第 42 卷第 12 期
2014 年 12 月

同 济 大 学 学 报(自 然 科 学 版)
JOURNAL OF TONGJI UNIVERSITY(NATURAL SCIENCE)

Vol. 42 No. 12
Dec. 2014

文章编号: 0253-374X(2014)12-1924-04

DOI:10.11908/j.issn.0253-374x.2014.12.022

加权 Bergman 空间的若干逼近定理

吴菊杰, 陈伯勇
(同济大学 数学系,上海 200092)

摘要: 设 $H^2(\Omega,\varphi)$为区域 Ω 上相对于权 φ 的 Bergman 空间. 给出若 Ω 为有限个 Carathéodory 区域之交且 φ 在 $\bar{\Omega}$ 次调和, 那么 $\bar{\Omega}$ 上的全纯函数在 $H^2(\Omega,\varphi)$ 中稠密, 证明了当 $\Omega=\mathbf{C}^n$ 且 φ 是近似圆形时, 多项式在 $H^2(\Omega,\varphi)$ 中稠密.

关键词: Bergman 空间; Carathéodory 区域; 加权 L^2 逼近; 近似圆形

中图分类号: O174.51, O174.56　　**文献标志码**: A

Some Approximation Theorems of Weighted Bergman Space

WU Jujie, CHEN Boyong
(Department of Mathematics, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: Let $H^2(\Omega,\varphi)$ be the Bergman space with respect to φ on the domain Ω. It is proved that holomorphic functions on $\bar{\Omega}$ are dense in $H^2(\Omega,\varphi)$ when Ω is the intersection of a finite number of Carathéodory domains and φ is a subharmonic function on $\bar{\Omega}$. If $\Omega=\mathbf{C}^n$ and φ is approximately circular polynomials are dense in $H^2(\Omega,\varphi)$.

Key words: Bergman space; Carathéodory domain; weighted L^2 approximation; approximately circular

设 $\Omega\subset\mathbf{C}^n$ 是一个区域,令

$$H^2(\Omega)=\{f\in\mathcal{O}(\Omega):\int_\Omega|f|^2\mathrm{d}\lambda<\infty\}$$

其中 $\mathrm{d}\lambda$ 表示 Lebesgue 测度. 当 $n=1$ 时, 全纯函数被多项式按 L^2 范数逼近已有大量研究和应用[1-4]. 关于多项式完备性问题, Carleman[1]最早在 1922 年的论文中证明了如果 Ω 是复平面上一 Jordan 区域, 则 $H^2(\Omega)$ 中函数可以由多项式以 L^2 范数逼近. 此后, 这一结果被 Farrel[5] 和 Markuševič 推广到了 Carathéodory 区域的情形. 众所周知, 这一特性对一般非 Carathéodory 区域情形是不成立的. 1968 年, Hörmander 和 Wermer[6] 证明了 $\mathbf{C}^n$ 中全实子流形上的连接函数可以被它的一个邻域上的全纯函数局部一致逼近, 把著名的 Weierstrass 逼近定理推广至高维. 加权 Bergman 空间的全纯函数逼近受著名的 Bernstein 问题的影响, 现定义加权的 Bergman 空间如下:

$$H^2(\Omega,\varphi)=\{f\in\mathcal{O}(\Omega):\int_\Omega|f|^2\mathrm{e}^{-\varphi}\mathrm{d}\lambda<\infty\}$$

Hedberg[3] 证明了当 Ω 是 Carathéodory 区域, 且权函数满足某种相对复杂的条件时多项式在 $H^2(\Omega,\varphi)$ 中完备. 20 世纪 70 年代, B A Taylor 和 N Sibony 对 $\mathbf{C}^n$ 中加权全纯函数逼近问题进行了研究. 基于 Hörmander 关于 $\bar{\partial}$ 算子的 L^2 技巧, Taylor[7] 证明了当权函数 φ 是凸函数时, 多项式在 $H^2(\mathbf{C}^n,\varphi)$ 中稠密. 之后 Sibony[8] 和 Wohlgelernter[9] 极大地推广了 Taylor 的一些结果. 特别地, Sibony 证明了, 如果权函数 φ 是 ρ 次齐次的多次调和函数时, 多项式在 $H^2(\mathbf{C}^n,\varphi)$ 中稠密.

1　研究内容

定理 1　设 $\Omega=\bigcap_{\nu=0}^{N}G_\nu$ 是 $\mathbf{C}$ 上的一有界区域, 其中 G_0 是有界 Carathéodory 区域, G_ν, $1\leqslant\nu\leqslant N$ 是无界 Carathéodory 区域. 如果 φ 是 $\bar{\Omega}$ 的某个邻域内的次调和函数, 则 $\mathcal{O}(\bar{\Omega})$ 在 $H^2(\Omega,\varphi)$ 中稠密.

证明采用的主要方法是 Donnelly-Fefferman 关于 $\bar{\partial}$-算子的 L^2 估计. 与已有的成果相比, 本文主要突破是权函数允许有奇性, 这使得逼近定理在全纯函数的构造中非常奏效. 同时此类逼近定理在 Ohsawa-Takegoshi 延拓定理的推广等一些重要问题的研究中也能找到应用. 特别地, 有

收稿日期: 2013-10-24
基金项目: 国家自然科学基金(11031008)
第一作者: 吴菊杰(1986—), 女, 理学博士, 主要研究方向为多复变函数论. E-mail: 99jujiewu@tongji.edu.cn

推论 1　设 Ω 为有界 Carathéodory 区域，φ 是 $\overline{\Omega}$ 的某个邻域内的次调和函数，若 $1\in H^2(\Omega,\varphi)$，则多项式在 $H^2(\Omega,\varphi)$ 中稠密.

定义 1　设 φ 是定义在 $\mathbf{C}^n$ 上的函数，令 $\Phi(z)=\inf\limits_{\theta}\varphi(ze^{i\theta})$，称函数 φ 是近似圆形的，若存在常数 C_1，$C_2>0$ 使得以下两条成立：

(1) 存在 $\mathbf{C}^n$ 中的全纯自同构 $\Gamma=\{\gamma_j\}_j$，满足 $|J\gamma_j|\leqslant C_1$ 对所有 $j\geqslant 1$，并且 $\gamma_j\to \mathrm{id}$ 当 $j\to\infty$，其中 $J\gamma_j$ 代表变换 γ_j 的雅格比行列式.

(2) $\Phi\circ\gamma_j(z)\geqslant -C_2+\varphi(z)$ 对所有 $j\geqslant 1$.

由定义知，$\Phi(z)=\Phi(ze^{i\theta})$，即 $\Phi(z)$ 是圆形的. 本文的第二个结果是：

定理 2　设 φ 是 $\mathbf{C}^n$ 上近似圆形的上半连续函数，则多项式在 $H^2(\mathbf{C}^n,\varphi)$ 中稠密.

2　预备知识

区域 Ω 称为 Carathéodory 区域，若 Ω 是有界单连通的，且 Ω 的边界与 $\mathbf{C}\backslash\overline{\Omega}$ 的无界连通分支的边界相等. 一个无界区域 Ω 称为是 Carathéodory 的，若经过共形映照 $z\mapsto(z-z^0)^{-1}$（z^0 是 $\mathbf{C}\backslash\overline{\Omega}$ 中固定点）使之成为 Carathéodory 区域.

下述有关共形映照的经典定理在证明中起关键作用. 第一个是 Carathéodory 收敛定理.

定理 3[10]　设 $\{\Omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是 $\mathbf{C}$ 中一列一致有界的单连通区域，Ω 是有界单连通区域，且 $\rho(\partial\Omega_n,\partial\Omega)\to 0$ 当 $n\to\infty$ 时，其中 ρ 表示 Hausdorff 距离[11]. 设原点 $z=0$ 在 Ω_n 内部，$(n=1,2,\cdots)$，并设函数 $w=f_n(z)$ 把区域 Ω_n 映为圆周 $\gamma:|w|=1$ 的内部，使得 $f_n(0)=0,f'_n(0)>0$，则有
$$\lim_{n\to\infty}f_n(z)=f(z)$$
在 Ω 内局部一致的成立，且映射 $w=f(z)$ 把区域 Ω 映为圆周 $\gamma:|w|=1$ 的内部.

下一个结果是 Lindelöf 于 1915 年建立的.

定理 4[12]　设 Ω 是复平面上包含原点的有界单连通区域，设 Δ 是区域 Ω 的最大直径，δ 是原点到 Ω 的边界的距离. 假设共形映照 f 把 Ω 映到圆周 γ：$|w|=1$ 的内部，使得两个平面上的原点相互对应，则 Ω 上每个到 Ω 边界的距离小于 $r(<\delta)$ 的点的对应点 $w=f(z)$ 到边界 γ 的距离 $1-|f(z)|$ 小于
$$\delta(r)=\frac{2\log\Delta-2\log\delta}{2\log\Delta-\log(\delta r)}$$

3　定理 1 的证明

对于平面区域 Ω，令 $SH^-(\Omega)$ 表示 Ω 上负的次调和函数全体.

引理 1　设 Ω 是有界 Carathéodory 区域，则存在 Jordan 区域 $\{\Omega_n\}_n$ 满足 $\overline{\Omega}\subset\Omega_n$，一列正数 $\varepsilon_n\to 0(n\to\infty)$，以及一列连续函数 $\rho_n\in SH^-(\Omega_n)$ 使得

(1) $\Omega_{n,-\varepsilon_n}:=\{z\in\Omega_n:\rho_n(z)<-\varepsilon_n\}\subset\Omega$.

(2) 当 $n\to\infty$ 时，$\Omega\backslash\Omega_{n,-2\varepsilon_n}$ 的体积趋向于 0.

证明　因为 Ω 是一个 Carathéodory 区域，因此存在一列 Jordan 区域序列 $\{\Omega_n\}_n$ 满足 $\overline{\Omega}\subset\Omega_n$ 及 $\overline{\Omega}_{n+1}\subset\Omega_n$，$(n=1,2,\cdots)$ 且 $\rho(\partial\Omega_n,\partial\Omega)\to 0$ 当 $n\to\infty$ 时[13]. 不失一般性，不妨假设 $0\in\Omega$. 根据 Riemann 映照定理，存在共形映照 $w=f_n(z)$，$f_n(0)=0$，$f'_n(0)>0$ 和 $w=f(z)$，$f(0)=0$，$f'(0)>0$. 分别把区域 Ω_n 及 Ω 映为圆周 $\gamma:|w|=1$ 的内部. 则根据定理 3，$h_n(z):=f^{-1}(f_n(z))$. 把 Ω_n 共形映照到 Ω 上使得 $h_n(z)\to z$，$h'_n(z)\to 1$，$n\to\infty$，在 Ω 内任一紧集 K 上一致地成立（文献[14]）. 置 $\rho(z)=|f(z)|-1$，$\rho_n(z)=|f_n(z)|-1$，显然，ρ（相应地，ρ_n）是 Ω（相应地，Ω_n）上负的连续次调和函数. 令
$$\varepsilon_n:=\max\{1-|f_n(z)|:z\in\overline{\Omega}_n\backslash\Omega\}\tag{1}$$
又设 Δ_n（相应地，Δ_0）是 Ω_n（相应地，Ω）的直径，$\delta_n=\delta_{\Omega_n}(0)$，$\delta_0=\delta_\Omega(0)$. 不失一般性不妨假设 $\Delta_0>\delta_1$. 根据定理 4，有
$$\varepsilon_n\leqslant\max\left\{\frac{2\log\Delta_n-2\log\delta_n}{2\log\Delta_n-\log(\delta_n\delta_{\Omega_n}(z))}:z\in\overline{\Omega}_n\backslash\Omega\right\}\leqslant$$
$$\max\left\{\frac{2\log\Delta_1-2\log\delta_0}{2\log\Delta_0-\log(\delta_1\delta_{\Omega_n}(z))}:z\in\overline{\Omega}_n\backslash\Omega\right\}\to 0(n\to\infty).$$

由式(1)知 $\Omega_{n,-\varepsilon_n}\subset\Omega$. 另一方面，对于 Ω 上任一紧集 K，$\Omega\backslash\Omega_{n,-2\varepsilon_n}\subset(\Omega\backslash K)\cup\{z\in K:1-2\varepsilon_n<|f_n(z)|<1\}$.

因为 $f_n\to f$ 在紧集 K 上一致地成立，$\sup\limits_K|f|<1$，以及 K 的任意性，因此有当 $n\to\infty$ 时，$\Omega\backslash\Omega_{n,-2\varepsilon_n}$ 的体积趋向于 0.

现在来证明定理 1. 根据引理 1，对于每个 $0\leqslant\nu\leqslant N$，存在 Jordan 区域序列 $\{G_n^\nu\}_n$ 满足 $\overline{G}_\nu\subset G_n^\nu(n=1,2,\cdots)$，一列正数 $\varepsilon_n^\nu\to 0(n\to\infty)$，以及一列连续函数 $\rho_n^\nu\in SH^-(G_n^\nu)$ 使得

(1) $G^\nu_{n,-\varepsilon_n^\nu}:=\{z\in G_n^\nu:\rho_n^\nu(z)<-\varepsilon_n^\nu\}\subset G_\nu$.

(2) 当 $n\to\infty$ 时，$G_\nu\backslash G^\nu_{n,-2\varepsilon_n^\nu}$ 的体积趋向于 0.

置 $\rho_n(z)=\max\limits_{0\leqslant\nu\leqslant N}\{\rho_n^\nu(z)\}$，$\varepsilon_n=\max\limits_{0\leqslant\nu\leqslant N}\{\varepsilon_n^\nu\}$，$\Omega_n=\bigcap\limits_{\nu=0}^{N}G_n^\nu$. 易知 $\overline{\Omega}\subset\Omega_n$，$\rho_n\in SH^-(\Omega_n)\cap C(\Omega_n)$ 并且

(3) $\Omega_{n,-\varepsilon_n}:=\{z\in\Omega_n:\rho_n(z)<-\varepsilon_n\}\subset\Omega$.

(4) 当 $n\to\infty$ 时，$\Omega\backslash\Omega_{n,-2\varepsilon_n}$ 的体积趋向于 0.

以下的证明与文献[15]类似. 固定某个 n. 不失一般性,可假设 φ 在 Ω_n 上有定义. 选取 Ω_n 上一列负的 C^∞ 次调和函数 $\{\rho_{n,s}\}$,使得当 $s\downarrow 0$ 时 $\rho_{n,s}\downarrow\rho_n$ 在 $\overline{\Omega}_{n+1}$ 上一致地成立. 令 $\psi_n^s=-\log(-\rho_{n,s})$. 直接计算得

$$\mathrm{i}\partial\overline{\partial}\psi_n^s\geqslant \mathrm{i}\partial\psi_n^s\wedge\overline{\partial}\psi_n^s \tag{2}$$

现选取一光滑函数 $\chi:\mathbf{R}\to[0,1]$ 使得 $\chi|_{(-\infty,1-\log 3/2)}=1$, $\chi|_{(1,\infty)}=0$. 置 $\eta_n^s=\chi(\psi_n^s+\log\varepsilon_n+1)$. 则 $\mathrm{supp}\,\eta_n^s\subset\{z\in\Omega_{n+1}\mid\rho_{n,s}(z)<-\varepsilon_n\}\subset\Omega_{n,-\varepsilon_n}\subset\Omega$. 由式(2)可得 $|\overline{\partial}\eta_n^s|^2_{\mathrm{i}\partial\overline{\partial}\psi_n^s}\leqslant\sup|\chi'|^2$. 这里 $|\cdot|_{\mathrm{i}\partial\overline{\partial}\psi_n^s}$ 表示相对于度量 $\mathrm{i}\partial\overline{\partial}\psi_n^s$ 的点范数.

对任一 $f\in H^2(\Omega,\varphi)$,定义 $v_n^s:=f\overline{\partial}\eta_n^s$,则 v_n^s 是定义在 Ω_{n+1} 上的 $\mathbf{C}^\infty\overline{\partial}$-闭(0,1)形式且对所有足够小的 s 有

$$\int_{\Omega_{n+1}}\mathrm{e}^{-\varphi}|f|^2|\overline{\partial}\eta_n^s|^2_{\mathrm{i}\partial\overline{\partial}\psi_n^s}\mathrm{d}\lambda\leqslant\sup|\chi'|^2\cdot\int_{\{z\in\Omega_{n+1}:-\frac{3}{2}\varepsilon_n\leqslant\rho_{n,s}(z)<-\varepsilon_n\}}\mathrm{e}^{-\varphi}|f|^2\mathrm{d}\lambda\leqslant\sup|\chi'|^2\int_{\Omega\backslash\Omega_{n,-2\varepsilon_n}}|f|^2\mathrm{e}^{-\varphi}\mathrm{d}\lambda \tag{3}$$

根据 Donnelly-Fefferman 的 L^2 估计[16-18],以及式(3),在 Ω_{n+1} 上存在(0,0)形式 u_n^s 使得 $\overline{\partial}u_n^s=v_n^s$ 以及 $\int_{\Omega_{n+1}}|u_n^s|^2\mathrm{e}^{-\varphi}\mathrm{d}\lambda\leqslant C\sup|\chi'|^2\int_{\Omega\backslash\Omega_{n,-2\varepsilon_n}}|f|^2\mathrm{e}^{-\varphi}\mathrm{d}\lambda$, 令 $f_n^s=f\eta_n^s-u_n^s$. 显然 $f_n^s\in\mathcal{O}(\Omega_{n+1})$ 并且

$$\int_\Omega|f_n^s-f|^2\mathrm{e}^{-\varphi}\mathrm{d}\lambda\leqslant C\int_{\Omega\backslash\Omega_{n,-2\varepsilon_n}}|f|^2\mathrm{e}^{-\varphi}\mathrm{d}\lambda$$

$$\int_{\Omega_{n+1}}|f_n^s|^2\mathrm{e}^{-\varphi}\mathrm{d}\lambda\leqslant 2\int_\Omega|f|^2\mathrm{d}^{-\varphi}\mathrm{d}\lambda+C\int_{\Omega\backslash\Omega_{n,-2\varepsilon_n}}|f|^2\mathrm{e}^{-\varphi}\mathrm{d}\lambda$$

对每个 n,取函数列 $\{f_n^s\}_{s>0}$ 的弱极限即得 $\overline{\Omega}$ 的某邻域上的全纯函数. 定理证毕.

证明推论 1 设已给 $f\in H^2(\Omega,\varphi)$. 一方面,由定理 1 可得,对任一正数 $\varepsilon>0$,存在 $f_n\in\mathcal{O}(\overline{\Omega})$,不妨设 $f_n\in\mathcal{O}(\Omega_1)$,其中 $\overline{\Omega}\subset\Omega_1$, Ω_1 是 Jordan 区域,使得

$$\int_\Omega|f_n(z)-f(z)|^2\mathrm{e}^{-\varphi(z)}\mathrm{d}\lambda(z)<\frac{\varepsilon}{4}(n\to\infty)$$

另一方面,由 $1\in H^2(\Omega,\varphi)$,则存在 $M>0$,使得 $\int_\Omega\mathrm{e}^{-\varphi}\mathrm{d}\lambda<M$. 在 Ω_1 上利用 Runge 逼近定理,对上述 $\varepsilon>0$,存在多项式 $P_n(z)$,使得 $\sup\limits_{\overline{\Omega}}|P_n(z)-f_n(z)|<\frac{\sqrt{\varepsilon}}{2n\sqrt{M}}$ 成立,于是当 n 充分大时有

$$\int_\Omega|P_n(z)-f(z)|^2\mathrm{e}^{-\varphi(z)}\mathrm{d}\lambda(z)\leqslant 2\int_\Omega|P_n(z)-f_n(z)|^2\mathrm{e}^{-\varphi(z)}\mathrm{d}\lambda(z)+2\int_\Omega|f_n(z)-f(z)|^2\mathrm{e}^{-\varphi(z)}\mathrm{d}\lambda(z)\leqslant 2\sup_{\overline{\Omega}}|P_n(z)-f_n(z)|^2\int_\Omega\mathrm{e}^{-\varphi(z)}\mathrm{d}\lambda(z)+2\int_\Omega|f_n(z)-f(z)|^2\mathrm{e}^{-\varphi(z)}\mathrm{d}\lambda(z)\leqslant\varepsilon$$

推论 1 证明完毕.

4 定理 2 的证明

为了证明定理 2,需要下述引理.

引理 2 假设 φ 是 $\mathbf{C}^n$ 中满足 $\varphi(z)=\varphi(z\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$ 的上半连续函数,则多项式在 $H^2(\mathbf{C}^n,\varphi)$ 中稠密.

证明 对于任一 $f\in H^2(\mathbf{C}^n,\varphi)$ 可展开幂级数为

$$f(z)=\sum_{\alpha=0}^{\infty}a_\alpha z^\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{|\alpha|=n}^{\infty}a_\alpha z^\alpha:=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(z)$$

其中 $P_n(z)$ 是 n 次齐次多项式. 当 $n\neq m$ 时, $P_m(z)$ 与 $P_n(z)$ 是 $H^2(B(0,R),\varphi)$ 中的正交多项式. 其中 $B(0,R)$ 表示以 0 为心,以 R 为半径的 Euclidean 球. 事实上,对于每个 $\theta\in[0,2\pi)$,有

$$\int_{\mathbf{C}^n}P_n(z)\overline{P_m(z)}\mathrm{e}^{-\varphi(z)}\mathrm{d}\lambda(z)=\int_{\mathbf{C}^n}P_n(w\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\overline{P_m(w\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}\mathrm{e}^{-\varphi(w\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}\mathrm{d}\lambda(w)=\int_{\mathbf{C}^n}P_n(w)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\overline{P_m(w)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\theta}\mathrm{e}^{-\varphi(w)}\mathrm{d}\lambda(w)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-m)\theta}\int_{\mathbf{C}^n}P_n(w)\overline{P_m(w)}\mathrm{e}^{-\varphi(w)}\mathrm{d}\lambda(w)$$

所以 $\int_{B(0,R)}P_n(z)\overline{P_m(z)}\mathrm{e}^{-\varphi(z)}\mathrm{d}\lambda(z)=0$. 因此

$$\|f\|^2_{R,\varphi}=\int_{B(0,R)}|f|^2\mathrm{e}^{-\varphi}\mathrm{d}\lambda=\left\|\sum_{n=0}^{\infty}P_n(z)\right\|^2_{R,\varphi}=\sum_{n=0}^{\infty}\|P_n(z)\|^2_{R,\varphi} \tag{4}$$

注意式(4)的左端以 $\|f\|^2_\varphi$ 为上界,所以根据 Lebesgue 单调收敛定理得 $\lim\limits_{R\to\infty}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\|P_n(z)\|^2_{R,\varphi}=\lim\limits_{R\to\infty}\|f\|^2_{R,\varphi}=\|f\|^2_\varphi<\infty$,因此对任意正数 $\varepsilon>0$,存在 $N>0$,使得 $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}\|P_n(z)\|^2_\varphi<\varepsilon$. 记 $\widetilde{P}_N(z)=\sum\limits_{n=0}^{N}P_n(z)$,则 $\|f-\widetilde{P}_N(z)\|^2_\varphi=\left\|\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}P_n(z)\right\|^2_\varphi=\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}\|P_n(z)\|^2_\varphi<\varepsilon$. 证毕.

下面证明研究内容中的定理 2.

证明 想法来源于 Wohlgelernter[9]. 设 $H=H^2(\mathbf{C}^n,\varphi)=$

$$\left\{f\in\mathcal{O}(\mathbf{C}^n):\int_{\mathbf{C}^n}|f|^2e^{-\varphi}d\lambda<\infty\right\}$$

$$H'=\left\{f\in\mathcal{O}(\mathbf{C}^n):\int_{\mathbf{C}^n}|f|^2e^{-\Phi}d\lambda<\infty\right\}$$

$$G=\{f\circ\gamma_j^{-1}:\gamma_j\in\Gamma,f\in H\}$$

由定理假设，φ 是近似圆形的，于是 G 是 H 的一个子集. 为证明此定理只需证明 $G\subset H'$ 且 G 在 H 中稠密即可. 现对任一 $f\circ\gamma_j^{-1}\in G$，有

$$\int_{\mathbf{C}^n}|f\circ\gamma_j^{-1}(z)|^2e^{-\Phi(z)}d\lambda(z)=$$
$$\int_{\mathbf{C}^n}|f(\xi)|^2e^{-\Phi\circ\gamma_j(\xi)}|J\gamma_j|^2d\lambda(\xi)\leqslant$$
$$C_1^2e^{C_2}\int_{\mathbf{C}^n}|f(\xi)|^2e^{-\varphi(\xi)}d\lambda(\xi)<\infty$$

即 $G\subset H'$. 现在对 $f\in H,j\geqslant1$，

$$\|f\circ\gamma_j^{-1}\|_H^2=\int_{\mathbf{C}^n}|f\circ\gamma_j^{-1}(z)|^2e^{-\varphi(z)}d\lambda(z)=$$
$$\int_{\mathbf{C}^n}|f(\xi)|^2e^{-\varphi\circ\gamma_j(\xi)}|J\gamma_j|^2d\lambda(\xi)\leqslant$$
$$C_1^2\int_{\mathbf{C}^n}|f(\xi)|^2e^{-\Phi\circ\gamma_j(\xi)}d\lambda(\xi)\leqslant$$
$$C_1^2e^{C_2}\int_{\mathbf{C}^n}|f(\xi)|^2e^{-\varphi(\xi)}d\lambda(\xi)=$$
$$C_1^2e^{C_2}\|f(z)\|_H^2$$

由控制收敛定理得

$$\|f\circ\gamma_j^{-1}\|_H^2\to\|f\|_H^2(j\to\infty)$$

又因为对每个 z 有 $f\circ\gamma_j^{-1}(z)\to f(z)(j\to\infty)$，则对任一正数 $\varepsilon>0$，当 j 充分大时有

$$\|f\circ\gamma_j^{-1}(z)-f(z)\|_H^2=\int_{\mathbf{C}^n}|f\circ\gamma_j^{-1}(z)-f(z)|^2e^{-\varphi(z)}d\lambda(z)<\frac{\varepsilon}{4}$$

即 G 在 H 中稠密[19].

由 $\Phi(z)=\Phi(ze^{i\theta})$，根据引理 2，$G$ 中任一全纯函数均可由 H' 中多项式以 H' 的范数逼近. 对于任一 $j>0$，及上述 $\varepsilon>0$，相应地存在 H' 中多项式 $P(z)$ 使得

$$\int_{\mathbf{C}^n}|P(z)-f\circ\gamma_j^{-1}(z)|^2e^{-\Phi(z)}d\lambda(z)<\frac{\varepsilon}{4}$$

因此，当 j 充分大时，

$$\int_{\mathbf{C}^n}|P(z)-f(z)|^2e^{-\varphi(z)}d\lambda(z)\leqslant2\int_{\mathbf{C}^n}|P(z)-f\circ\gamma_j^{-1}(z)|^2e^{-\varphi(z)}d\lambda(z)+$$
$$2\int_{\mathbf{C}^n}|f\circ\gamma_j^{-1}(z)-f(z)|^2e^{-\varphi(z)}d\lambda(z)\leqslant$$
$$2\int_{\mathbf{C}^n}|P(z)-f\circ\gamma_j^{-1}(z)|^2e^{-\Phi(z)}d\lambda(z)+$$
$$2\int_{\mathbf{C}^n}|f\circ\gamma_j^{-1}(z)-f(z)|^2e^{-\varphi(z)}d\lambda(z)\leqslant\varepsilon$$

定理证毕.

参考文献：

[1] Carleman T. Über die approximation analytischer funktionen durch lineare aggregate von vorgegebenen potenzen[M]. Stockholm：Almqvist & Wiksell，1923.

[2] Bers L. An approximation theorem [J]. d' Analyse Mathématique，1965，14：1.

[3] Hedberg L I. Weighted mean square approximation in plane regions and generators of an algebra of analytic functions[J]. Arkiv för Matematik，1965，5(6)：541.

[4] Havin V P. Approximation in the mean by analytic functions [J]. Doklady Akademii，Nauk SSSR，1968，178：1025.

[5] Farrell O J. On approximation to an analytic function by polynomials[J]. Bulletin of the American Mathematic Society，1934，40：908.

[6] Hörmander L，Wermer J. Uniform approximation on compact sets in Cn[J]. *Mathematica Scandinavica*，1968，23：5.

[7] Taylor B A. On weighted polynomial approximation of entire functions[J]. Pacific Journal of Mathematics，1971，36：523.

[8] Sibony N. Approximation polynomiale pondérée dans un domaine d' holomorphie de Cn[J]. Annales de 1' institut Fourier，1976，26：71.

[9] Wohlgelernter D. Weighted L2 approximation of entire functions[J]. Transactions of The American Mathematical Society，1975，202：211.

[10] Tsuji M. Potential theory in modern function theory[M]. Tokyo：Maruzen Co，Ltd，1959.

[11] Boas H P. The Lu Qi-Keng conjecture fails generically[J]. Proceedings of the American Mathematical Society，1996，124：2021.

[12] Walsh J L. Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain[M]. New York：American Mathematical Society，1969.

[13] Gaier D. Lectures on complex approximation[M]. Boston：Stuttgart，1980.

[14] Goluzin G M. Geometric theory of functions of a complex variable[M]. New York：American Mathematical Society，1969.

[15] Chen B Y，Zhang J H. On Bergman completeness and Bergman Stability[J]. Mathematische Annalen，2000，318：517.

[16] Diederich K，Ohsawa T. An estimate for the Bergman distance on pseudoconvex domains[J]. Annals of Mathematic，1995，141：181.

[17] Donnelly H，Fe. erman C. L2-cohomology and index theorem for the Bergman metric[J]. Annals of Mathematic，1983，118：593.

[18] Berndtsson B. The extension theorem of Ohsawa-Takegoshi and the theorem of Donnelly-Fe. erman[J]. Annales de l'institut Fourier，1996，46：1083.

[19] Hewitt E，Stromberg K. Real and abstract analysis，a modem treatment of the theory of functions of a real variable[M]. New York：Springer-Verlag，1965.