l_{(r)}(v_k) \dots, l_{(q)}(v_k)\}$, 令 $\delta = \{\delta_m, A - V_{\text{alf}}\}$, 将顶点 v_j 复合指标第 2 复合项修改为 (m, δ) .

(2) (v_j, v_k) 为后向边. ①若 $f_{jk} = 0$, 此时流量不能减少, 边 (v_j, v_k) 不能成为增流链中的边, 那么最短路径不能经过该边, 此时顶点 v_k 复合指标保持不变. ②若 $f_{jk} > 0$, 此时流量可以减少, 边 (v_j, v_k) 可以成为增流链的边, 最短路径就可以经过该边. 复合指标的各个指标计算如下. 设 $l_{(r)}(v_k) = \min\{l_{(r)}(v_k),$

$l_{(r)}(v_j) - W_{jkr}\}$, 若 $l_{(r)}(v_k)$ 值来自第 1 项 $l_{(r)}(v_k)$, 那么顶点 v_k 复合指标中第 1 复合项关于第 r 品种的子指标组保持不变; 若 $l_{(r)}(v_k)$ 值来自第 2 项 $l_{(r)}(v_j) - W_{jkr}$, 当 $v_k \in V$ 时, $\delta_r = \min\{f_{jk}, f_{jkr}, \delta_r\}$; 当 $v_k \in Y$ 时, 若 $t_{(r),j} - f^-(y_{jr}) = 0$, 顶点 v_j 复合指标中第 1 复合项关于第 r 品种的子指标组保持不变, 否则 $\delta_r = \min\{f_{jk}, f_{jkr}, t_{(r),j} - f^-(y_{jr}), \delta_r\}$, 此时将顶点 v_k 复合指标中第 1 复合项关于第 r 品种的子指标组修改为 $(l_{(r)}(v_k), v_j, -, \delta_r)$. 设有第 m 个品种的 $l_{(m)}(v_k) = \min\{l_{(1)}(v_k), \dots, l_{(r)}(v_k) \dots, l_{(q)}(v_k)\}$, 令 $\delta = \{\delta_m, A - V_{\text{alf}}\}$, 将顶点 v_j 复合指标第 2 复合项修改为 (m, δ) .

步骤 8: 针对顶点 v_k , 计算 $l_{(m)}(v_k)^* = \min\{l_{(m)}(v_k)\}$, 其中 $j=1, 2, \dots, n; v_k \notin S$. 将顶点 v_k 复合指标标上*, 表示顶点 v_k 已被检查, 设集合 $S = \{x_i, \dots, v_k\}$; $v_k \notin T$. 当 $v_k \in Y$ 时, 转步骤 9.

步骤 9: 当 $y_i \in S$ 时, 说明已经找到了品种 m 的关于运费最短的增流链. 自汇 y_i 逆向追踪, 沿着每个顶点复合指标中第 1 复合项第 m 个子指标组的 v_i 即可得出关于品种 m 的最短路, 路长为 $l_{(m)}(y_i)$, 流量调整量为 δ . 将最短路中前向边 (v_i, v_j) 的复合参数修改为 $[c_{ij}, f_{ij} + \delta(f_{ij1}, \dots, f_{ijm} + \delta, \dots, f_{ijq})]$; 将最短路中后向边 (v_i, v_j) 的复合参数修改为 $[c_{ij}, f_{ij} - \delta(f_{ij1}, \dots, f_{ijm} - \delta, \dots, f_{ijq})]$.

步骤 10: 转到步骤 3, 反复进行, 直到找不到关于运费最低的增流链为止.

其中步骤 1~3 为初始化过程, 步骤 4~8 为寻找费用最低增流链的过程, 步骤 9~10 为流量调整过程. 此算法是基于构建的复合参数和复合指标在 Ford-Fulkerson 算法基础上对运费有差异的多品种流交通网络进行了最小费用流分配.

3 示例求解

最小费用最大流是最小费用流的一种情况, 即最小费用最大流的目标流是最大流的流值, 此时只需将本文算法中第 m 品种的流量调整量 $\delta = \{\delta_m, A - V_{\text{alf}}\}$ 的 $A - V_{\text{alf}}$ 去掉即可. 利用前面的引例进行多品种流的最小费用最大流分配以更清晰地说明本文算法. 由于图显示的局限, 在图中不标出费用 $(w_{ij1}, \dots, w_{ijr}, \dots, w_{ijq})$, 也不对顶点进行复合指标的标号; 另外因篇幅限制, 将相应的计算过程省略.

步骤 1: 设集合 $S = \emptyset$, 集合 $T = \{x_1, x_2, v_1, v_2, v_3, y_1, y_2, y_3\}$. 此时初始的流量 $f_{ij} (f_{ij1}, \dots, f_{ijr}, \dots,$

f_{ijq})均为 $0(0, \dots, 0, \dots, 0)$. 此问题涉及品种 I, II, III, 用 1, 2, 3 序号来标识. 对起点 x_i 均赋予复合指标 $[(0, 0, +, +\infty), (0, 0, +, +\infty), (0, 0, +, +\infty)]|(0, +\infty)$; 对其余各个顶点均赋予复合指标 $[(+\infty, 0, +, +\infty), (+\infty, 0, +, +\infty), (+\infty, 0,$

$+, +\infty)]|(0, +\infty)$. 图 2 为求解过程中流量调整以后的一种状态.

步骤 2: 对图 2 继续寻找关于运费最低的增流链. 表 2 为分别从源 x_1, x_2 出发的复合指标计算结果, 此计算过程省略.

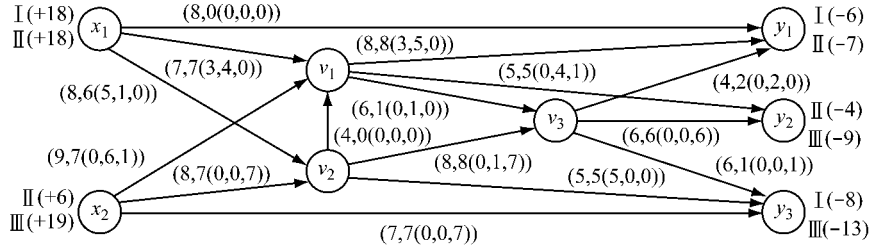


图 2 某一过程流量调整后的状态

Fig.2 The state after a flow adjustment

表 2 复合指标结果 1

Tab.2 Result 1 of composite indicators

顶点	复合指标
x_1	$[(0, 0, +, +\infty), (0, 0, +, +\infty), (+\infty, 0, +, +\infty)] (0, +\infty)^*$
x_2	$[(+\infty, 0, +, +\infty), (0, 0, +, +\infty), (0, 0, +, +\infty)] (0, +\infty)^*$
v_1	$[(+\infty, 0, 0, +\infty), (+\infty, 0, 0, +\infty), (9, x_2, +, 2)] (3, 2)$
v_2	$[(6, x_1, +, 2), (4, x_1, +, 2), (8, x_2, +, 1)] (2, 2)^*$
v_3	$[(+\infty, 0, 0, +\infty), (+\infty, 0, 0, +\infty), (+\infty, 0, 0, +\infty)] (0, +\infty)$
y_1	$[(23, x_1, +, 3), (+\infty, 0, 0, +\infty), (+\infty, 0, 0, +\infty)] (1, 3)$
y_2	$[(+\infty, 0, 0, +\infty), (+\infty, 0, 0, +\infty), (+\infty, 0, 0, +\infty)] (0, +\infty)$
y_3	$[(+\infty, 0, 0, +\infty), (+\infty, 0, 0, +\infty), (+\infty, 0, 0, +\infty)] (0, +\infty)$

针对表 2 取 $l_{(m)}(v_j)^* = \min\{l_{(m)}(v_j); v_j \notin S\} = \min\{9, 4, 23\} = 4 = l_{(2)}(v_2)^*$, 将表 2 中顶点 v_2 的指标标记*, 此时 $S = \{x_1, x_2, v_2\}$, 集合 $T = \{v_1, v_3, y_1, y_2, y_3\}$. 从顶点 v_2 出发, 继续求复合指标, 顶点 v_2 与顶点 v_1, v_3, y_3 有直接连线, 只需计算这 3 个顶点的复合指标即可, 其余顶点复合参数保持不变, 详细计算过程如下.

(1) (v_2, v_1) 为前向边, 此时 $f_{21} = 0 < c_{21} = 4$, 此边可以成为增流链中的边. ① 针对第 I 品种有 $l_{(1)}(v_1) = \min\{l_{(1)}(v_1), l_{(1)}(v_2) + W_{211}\} = \min\{+\infty, +\infty + 8\} = +\infty$, $l_{(1)}(v_1)$ 值来自第 1 项, 顶点 v_1 复合指标中关于第 I 品种的子指标组保持不变. ② 针对第 II 品种有 $l_{(2)}(v_1) = \min\{l_{(2)}(v_1), l_{(2)}(v_2) + W_{212}\} = \min\{+\infty, 4 + 7\} = 11$, $l_{(2)}(v_1)$ 值来自第 2 项, 关于第 II 品种流量调整量 $\delta_2 = \min\{c_{21} - f_{21},$

$\delta_2\} = \min\{4 - 0, +\infty\} = 4$, 此时将顶点 v_1 复合指标中关于第 II 品种的子指标组修改为 $(11, v_2, +, 4)$.

③ 针对第 III 品种有 $l_{(3)}(v_1) = \min\{l_{(3)}(v_1), l_{(3)}(v_2) + W_{213}\} = \min\{9, 8 + 7\} = 9$, $l_{(3)}(v_1)$ 值来自第 1 项, 顶点 v_1 复合指标中关于第 III 品种的子指标组保持不变.

(2) (v_2, v_3) 为前向边, 同时 $f_{23} = c_{23} = 8$, 说明流量不能增加, 即边 (v_2, v_3) 不能成为增流链中的边, 那么最短路也就不能经过该边, 此时顶点 v_3 的复合指标保持不变.

(3) (v_2, y_3) 为前向边, 同时 $f_{23} = c_{23} = 5$, 说明流量不能增加, 即边 (v_2, y_3) 不能成为增流链中的边, 那么最短路也就不能经过该边, 此时顶点 y_3 的复合指标保持不变.

修改后的复合指标如表 3 所示.

表 3 复合指标结果 2

Tab.3 Result 2 of composite indicators

顶点	复合指标
x_1	$[(0, 0, +, +\infty), (0, 0, +, +\infty), (+\infty, 0, +, +\infty)] (0, +\infty)^*$
x_2	$[(+\infty, 0, +, +\infty), (0, 0, +, +\infty), (0, 0, +, +\infty)] (0, +\infty)^*$
v_1	$[(+\infty, 0, 0, +\infty), (11, v_2, +, 4), (9, x_2, +, 2)] (3, 2)^*$
v_2	$[(6, x_1, +, 2), (4, x_1, +, 2), (8, x_2, +, 1)] (2, 2)^*$
v_3	$[(+\infty, 0, 0, +\infty), (+\infty, 0, 0, +\infty), (+\infty, 0, 0, +\infty)] (0, +\infty)$
y_1	$[(23, x_1, +, 3), (+\infty, 0, 0, +\infty), (+\infty, 0, 0, +\infty)] (1, 3)$
y_2	$[(+\infty, 0, 0, +\infty), (+\infty, 0, 0, +\infty), (+\infty, 0, 0, +\infty)] (0, +\infty)$
y_3	$[(+\infty, 0, 0, +\infty), (+\infty, 0, 0, +\infty), (+\infty, 0, 0, +\infty)] (0, +\infty)$

针对表 3 取 $l_{(m)}(v_j)^* = \min\{l_{(m)}(v_j); v_j \notin S\} = \min\{9, 23\} = 9 = l_{(3)}(v_1)^*$, 将表 3 中顶点 v_1 指标标记*. 此时 $S = \{x_1, x_2, v_2, v_1\}$, 集合 $T = \{v_3, y_1, y_2, y_3\}$. 从顶点 v_1 出发求复合指标, 顶点 v_1 与顶点 v_3, y_1, y_2 有直接连线, 只计算这 3 个顶点复合指标即可, 其余顶点复合参数保持不变, 计算过程省略. 复合指标如表 4 所示.

表 4 复合指标结果 3

Tab.4 Result 3 of composite indicators

顶点	复合指标
x_1	$[(0, 0, +, +\infty), (0, 0, +, +\infty), (+\infty, 0, +, +\infty)] (0, +\infty)^*$
x_2	$[(+\infty, 0, +, +\infty), (0, 0, +, +\infty), (0, 0, +, +\infty)] (0, +\infty)^*$
v_1	$[(+\infty, 0, 0, +\infty), (11, v_2, +, 4), (9, x_2, +, 2)] (3, 2)^*$
v_2	$[(6, x_1, +, 2), (4, x_1, +, 2), (8, x_2, +, 1)] (2, 2)^*$
v_3	$[(+\infty, 0, 0, +\infty), (16, v_1, +, 4), (17, v_1, +, 2)] (2, 4)^*$
y_1	$[(23, x_1, +, 3), (+\infty, 0, 0, +\infty), (+\infty, 0, 0, +\infty)] (1, 3)$
y_2	$[(+\infty, 0, 0, +\infty), (+\infty, 0, 0, +\infty), (+\infty, 0, 0, +\infty)] (0, +\infty)$
y_3	$[(+\infty, 0, 0, +\infty), (+\infty, 0, 0, +\infty), (+\infty, 0, 0, +\infty)] (0, +\infty)$

针对表 4 取 $l_{(m)}(v_j)^* = \min\{l_{(m)}(v_j); v_j \notin S\} = \min\{16, 23\} = 16 = l_{(2)}(v_3)^*$, 将表 4 中顶点 v_3 的指标标记*, 此时 $S = \{x_1, x_2, v_2, v_1, v_3\}$, 集合 $T = \{y_1, y_2, y_3\}$. 从顶点 v_3 出发, 继续求复合指标, 顶点 v_3 与顶点 y_1, y_2, y_3 有直接连线, 只需要计算这 3 个顶点的复合指标即可, 其余顶点复合参数保持不变, 详细计算过程如下:

(1) (v_3, y_1) 为前向边, 此时 $f_{31} = 2 < c_{31} = 4$, 此边可以成为增流链中的边. ① 针对第 I 品种有 $l_{(1)}(y_1) = \min\{l_{(1)}(y_1), l_{(1)}(v_3) + W_{311}\} = \min\{23, +\infty + 6\} = 23, l_{(1)}(y_1)$ 值来自第 1 项, 顶点 y_1 复合指标中关于第 I 品种的子指标组保持不变. ② 针对第 II 品种, 有 $t_{(r),j} - f^-(y_{jr}) = y_1^{(2)} - f^-(y_{12}) = 7 - (5 + 2) = 0$, 此时顶点 y_1 不再需要接收第 II 品种, 顶点 y_1 复合指标中关于第 II 品种的子指标组保持不变. ③ 顶点 y_1 本身不需要接收第 III 品种, 那么顶点 y_1 复合指标中关于第 III 品种的子指标组保持不变.

(2) (v_3, y_2) 为前向边, 此时 $f_{32} = c_{32} = 6$, 此时流量不能增加, 即边 (v_3, y_2) 不能成为增流链中的边, 那么最短路也就不能经过该边, 此时顶点 y_2 的复合指标保持不变.

(3) (v_3, y_3) 为前向边, 此时 $f_{33} = 1 < c_{33} = 6$, 此

边可以成为增流链中的边. ① 针对第 I 品种有 $l_{(1)}(y_3) = \min\{l_{(1)}(y_3), l_{(1)}(v_3) + W_{331}\} = \min\{+\infty, +\infty + 5\} = +\infty, l_{(1)}(y_3)$ 值来自第 1 项, 顶点 y_3 复合指标中关于第 I 品种的子指标组保持不变. ② 顶点 y_3 本身不需要接收第 II 品种, 那么顶点 y_3 复合指标中关于第 II 品种的子指标组保持不变. ③ 针对第 III 品种有 $l_{(3)}(y_3) = \min\{l_{(3)}(y_3), l_{(3)}(v_3) + W_{333}\} = \min\{+\infty, 17 + 6\} = 23, l_{(3)}(y_3)$ 值来自第 2 项, 又有 $t_{(r),j} - f^-(y_{jr}) = y_{(3),3} - f^-(y_{33}) = 13 - (7 + 1) = 5$, 那么关于第 III 品种流量调整量 $\delta_3 = \min\{c_{33} - f_{33}, y_{(3),3} - f^-(y_{33}), \delta_3\} = \min\{6 - 1, 5, 2\} = 2$. 此时将顶点 y_3 复合指标中关于第 III 品种的子指标组修改为 $(23, v_3, +, 2)$.

修改后的复合指标如表 5 所示.

表 5 复合指标结果 4

Tab.5 The results of composite indicators

顶点	复合指标
x_1	$[(0, 0, +, +\infty), (0, 0, +, +\infty), (+\infty, 0, +, +\infty)] (0, +\infty)^*$
x_2	$[(+\infty, 0, +, +\infty), (0, 0, +, +\infty), (0, 0, +, +\infty)] (0, +\infty)^*$
v_1	$[(+\infty, 0, 0, +\infty), (11, v_2, +, 4), (9, x_2, +, 2)] (3, 2)^*$
v_2	$[(6, x_1, +, 2), (4, x_1, +, 2), (8, x_2, +, 1)] (2, 2)^*$
v_3	$[(+\infty, 0, 0, +\infty), (16, v_1, +, 4), (17, v_1, +, 2)] (2, 4)^*$
y_1	$[(23, x_1, +, 3), (+\infty, 0, 0, +\infty), (+\infty, 0, 0, +\infty)] (1, 3)^*$
y_2	$[(+\infty, 0, 0, +\infty), (+\infty, 0, 0, +\infty), (+\infty, 0, 0, +\infty)] (0, +\infty)$
y_3	$[(+\infty, 0, 0, +\infty), (+\infty, 0, 0, +\infty), (23, v_3, +, 2)] (3, 2)^*$

针对表 5 取 $l_{(m)}(v_j)^* = \min\{l_{(m)}(v_j); v_j \notin S\} = \min\{23, 23\} = 23 = l_{(1)}(y_1)^* = l_{(3)}(y_3)^*$. 将表 5 中顶点 y_1, y_3 的指标标记*, 此时 $S = \{x_1, x_2, v_1, v_2, v_3, y_1, y_3\}$, 集合 $T = \{y_2\}$. 出现 $y_1 \subseteq S, y_3 \subseteq S$ 情况, 说明已经找到关于品种 I 和品种 III 的运费最低的 2 条增流链.

自汇 y_1 沿着每个顶点复合指标中第 1 复合项的第 1 个子指标组逆向追踪, 可得出关于品种 I 的最短路为 $x_1 \rightarrow y_1$, 路长为 23, 流量调整量为 3.

自汇 y_3 沿着每个顶点复合指标的第 1 复合项中第 3 个子指标组逆向追踪, 可得出关于品种 III 最短路为 $x_2 \rightarrow v_1 \rightarrow v_3 \rightarrow y_3$, 路长为 23, 流量调整量为 2.

最终流量分配结果如图 3 所示.

步骤 3: 针对图 3 继续寻找关于运费最低的增流链, 余下过程省略, 最终的最小费用最大流分配结果

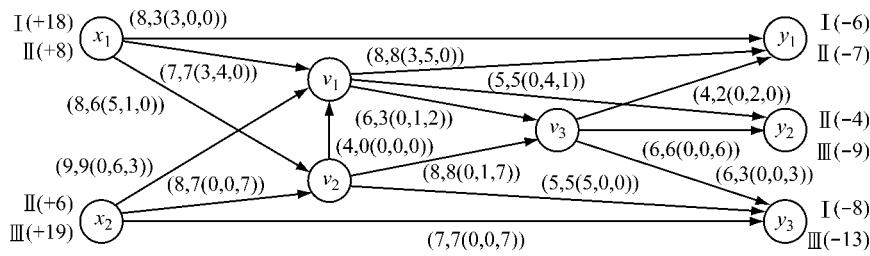


图 3 图 2 流量调整后的状态
Fig. 3 The state after flow adjustment in Fig. 2

如图 4 所示.

针对图 4, 从源 x_1, x_2 出发的边中只有边 (x_1, y_1) 为不饱和边, 但汇 y_1 需要的 I, II 品种已经得到全部满足, 所以没有办法再找到增流链. 由图 4 可以知道该引例中各个品种的具体运送方案, 把该引例的总体方案、各个品种的具体方案列于表 6, 发送和接收的总量都为 42, 则 3 个品种的费用 W_I, W_{II} ,

W_{III} 分别为: $W_I = 23 \times 3 + 3 \times 3 + 6 \times 7 + 9 \times 3 + 4 \times 2 + 8 \times 2 + 7 \times 5 + 5 \times 2 = 216$, $W_{II} = 8 \times 4 + 4 \times 1 + 6 \times 6 + 8 \times 5 + 6 \times 4 + 5 \times 1 + 8 \times 1 + 4 \times 2 = 157$, $W_{III} = 9 \times 3 + 8 \times 8 + 16 \times 7 + 5 \times 1 + 8 \times 3 + 8 \times 1 + 6 \times 7 + 5 \times 6 + 6 \times 4 = 336$. 总费用 $W = W_I + W_{II} + W_{III} = 216 + 157 + 336 = 709$.

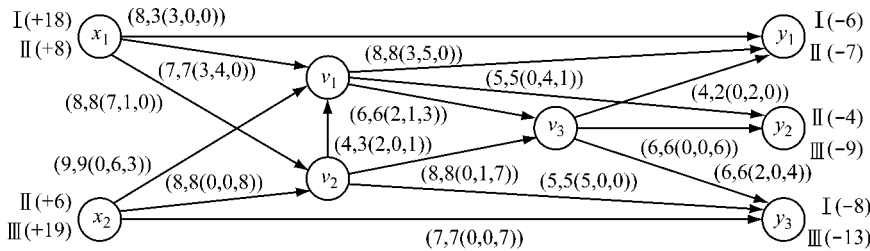


图 4 多品种流的最小费用最大流最终分布状态
Fig. 4 Minimum cost of the maximum flow distribution of multi-commodity flow

表 6 最小费用最大流具体分配方案

Tab. 6 Specific allocation scheme for the minimum cost of the maximum flow

位置		品种			源发出量	汇接收量
		I	II	III		
发送点	x_1	13	5	0	18	
	x_2	0	6	18	24	
接收点	y_1	6	7	0		13
	y_2	0	4	7		11
	y_3	7	0	11		18

4 结语

在连续最短路算法和 Ford-Fulkerson 算法基础上, 通过构建复合指标建立了运费有差异的多品种流最小费用流分配方法, 另外, 通过设计的复合参数也标定了多品种流的流量分配状态. 本文构造的基于复合参数和复合指标的多品种流最小费用流算法避免了传统算法需要改变网络图结构的不足, 在算法实现上也体现了便利. 在交通运输领域, 运费有差异的多品种流分配问题普遍存在, 但针对此类问题

的研究文献很少, 本文算法也为解决交通网络的一系列相关实际问题提供了参考.

参考文献:

[1] 寇玮华. 运筹学[M]. 成都: 西南交通大学出版社, 2013.
KOU Weihua. Operational research[M]. Chengdu: Southwest Jiaotong University Press, 2013.

[2] 寇玮华, 崔皓莹. 有运送路径限制的多品种流交通网络最小费用流算法研究[J]. 兰州交通大学学报, 2013, 32(6): 1.
KOU Weihua, CUI Haoying. An algorithm for the minimum cost flow which has limited transmission-path in multi-species flow traffic network [J]. Journal of Transportation Engineering and Information, 2013, 32(6): 1.

[3] 寇玮华, 崔皓莹. 满足交通网络流量增长态势的扩能优化研究[J]. 交通运输工程与信息学报, 2012, 10(4): 19.
KOU Weihua, CUI Haoying. Optimizing study on enlarging the capacity of traffic network to meet the need of the increscent flow [J]. Journal of Transportation Engineering and Information, 2012, 10(4): 19.

[4] 寇玮华, 董雪, 吕林剑. 交通运输网络中两个结点间有流量约束的最小费用最大流算法[J]. 兰州交通大学学报, 2009, 28(6): 104.