第 42 卷第 12 期
2014 年 12 月

同 济 大 学 学 报(自 然 科 学 版)
JOURNAL OF TONGJI UNIVERSITY(NATURAL SCIENCE)

Vol. 42 No. 12
Dec. 2014

文章编号：0253-374X(2014)12-1928-03

DOI:10.11908/j.issn.0253-374x.2014.12.023

扇形图与匹配图的临界星图 Ramsey 数

李 珍，李雨生

(同济大学 数学系，上海 200092)

摘要：对于完全图 K_n 和一个额外的顶点 v，通过在 v 与 K_n 之间添加 k 条边所得出的图，记为 $K_n \sqcup K_{1,k}$. 设 G 和 H 是任意的图，临界星图 Ramsey 数 $r_*(G,H)$ 定义为最小的正整数 k，使得图 $K_{N-1}\sqcup K_{1,k}$ 的任意红蓝 2-边着色，或者存在单色的红色子图 G，或者存在单色的蓝色子图 H，这里 N 指的是 Ramsey 数 $r(G,H)$. 文中找到了 $r(F_n, mK_2)$ 的所有临界图，利用这些临界图得到了临界星图 Ramsey 数 $r_*(F_n, mK_2)=m+1$，$n>m\geqslant 1$，以及 $r_*(F_n, mK_2)=2m$，$n\leqslant m$，这里 $F_n=K_1+nK_2$ 是扇形图.

关键词：Ramsey 数；临界图；临界星图 Ramsey 数

中图分类号：O157.5　　　　**文献标志码**：A

Star-critical Ramsey Number of Fan-graph Versus Matching

LI Zhen, *LI Yusheng*

(Department of Mathematics, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: Let $K_n \sqcup K_{1,k}$ be a graph obtained from K_n and an additional vertex v by joining v and k vertices of K_n. For graphs G and H, the star-critical Ramsey number $r_*(G,H)$ is the smallest k such that every red/blue 2-edge coloring of $K_{N-1}\sqcup K_{1,k}$ contains a red G or a blue H, where N is the Ramsey number $r(G,H)$. Let $F_n=K_1+nK_2$ be a fan-graph. All critical graphs of $r(F_n, mK_2)$ are determined in this note. Also the star-critical Ramsey numbers $r_*(F_n, mK_2)=m+1$ for $n>m\geqslant 1$ and $r_*(F_n, mK_2)=2m$ for $n\leqslant m$ are obtained by discussing these critical graphs.

Key words: Ramsey number; critical graphs; star-critical Ramsey number

---

设 G 和 H 是任意的两个图. Ramsey 数 $r(G,H)$定义为最小的正整数 N，使得完全图 K_N 的任意红蓝 2-边着色，或者存在红色子图 G，或者存在蓝色子图 H. 当 $N=r(G,H)$时，根据 Ramsey 定理[1]知，存在 K_{N-1}的临界的红蓝 2-边着色，使其导出图中既不含红色 G，也不含蓝色 H. 通常把这种临界的红蓝 2-边着色称为(G,H)-free 着色，也可称为 $r(G,H)$的临界图.

对于顶点不关联的两个图 G 和 H，$G\cup H$ 就是顶点集为 $V(G)\cup V(H)$以及边集为 $E(G)\cup E(H)$的图. 特别，图 G 中添加一个顶点 v，简记为 $G\cup v$，且把 m 个顶点不关联的图 G 的并简记为 mG. $G+H$ 是通过把 $G\cup H$ 中 G 的每个顶点与 H 的每个顶点连接而获得的图. 如果 $V(H)\subseteq V(G)$，把 H 中那些不属于 $E(G)$的边添加到 G 中所得到的图，记为 $G\vee H$. 当 H 是 G 的一个子图时，通过从 G 中删掉 H 的边而得到的图，通常记为 $G-H$. 图 G 中一个顶点 v 的删除，可以简单的记为 $G-v$.

1 研究内容

令 $N=r(G,H)$. 实际上，在 Ramsey 数的讨论中，可能并不需要完全图 K_N 的所有边. 因此，Hook 和 Isaak[2] 提出：如果从完全图 K_N 中删掉一个星图后，仍然可以保证其任意红蓝 2-边着色或者含红色 G，或者含蓝色 H，则去掉的这个星图最多含有多少条边？也可以看作为，对于 $K_{N-1}\cup v$ 的任意一个红蓝 2-边着色，如果在 v 与 K_{N-1}之间不断添加已经被红蓝着色了的边，则能保证含红色 G 或者蓝色 H 所需的最少的边数是多少？为了记号方便，通常用 $K_{N-1}\sqcup K_{1,k}$表示在 v 与 K_{N-1}之间添加 k 条边后得到的图. 下面，给出了临界星图 Ramsey 数的定义.

定义 1　设 $N=r(G,H)$，临界星图 Ramsey 数 $r_*(G,H)$定义为最小的正整数 k，使得图 $K_{N-1}\sqcup K_{1,k}$的任意红蓝 2-边着色，或者含红色子图 G，或者含蓝色子图 H.

收稿日期：2013-11-14
基金项目：国家自然科学基金(11201342)
第一作者：李 珍(1987—)，女，博士生，主要研究方向为组合数学与图论. E-mail: li.linda.zhen@gmail.com

Hook 和 Isaak 在文献[2]以及 Hook 在文献[3]中确定了关于树图、匹配图以及圈等图的若干临界星图 Ramsey 数. 这里只列举了部分结论：

$$r_*(T_n, K_m) = (n-1)(m-2)+1$$

$$r_*(nK_2, mK_2) = m, n \geqslant m \geqslant 1$$

$$r_*(P_n, C_4) = 3, n \geqslant 3$$

定义 K_1+nK_2 为扇形图，记为 F_n，其中度为 $2n$ 的点为 F_n 的中心点. 本文给出了 $r(F_n, mK_2)$ 的所有临界图，确定了临界星图 Ramsey 数 $r_*(F_n, mK_2)$.

定理 1　设 n, m 是任意的正整数，则

$$r_*(F_n, mK_2) = \begin{cases} m+1 & \text{如果 } n > m \\ 2m & \text{否则} \end{cases}$$

2　扇形图与匹配图的临界星图 Ramsey 数

Lin 和 Li[4] 给出了扇形图 F_n 与匹配图 mK_2 的 Ramsey 数，如下：

定理 2　设 m 和 n 是任意的正整数，则 $r(F_n, mK_2) = \max\{m, n\} + m + n$.

设 $G=(V,E)$ 是顶点集合 V 上的完全图的一个红蓝 2-边着色，这时得到边集合的一个划分 $E=E^{\mathrm{R}} \cup E^{\mathrm{B}}$，其中 E^{R} 是着红色的所有边的集合，E^{B} 是着蓝色的所有边的集合. 本文用 $G^{\mathrm{R}}=(V,E^{\mathrm{R}})$ 和 $G^{\mathrm{B}}=(V,E^{\mathrm{B}})$ 分别表示这个红蓝 2-边着色所产生的红色生成子图和蓝色生成子图. 当 $n>m\geqslant 1$ 时，为了描述 $r(F_n, mK_2)$ 的全部临界图，首先定义了一个图族 $\mathcal{G}$.

定义 2　对于任意的正整数 $n>m\geqslant 1$，令 $N=r(F_n, mK_2)=2n+m$，且令 A_k 表示 K_k 的任意一个红蓝 2-边着色. 定义图族 $\mathcal{G}$，其中 $\mathcal{G}$ 中任意图 G 都代表完全图 K_{N-1} 的一个红蓝 2-边着色，且具有如下结构：

$$G{:}\, G^{\mathrm{R}} = (K_{2n} \cup A_{m-1}^{\mathrm{R}}) \vee F$$

$$G^{\mathrm{B}} = (2nK_1 + A_{m-1}^{\mathrm{B}}) - F$$

其中 F 是完全二部图 $K_{2n,m-1}$ 的一个子图，且 F 的每一个连通分支都有 K_1，K_2 或者星图 $K_{1,k}(k\geqslant 2)$ 的结构，这里星图 $K_{1,k}$ 的中心点必须在大小为 $2n$ 的那个部集中，且其余 k 个点在 A_{m-1}^{B} 中形成阶为 k 的蓝色完全图.

在本文的图形中，用一条实线（或虚线）表示一条红边（或蓝边）. 实线圈表示一个红色子图，且如果这个红色子图是阶为 n 的完全图，则记作为 $K_n^{(\mathrm{R})}$；如果不是完全图，则记作为 A_n^{R}（这里 A_n 表示 K_n 的任意一个红蓝 2-边着色）. 如果两个顶点不关联的红色子图之间的所有边均着红色（或蓝色），则用一条粗的实线（或虚线）来表示. 图 1 给出了 $\mathcal{G}$ 中含有 $F=K_2\cup K_{1,2}\cup K_{1,3}$ 的一个图 G. 当然，A_{m-1} 中除了图 1 中所示的那些蓝边外，还可能有其他的蓝边.

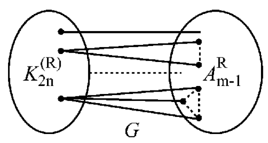

图 1　$r(F_n, mK_2)$ 的含有 $F=K_2\cup K_{1,2}\cup K_{1,3}$ 的一个临界图

Fig.1　A critical graph of $r(F_n, mK_2)$ with $F=K_2\cup K_{1,2}\cup K_{1,3}$

定义 2 中 $\mathcal{G}$ 的任意图 G 的蓝色子图 G^{B} 中每一条蓝边都需要 A_{m-1} 中至少一点，因此最多含有 $m-1$ 条独立的蓝边，即不含蓝色子图 mK_2. 显然，G^{R} 中肯定不含中心点在 A_{m-1} 中的子图 F_n（因为 A_{m-1} 中任意点在 $K_{2n}^{(\mathrm{R})}$ 中均最多有一个红邻点）. 假定 G^{R} 中存在中心点在 $K_{2n}^{(\mathrm{R})}$ 中的红色子图 F_n，这就暗示了，或者 A_{m-1}^{R} 中存在点与 $K_{2n}^{(\mathrm{R})}$ 之间有至少 2 条红边，或者 A_{m-1}^{R} 中存在红边，且它的两个端点在 $K_{2n}^{(\mathrm{R})}$ 中有公共的红邻点. 然而，定义中要求 F 的每个连通分支有 K_1，K_2 或者 $K_{1,k}$（星图的中心点在大小为 $2n$ 的部集中，其余 k 个点在 A_{m-1}^{R} 中是独立集）的结构，故 $\mathcal{G}$ 中任意图都不含红色子图 F_n.

在下面的引理中，给出了 $r(F_n, mK_2)$ 的所有临界图，这里 $n>m\geqslant 1$.

引理 1　设 $n>m\geqslant 1$ 是任意的正整数，且 $N=r(F_n, mK_2)=2n+m$，则完全图 K_{N-1} 的任意的 (F_n, mK_2)-free 着色的导出图必定属于定义 2 中的图族 $\mathcal{G}$.

证明　给定完全图 K_{N-1} 的任意一个 (F_n, mK_2)-free着色（下面证明中用到的 K_{N-1} 都指这个边已经被红蓝 2-着色了的 K_{N-1}）. 对 $n+m$ 做归纳假设. 当 $m=1, n\geqslant 2$ 时，$r(F_n, K_2)=2n+1$，且阶为 $2n$ 的临界图中不含蓝边. 因此，它的临界图必定是完全图 $K_{2n}^{(\mathrm{R})}$. 下面假定 $n>m\geqslant 2$.

完全图 K_{N-1} 中必存在点 v，使得与 v 所关联的边中既有红边也有蓝边，不妨设 vu 为红边，vw 为蓝边. 否则，K_{N-1} 中所有点所关联的边或者全为红色，或者全为蓝色，这样所得出的图或者含红色 F_n，或者含蓝色 mK_2. 令 H 是从 K_{N-1} 中删掉点集合 $\{u, v, w\}$ 之后得到的图，即 H 是边已经被红蓝 2-着色了的完全图 K_{N-4}. 因为 $r(F_{n-1}, (m-1)K_2)=2n+m-3$

以及 $N-4=2n+m-4$，所以由归纳假设知，图 H 必定属于图族 $\mathscr{H}$，其中 $\mathscr{H}$ 中任意图 H 都代表完全图 K_{N-4} 的一个红蓝 2-边着色，且具有如下结构：

$$H: H^{\mathrm{R}} = (K_{2(n-1)} \cup A_{m-2}^{\mathrm{R}}) \vee F'$$
$$H^{\mathrm{B}} = (2(n-1)K_1 + A_{m-2}^{\mathrm{B}}) - F'$$

其中 F' 是完全二部图 $K_{2(n-1),m-2}$ 的一个子图，且 F' 的每一个连通分支都有 K_1，K_2 或者星图 $K_{1,k'}(k'\geqslant 2)$ 的结构，这里星图 $K_{1,k'}$ 的中心点必须在大小为 $2(n-1)$ 的那个部集中，且其余 k' 个点在 A_{m-2}^{B} 中形成阶为 k' 的蓝色完全图.

显然，图族 $\mathscr{H}$ 中任意图都含 $K_{2(n-1)}^{(\mathrm{R})}$，即图 H 中必定含有 $K_{2(n-1)}^{(\mathrm{R})}$，记为 U. 因为不含蓝色 mK_2，故点 u 与 U 之间的所有边均被着红色. 下面，根据边 uw 的颜色，分两种情况来讨论.

情形 1 如果 uw 为蓝边，则 v 与 U 之间必定全部为红边(否则，会形成蓝色 mK_2). 这时，$U\cup\{u,v\}$ 形成了完全图 $K_{2n}^{(\mathrm{R})}$. 又因为不含红色子图 F_n，故 w 在 U 中最多有一个红邻点. 下面分两步来讨论 $\{u,v,w\}$ 与 A_{m-2} 间边的颜色. 首先，考虑 w 与 A_{m-2} 之间的边的着色方式. 如果 w 与 $U\cup\{u,v\}$ 之间无红边，或者 w 与 $U\cup\{u,v\}$ 之间有红边 ww' 且 w' 与 A_{m-2} 之间无红边，则 w 与 A_{m-2} 之间的边可以任意着色，$A_{m-2}\cup w$ 也就相当于 A_{m-1} 的任意的红蓝 2-边着色. 如果 w 与 $U\cup\{u,v\}$ 之间有红边 ww' 且 w' 与 A_{m-2} 之间也有红边，用 $N_A(w')$ 表示 w' 在 A_{m-2} 中的红邻域，这时 w 与 $N_A(w')$ 之间必须全部为蓝边，而与 A_{m-2} 中余下的点之间的边可以任意着色. 其次，考虑 $\{u,v\}$ 与 A_{m-2} 之间的边的着色方式. 分别记它们在 A_{m-2} 中的红色邻域为 $N_A(u)$ 和 $N_A(v)$ ($N_A(u)$ 与 $N_A(v)$ 也可以为 $\varnothing$). 因为没有红色子图 F_n，所以 $N_A(u)\cap N_A(v)=\varnothing$，$N_A(u)$ 与 $N_A(v)$ 在 A_{m-2}^{R} 中均是独立集，且 $N_A(u)\cup N_A(v)$ 与 U 之间的边全部为蓝边，即在 U 中没有红邻点. 也就是说，u 与 A_{m-2} 之间或者无红边，或者那些红边形成一个以 u 为中心点的星图；v 也有这种类似的结构. 此时，$U\cup\{u,v\}$ 形成了完全图 $K_{2n}^{(\mathrm{R})}$，且 $A_{m-2}\cup w$ 形成 A_{m-1} 的一个红蓝2-边着色，而这个 $K_{2n}^{(\mathrm{R})}$ 与 A_{m-1} 之间添加的红边就相当于在 F' 中添加了与 $\{u,v,w\}$ 有关的连通分支，且这些连通分支有 K_1，K_2 或者 $K_{1,t}(t\geqslant 2)$ 的结构. 因此，导出图属于定义 2 中的图族 $\mathscr{G}$.

情形 2 如果 uw 为红边，这时考虑 v 与 U 之间的边的颜色. 当 v 与 U 之间至少有两条蓝边时，w 与 U 之间必定全为红边，即 $U\cup\{u,w\}$ 形成了红色完全图 $K_{2n}^{(\mathrm{R})}$，否则，会形成蓝色 mK_2. 因此，当 v 与 U 之间全为红边或者 v 与 U 之间至少有两条蓝边时，用类似于情形 1 的讨论，可以得出其导出图必属于定义 2 中的图族 $\mathscr{G}$. 余下的情形为 v 与 U 之间有且仅有一条蓝边，不妨记为 vv'. 因为无红色 F_n，所以 w 与 U 之间必须全为蓝边. 又因为 $n\geqslant 3$，故 U 中存在不同于 v' 的点. 此时，会形成蓝色子图 mK_2. 证毕.

定理 1 的证明 对于下界，考虑定义 2 中图族 $\mathscr{G}$ 中任意的图 G 及一个额外的点 v. 令 v 与 G 的子图 A_{m-1} 之间的边全部为蓝边，且与红色完全图 $K_{2n}^{(\mathrm{R})}$ 之间有一条红边，此时 G 再添加上 v 后，所导出的图中既不含红色子图 F_n，也不含蓝色子图 mK_2. 因此，$r_*(F_n,mK_2)\geqslant m+1$.

对于上界，考虑 K_{2n+m-1} 及一个额外的点 v. 由引理 1 知，K_{2n+m-1} 的任意的 (F_n,mK_2)-free 着色的导出图必定属于定义 2 中的图族 $\mathscr{G}$. 显然，$\mathscr{G}$ 中任意图都含有一个 $K_{2n}^{(\mathrm{R})}$ 的拷贝，不妨记为 U. 可以断言，如果 v 与 U 之间有两条边，则无论给这两条边着何种颜色，都会或者形成一个红色子图 F_n，或者形成一个蓝色子图 mK_2. 下面证明断言必成立. 不妨设 v 在 U 中的两个邻点为 u_1 和 u_2. 如果 vu_1 及 vu_2 均为红边，则 $U\cup v$ 会包含红色子图 F_n(以 u_1 或 u_2 为扇形图的中心点). 如果 $\{vu_1,vu_2\}$ 中至少有一条蓝边，这时得到 m 条独立的蓝边，即得到蓝色子图 mK_2. 因此，$r_*(F_n,mK_2)\leqslant m+1$. 证毕.

注 当 $n\leqslant m$ 时，$r_*(F_n,mK_2)=2m$. 类似的证明可简单叙述如下：由定理 2 知，$r(F_n,mK_2)=n+2m$，$n\leqslant m$. 定义图 G 为完全图 K_{n+2m-1} 的一个红蓝 2-边着色，其中红色子图 $G^{\mathrm{R}}=K_n+\overline{K_{2m-1}}$，蓝色子图 $G^{\mathrm{B}}=\overline{K_n}\cup K_{2m-1}$. 显然，图 G 中既不含红色子图 F_n，也不含蓝色子图 mK_2. 类似于引理 1，可以证明 $r(F_n,mK_2)(m>n)$ 的任意临界图必定有图 G 的结构. 此时，对于一个额外的点 v，如果 v 与图 G 中的红色 K_n 及蓝色 K_{2m-1} 均连一条边，则必定会得到或者红色子图 F_n，或者蓝色子图 mK_2.

参考文献：

[1] Ramsey F. On a problem of formal logic[J]. Proceedings of the London Mathematical Society, 1930, 48: 264.

[2] Hook J, Isaak G. Star-critical Ramsey numbers[J]. Discrete Applied Mathematics, 2011, 159: 328.

[3] Hook J. The classification of critical graphs and star-critical Ramsey numbers[D]. Lehigh: Lehigh University, 2010.

[4] Lin Q, Li Y. On Ramsey numbers of fans[J]. Discrete Applied Mathematics, 2009, 157: 191.