

考虑滑移效应的空间预应力混凝土组合式模型

马 诚, 陈惟珍

(同济大学 土木工程学院, 上海 200092)

摘要: 提出一种考虑滑移效应的空间预应力混凝土组合式模型, 通过预应力钢筋和混凝土交点处的虚拟节点, 将模拟两者交界面的黏结单元嵌入滑移模型. 基于位移有限元框架, 由虚功原理推导滑移模型的有限元平衡方程, 并编制计算程序. 该模型允许预应力钢筋以任意形式穿过混凝土单元, 网格划分灵活, 虚拟节点的自由度在平衡方程的集成过程中得到约减. 通过预应力混凝土矩形截面简支梁算例, 滑移模型在材料弹性阶段计算结果的正确性得以验证, 可作为预应力混凝土空间非线性有限元程序开发的基础.

关键词: 预应力混凝土空间组合式滑移模型; 虚拟节点; 黏结单元; 黏结滑移; 预应力损失

中图分类号: U448.35; U441

文献标志码: A

A Spatial Prestressed Concrete Embedded Model with Consideration of Slip Effect

MA Cheng, CHEN Weizhen

(College of Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: A spatial prestressed concrete embedded slip model, into which the non-thickness bond element simulating the interface of prestressed tendon and concrete was embedded via virtual nodes introduced on intersection points of the two, was proposed. Based upon displacement-based finite element framework, a finite element equilibrium equation for the slip model was deduced according to virtual work principle, and a related calculation program was developed. The proposed model allowed prestressed tendon to go through concrete in any pattern, without consideration of its layout and direction and therefore with convenience in finite element mesh. The freedoms of virtual nodes could be reduced in the formation of the equilibrium equation. Verified by a numerical example of simply supported prestressed concrete beam with rectangular section, the proposed model was proved to be correct in elastic calculation and could be

further used to develop a three dimensional nonlinear finite element analyzing program.

Key words: prestressed concrete spatial embedded slip model; virtual node; bond element; bond-slip; prestress loss

现阶段我国桥梁设计多基于梁单元模型, 通过整体计算的轴力、剪力和弯矩结合平截面假定求得截面应力, 属于内力控制分析. 梁单元模型没有考虑预应力钢筋与混凝土间的黏结滑移, 应力结果多局限于单元纵向, 亦不能精确计算混凝土变形对预应力钢筋的影响和预应力损失等问题. 因此, 桥梁设计计算方法应从内力控制分析提高至应力控制分析, 计算结果应能体现结构空间受力状况, 且黏结滑移效应不可忽略.

预应力混凝土空间有限元模型可分为整体式、组合式和分离式 3 种^[1]. 整体式模型^[2-3]将钢筋视为均匀弥散于混凝土中的材料; 组合式模型^[4-5]将预应力钢筋的刚度和荷载等效叠加到混凝土单元的刚度和荷载中以考虑预应力钢筋对结构的影响. 这两种模型网格划分简单, 但均无法模拟预应力钢筋和混凝土间的滑移. 分离式模型^[6-7]通过设置黏结单元来考虑钢束滑移, 要求预应力钢筋沿混凝土单元边界布置, 配筋复杂时前处理将极为困难.

到目前为止, Kang^[8], Van Zyl 和 Scordelis^[9], Van Greunen 和 Scordelis^[10], Roca 和 Mari^[11], Wu 等^[12]先后提出一些考虑滑移效应的预应力混凝土有限元模型, 这些模型多属于分离式, 混凝土多以板壳单元模拟, 应力描述局限于二维空间. 本文结合传统组合式模型和分离式模型的优点, 提出一种空间预应力混凝土组合式模型, 在允许预应力钢筋以任意形式穿过混凝土的同时考虑了两者间的黏结滑移.

收稿日期: 2013-11-21

基金项目: 交通部西部交通建设科技项目(200831849404)

第一作者: 马 诚(1989—), 男, 博士生, 主要研究方向为桥梁结构. E-mail: mac_tjcivil@hotmail.com

通讯作者: 陈惟珍(1962—), 男, 教授, 博士生导师, 工学博士, 主要研究方向为桥梁结构. E-mail: tongji_bridge611@126.com

1 位移模式

分别采用 20 节点三维等参单元、2 节点杆单元和 4 节点无厚度黏结单元模拟混凝土、预应力钢筋和两者界面,另以 $Oxyz, O'\xi\eta\zeta, O_1tr_1r_2$ 分别表示组合单元整体坐标系、混凝土单元局部坐标系、预应力钢筋和黏结单元所共用的局部坐标系,并以角标 cor1, cor2, cor3 分别表示变量所在坐标系为 $Oxyz, O'\xi\eta\zeta$ 和 $O_1tr_1r_2$. 图 1 中,1~20 为混凝土单元节点, i, j 为预应力钢筋单元节点, m, n 为混凝土和预应力钢筋交点处引入的虚拟节点,初始时刻, m, n 与 i, j 对应重合. 黏结单元内表面与预应力钢筋单元共用节点 i, j ,外表面与混凝土单元共用虚拟节点 m, n .

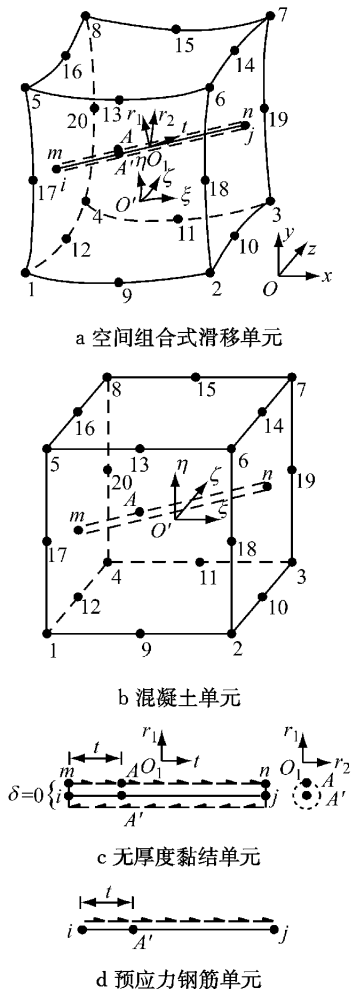


图 1 空间组合适滑移模型有限元离散形式

Fig.1 Finite element discrete form of the spatial embedded slip model

记黏结单元外表面和内表面在切向局部坐标 t ($-1 \leq t \leq 1$) 处分别对应点 A, A' , 两点在 $O_1tr_1r_2$ 中的位移差值向量^[13]为 $\mathbf{s}_{cor3} = \mathbf{u}_{cor3}^A - \mathbf{u}_{cor3}^{A'} = [s_t \quad s_r]$

$s_r]$ ^T, 其中, s_t 为预应力钢筋的切向滑移量, s_{r1}, s_{r2} 为预应力筋与混凝土的径向相对位移.

A' 点在坐标系 $Oxyz$ 中的位移 $\mathbf{u}_{cor1}^{A'}$ 可由预应力钢筋单元的节点位移 \mathbf{u}_s 按下式求得:

$$\mathbf{u}_{cor1}^{A'} = \mathbf{N}_s \mathbf{u}_s \tag{1}$$

式中: $\mathbf{N}_s = [(1-t)\mathbf{I} \quad (1+t)\mathbf{I}/2]$ 为预应力钢筋单元位移插值矩阵; \mathbf{I} 为 3×3 阶单位矩阵.

同理, A 点在坐标系 $Oxyz$ 中的位移 \mathbf{u}_{cor1}^A 可由虚拟节点 m, n 的位移 \mathbf{u}_{nm} 求得

$$\mathbf{u}_{cor1}^A = \mathbf{N}_m \mathbf{u}_{nm} \tag{2}$$

混凝土单元内任一点 q 的位移 \mathbf{u}_q 与混凝土单元节点位移 \mathbf{u}_c 满足

$$\mathbf{u}^q = \mathbf{N}_c \mathbf{u}_c \tag{3}$$

式中: \mathbf{N}_c 为混凝土单元位移插值矩阵.

设虚拟节点 m, n 在 $O'\xi\eta\zeta$ 中的局部坐标分别为 (ξ_m, η_m, ζ_m) 和 (ξ_n, η_n, ζ_n) , 结合式(3)有

$$\mathbf{u}_{nm} = \mathbf{N}_{nm} \mathbf{u}_c \tag{4}$$

式中: $\mathbf{N}_{nm} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_c(\xi_m, \eta_m, \zeta_m) \\ \mathbf{N}_c(\xi_n, \eta_n, \zeta_n) \end{bmatrix}$ 为虚拟节点 m, n 的位移插值矩阵. 式(4)代入(2), 有

$$\mathbf{u}_{cor1}^A = \mathbf{N}_s \mathbf{N}_{nm} \mathbf{u}_c \tag{5}$$

坐标系 $O_1tr_1r_2$ 与坐标系 $Oxyz$ 的转换示意^[14] 见图 2, 记 O_1t 与 xOy 平面间的夹角为 φ , O_1t 在 xOy 平面的投影 O_1t' 与 Ox 轴间的夹角为 θ , 令

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1(\theta) & \\ & \mathbf{T}_1(\theta) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_2(\varphi) & \\ & \mathbf{T}_2(\varphi) \end{bmatrix}$$

且

$$\mathbf{T}_1(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_2(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{bmatrix}$$

则 A, A' 在坐标系 $oxyz$ 中的位移差值向量 \mathbf{s} 可由 \mathbf{s}_{cor3} 按下式推得:

$$\mathbf{s} = \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_1 \mathbf{s}_{cor3} = \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_1 (\mathbf{u}_{cor1}^A - \mathbf{u}_{cor1}^{A'}) = \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_1 (\mathbf{N}_s \mathbf{N}_{nm} \mathbf{u}_c - \mathbf{N}_s \mathbf{u}_s) = \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_1 \mathbf{N}_s (\mathbf{N}_{nm} \mathbf{u}_c - \mathbf{u}_s) \tag{6}$$

2 材料本构关系

混凝土和预应力钢筋的应力应变满足

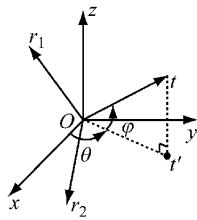


图 2 局部坐标与整体坐标转换

Fig.2 Transformation between local and conventional coordinate

$$\sigma_c = D_c \varepsilon_c = D_c B_c \varepsilon_s \quad (7)$$

$$\sigma_s = D_s \varepsilon_s = D_s B_s \varepsilon_s \quad (8)$$

式中: σ_c, ε_c 分别为混凝土单元的应力矩阵和应变矩阵; D_c, B_c 分别为混凝土的弹性矩阵和应变转换矩阵; σ_s, ε_s 分别为预应力钢筋单元的应力矩阵和应变矩阵; D_s, B_s 分别为预应力钢筋的弹性矩阵和应变转换矩阵。

黏结单元外表面单位面积力 $f_b = [\tau_t \quad \sigma_{r1} \quad \sigma_{r2}]^T$ 可由位移差值向量 s 按下式求得:

$$f_b = k_b s = k_b T_2 T_1 N_s (N_{mm} u_c - u_s) \quad (9)$$

式中: $k_b = \begin{bmatrix} k_t & & \\ & k_{r1} & \\ & & k_{r2} \end{bmatrix}$ 为黏结单元在坐标系

$O_1 t r_1 r_2$ 下的刚度矩阵, k_t 和 k_{r1}, k_{r2} 分别为黏结单元的切向刚度和两个正交径向刚度。

k_t 可由切向黏结应力 τ_t 对切向滑移量 s_t 的一阶导数求得. Nilson^[15], Mirza 和 Houde^[16] 先后提出适用于普通钢筋的黏结力-滑移量公式. 本文选取 Eligehausen 等^[17] 提出的适用于预应力钢筋的黏结应力-滑移量曲线, 见图 3, s_t 大于零时 τ_t 和 k_t 的计算公式为

$$\begin{cases} \tau_t = \frac{2\tau_0}{s_0} \left(s_t - \frac{s_t^2}{2s_0} \right), k_t = \frac{2\tau_0}{s_0} \left(1 - \frac{s_t}{s_0} \right), & 0 \leq s_t \leq s_0 \\ \tau_t = (s_t - s_0) \frac{\tau_1 - \tau_0}{s_1 - s_0} + \tau_0, k_t = \frac{\tau_1 - \tau_0}{s_1 - s_0}, & s_0 < s_t \leq s_1 \\ \tau_t = \tau_1, k_t = 0, & s_t > s_1 \end{cases} \quad (12)$$

式中: $s_0 = 0.025 \text{ mm}, s_1 = 20s_0, \tau_0 = 6.64 \text{ MPa}, \tau_1 = 0.2\tau_0$. 文中对 k_{r1}, k_{r2} 取大数保证预应力钢筋与混凝土间径向相对变形协调。

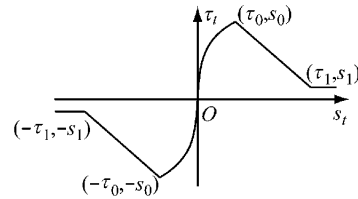


图 3 黏结滑移本构曲线^[12]

Fig.3 Bond-slip constitutive curve^[12]

3 单元组分传力机制

设预应力张拉控制力为 p_s , 初始时刻与混凝土紧密黏结(图 4a), 则预应力钢筋锚固时 p_s 可完全转化为作用于虚拟节点 m, n (图 4b) 的压力, 通过式 (13), 可外推为作用于混凝土节点的等效荷载(图 4c). 图 4c 中, 混凝土单元等效节点荷载仅为示意, 图 5c 同。

$$F_{sc} = N_{mm}^T F_{s,mm} \quad (13)$$

式中: F_{sc} 和 $F_{s,mm}$ 分别为预应力作用于混凝土的等效节点力和作用于节点 m, n 的力向量。

外荷载作用下, 预应力钢筋与混凝土会出现相对滑移, 各段预应力钢筋也会出现长度变化, 如图 5 所示. 设当前段预应力钢筋的初始长度为 l_0 , 节点 i, j 相对节点 m, n 在 $O_1 t r_1 r_2$ 中的滑移量分别为 $s_{t,i}$ 和 $s_{t,j}$, 则当前段预应力钢筋的长度变化 Δl_s 及预应力变化 Δp_s 为

$$\Delta l_s = s_{t,i} - s_{t,j} \quad (14)$$

$$\Delta p_s = E_s A_s \Delta l_s / l_0 \quad (15)$$

式中: E_s 为预应力钢筋弹性模量; A_s 为预应力钢筋截面面积。

定义黏结应力 τ_t 引起的作用于节点 i, j 的等效集中力 f_i 和 f_j 为

$$\begin{aligned} f_i &= \lambda \pi d_s l_i k_t |s_{t,i}| = \lambda c l_i k_t |s_{t,i}| \\ f_j &= \lambda \pi d_s l_j k_t |s_{t,j}| = \lambda c l_j k_t |s_{t,j}| \end{aligned} \quad (16)$$

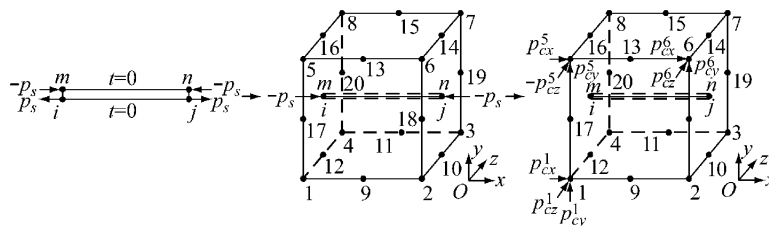


图 4 无滑移时单元组分传力机制

Fig.4 Force transmission among element components without slipping

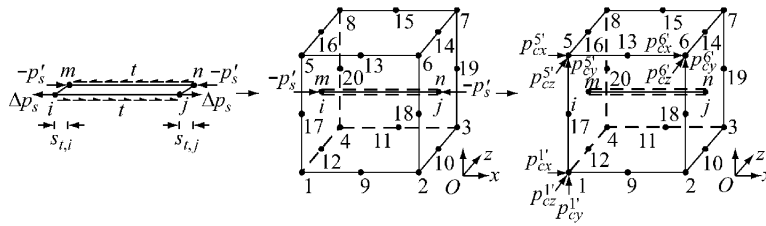


图 5 有滑移时单元组分传力机制

Fig.5 Force transmission among element components with slipping

式中: λ 为符号函数,当 $s_t > 0$ 时 $\lambda = 1$,当 $s_t = 0$ 时 $\lambda = 0$,当 $s_t < 0$ 时 $\lambda = -1$; d_s 为预应力钢筋直径; $c = \pi d_s$ 为预应力钢筋截面周长; $l_i = (l_0 + l_1)/2$, $l_j = (l_0 + l_2)/2$ 分别为节点 i, j 的黏结长度^[18], l_1, l_2 为与当前段预应力钢筋相邻的两段预应力钢筋的初始长度(图 6).

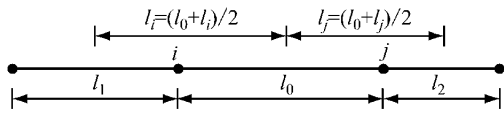


图 6 预应力钢筋节点黏结长度

Fig.6 Bond length of prestressing tendon nodes

综合式(15), (16), 可以得出考虑滑移和预应力损失后作用于节点 m, n 的重分布力 $-p'_s = -(\Delta p_s + \frac{f_i + f_j}{2})$, 以 p'_s 代替 p_s , 可求得调整后预应力对混凝土产生的等效荷载.

4 系统平衡方程

基于位移有限元框架, 根据虚功原理推导该滑移模型的有限元平衡方程, 系统总内虚功 δW_{int} 应为混凝土内虚功 $\delta W_{c,int}$ 、预应力钢筋内虚功 $\delta W_{s,int}$ 和黏结单元内虚功 $\delta W_{b,int}$ 之和.

$$\delta W_{c,int} = \int_{V_c} (\mathbf{B}_c \delta \mathbf{u}_c)^T \boldsymbol{\sigma}_c dV_c \quad (17)$$

$$\delta W_{s,int} = A_s \int_{\Gamma_s} (\mathbf{B}_s \delta \mathbf{u}_s)^T \boldsymbol{\sigma}_s d\Gamma_s \quad (18)$$

$$\delta W_{b,int} = c \int_{\Gamma_b} (\delta s)^T \mathbf{f}_b d\Gamma_b \quad (19)$$

式中: V_c, Γ_s, Γ_b 分别为单元刚度积分时的混凝土体域、预应力钢筋线域和黏结单元线域.

式(7)代入式(17)得

$$\delta W_{c,int} = \int_{V_c} (\mathbf{B}_c \delta \mathbf{u}_c)^T \mathbf{D}_c \mathbf{B}_c \mathbf{u}_c dV_c = \delta \mathbf{u}_c^T \mathbf{K}_{cc}^c \mathbf{u}_c \quad (20)$$

式中: $\mathbf{K}_{cc}^c = \int_{V_c} \mathbf{B}_c^T \mathbf{D}_c \mathbf{B}_c dV_c$ 为混凝土单元刚度矩阵.

式(8)代入式(18)得

$$\delta W_{s,int} = A_s \int_{\Gamma_s} (\mathbf{B}_s \delta \mathbf{u}_s)^T \mathbf{D}_s \mathbf{B}_s \mathbf{u}_s d\Gamma_s = \delta \mathbf{u}_s^T \mathbf{K}_{ss}^s \mathbf{u}_s \quad (21)$$

式中: $\mathbf{K}_{ss}^s = A_s \int_{\Gamma_s} \mathbf{B}_s^T \mathbf{D}_s \mathbf{B}_s d\Gamma_s$ 为预应力钢筋单元刚度矩阵.

式(6), (9)代入式(19)得

$$\left\{ \begin{aligned} \delta W_{b,int} &= c \int_{\Gamma_b} [\mathbf{T}_2 \mathbf{T}_1 \mathbf{N}_s (N_{nm} \delta \mathbf{u}_c - \delta \mathbf{u}_s)]^T \cdot \\ &\quad \mathbf{k}_b \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_1 \mathbf{N}_s (N_{nm} \mathbf{u}_c - \mathbf{u}_s) d\Gamma_b = \\ &\quad \delta \mathbf{u}_c^T \mathbf{K}_{cc}^b \mathbf{u}_c - \delta \mathbf{u}_c^T \mathbf{K}_{cs}^b \mathbf{u}_s - \delta \mathbf{u}_s^T \mathbf{K}_{sc}^b \mathbf{u}_c + \\ &\quad \delta \mathbf{u}_s^T \mathbf{K}_{ss}^b \mathbf{u}_s \\ \mathbf{K}_{cc}^b &= c \int_{\Gamma_b} \mathbf{N}_{nm}^T \mathbf{N}_s^T \mathbf{T}_1 \mathbf{T}_2^T \mathbf{k}_b \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_1 \mathbf{N}_s \mathbf{N}_{nm} d\Gamma_b \\ \mathbf{K}_{cs}^b &= -c \int_{\Gamma_b} \mathbf{N}_{nm}^T \mathbf{N}_s^T \mathbf{T}_1 \mathbf{T}_2^T \mathbf{k}_b \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_1 \mathbf{N}_s d\Gamma_b \\ \mathbf{K}_{sc}^b &= -c \int_{\Gamma_b} \mathbf{N}_s^T \mathbf{T}_1 \mathbf{T}_2^T \mathbf{k}_b \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_1 \mathbf{N}_{nm} d\Gamma_b \\ \mathbf{K}_{ss}^b &= c \int_{\Gamma_b} \mathbf{N}_s^T \mathbf{T}_1 \mathbf{T}_2^T \mathbf{k}_b \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_1 \mathbf{N}_s d\Gamma_b \end{aligned} \right. \quad (22)$$

式中: $\mathbf{K}_{cc}^b, \mathbf{K}_{cs}^b$ 分别为黏结单元节点 m, n 的位移对混凝土节点力和预应力钢筋节点力的刚度贡献矩阵; $\mathbf{K}_{sc}^b, \mathbf{K}_{ss}^b$ 分别为黏结单元节点 i, j 的位移对混凝土节点力和预应力钢筋节点力的刚度贡献矩阵.

系统总的内虚功应为式(20)~(21)之和, 即

$$\delta W_{int} = \delta \mathbf{u}_c^T \mathbf{K}_{cc}^c \mathbf{u}_c + \delta \mathbf{u}_s^T \mathbf{K}_{ss}^s \mathbf{u}_s + \delta \mathbf{u}_c^T \mathbf{K}_{cc}^b \mathbf{u}_c + \delta \mathbf{u}_c^T \mathbf{K}_{cs}^b \mathbf{u}_s + \delta \mathbf{u}_s^T \mathbf{K}_{sc}^b \mathbf{u}_c + \delta \mathbf{u}_s^T \mathbf{K}_{ss}^b \mathbf{u}_s \quad (23)$$

系统总的外虚功为

$$\delta W_{ext} = \delta \mathbf{u}_c^T \mathbf{P}_c + \delta \mathbf{u}_s^T \mathbf{P}_s \quad (24)$$

式中: $\mathbf{P}_c, \mathbf{P}_s$ 分别为作用于混凝土单元节点和预应力钢筋单元节点的等效力向量.

系统内外虚功应相等, 联合式(23)~(24), 写成矩阵形式即可得到系统平衡方程为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{cc}^c + \mathbf{K}_{cc}^b & \mathbf{K}_{cs}^b \\ \mathbf{K}_{sc}^b & \mathbf{K}_{ss}^s + \mathbf{K}_{ss}^b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_c \\ \mathbf{u}_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_c \\ \mathbf{P}_s \end{Bmatrix} \quad (25)$$

对于单个滑移模型, 平衡方程共有 66 个自由

度,混凝土 $20 \times 3 = 60$ 个,预应力钢筋 $2 \times 3 = 6$ 个,黏结单元 0 个,其中虚拟节点 m, n 的 6 个自由度得到缩减,自由度减少 $6 / (66 + 6) = 8\%$,利于降低总体刚度矩阵的阶数,提高运算效率。

5 计算流程

求解平衡方程时,先将外荷载分成若干荷载步,每级荷载步内采用 Newton-Raphson 算法迭代。设第 i 级荷载步 $\mathbf{P}_i = [\mathbf{P}_{c,i} \ \mathbf{P}_{s,i}]^T$ 内,经 $k-1, k$ 次迭代后的累计位移分别为 $\mathbf{u}_{k-1,i}, \mathbf{u}_{k,i}$,则迭代步 k 的位移增量为 $\Delta \mathbf{u}_{k,i} = \mathbf{u}_{k,i} - \mathbf{u}_{k-1,i}$,当 $\Delta_{k,i} = \|\Delta \mathbf{u}_{k,i}\| / \|\mathbf{u}_{k,i}\| < \Delta_{\text{allow}}$ 时,认为达到收敛要求,第 i 级荷载步的最终位移 $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_{k,i}$;否则,应按下列步骤进行 $k+1$ 次迭代:

(1)由式(6)及 $\mathbf{u}_{k,i}$ 计算第 k 次迭代后预应力钢筋的滑移量 $s_{k,i}$,进而更新黏结单元的刚度贡献矩阵 $\mathbf{K}_{cc,k,i}^b, \mathbf{K}_{cs,k,i}^b, \mathbf{K}_{sc,k,i}^b, \mathbf{K}_{ss,k,i}^b$ 。

(2)由 $\mathbf{u}_{k,i}$ 计算结构应力 $\sigma_{k,i}$,及结构对应于 $\sigma_{k,i}$ 的等效节点内力 $\mathbf{P}_{k,i}$ 。

(3)计算迭代步 k 的失衡荷载 $\Delta \mathbf{P}_{k,i} = \mathbf{P}_i - \mathbf{P}_{k,i}$,联合步骤(1),更新平衡方程如式(26)所示,以此计算对应于第 $k+1$ 次迭代步的位移增量 $\Delta \mathbf{u}_{k+1,i} = [\Delta \mathbf{u}_{c,k+1,i} \ \Delta \mathbf{u}_{s,k+1,i}]^T$ 。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{cc}^c + \mathbf{K}_{cc,k,i}^b & \mathbf{K}_{cs,k,i}^b \\ \mathbf{K}_{sc,k,i}^b & \mathbf{K}_{ss}^s + \mathbf{K}_{ss,k,i}^b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{u}_{c,k+1,i} \\ \Delta \mathbf{u}_{s,k+1,i} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_{c,i} \\ \mathbf{P}_{s,i} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_{c,k,i} \\ \mathbf{P}_{s,k,i} \end{Bmatrix} \quad (26)$$

(4)令 $\mathbf{u}_{k+1,i} = \mathbf{u}_{k,i} + \Delta \mathbf{u}_{k+1,i}$,计算 $\Delta_{k+1,i} = \|\Delta \mathbf{u}_{k+1,i}\| / \|\mathbf{u}_{k+1,i}\|$,判断是否收敛,若收敛,进入第(5)步,否则重新转至第(1)步。

(5)令 $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_{k+1,i}$,结合第 $i-1$ 级荷载步的最终位移 \mathbf{u}_{i-1} ,由式(14)~(16)计算 $-p'_s$ 。

(6)令 $p_s = p'_s$,由式(13)计算 $\mathbf{F}_{sc}, \mathbf{F}_{sc}$ 并入第 $i+1$ 级荷载 \mathbf{P}_{i+1} ,进入下一荷载步运算。

图 7 为计算流程。

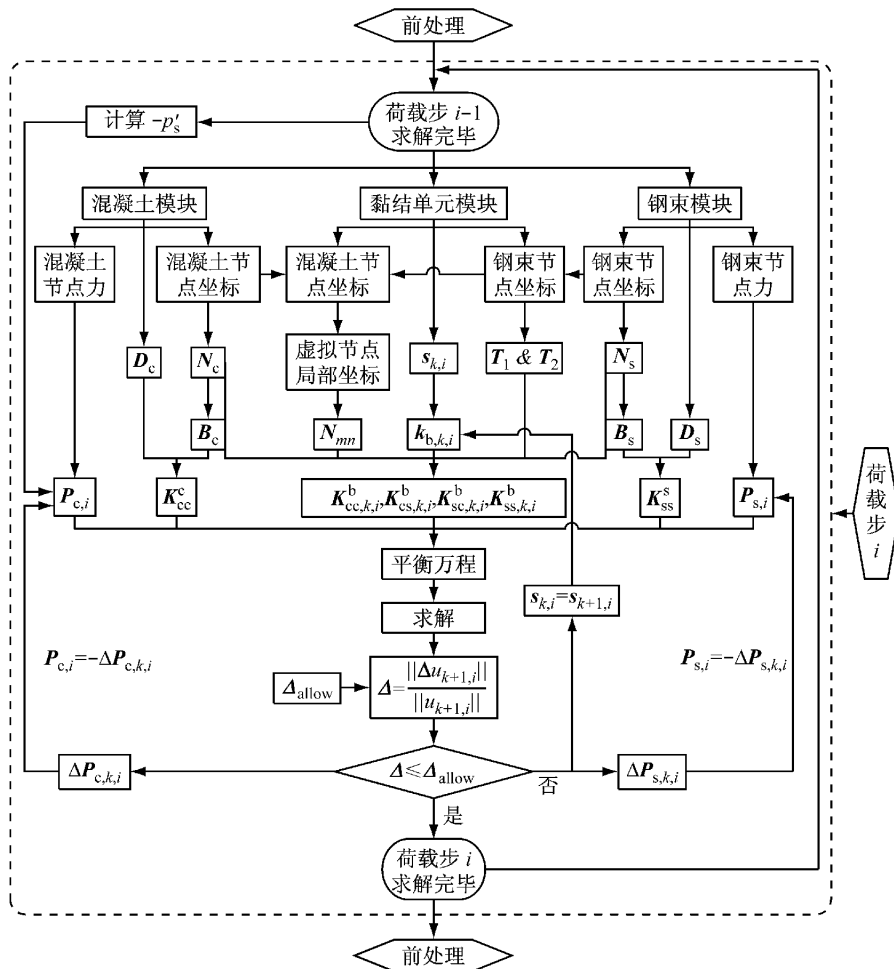


图 7 计算流程

Fig.7 Basic flow procedure of program

6 算例

Ayoub 等^[19]采用梁柱单元、桁架单元和弹簧单元分别模拟混凝土、预应力钢筋和两者交界面,编制计算程序并对 Mitchell 等^[20]所做的预应力混凝土试验梁进行了分析.文中选取编号为 16/31-1865 的矩形截面简支梁,用提出的滑移模型模拟其弹性加载过程.梁体构造和加载形式如图 8 所示,其中混凝土弹性模量 $E_c = 3.45 \times 10^4$ MPa,密度 $\rho_c = 2\ 300$

$\text{kg} \cdot \text{m}^3$,预应力钢筋弹性模量 $E_s = 2.049 \times 10^{11}$ MPa,张拉控制应力 $f_s = 1\ 286$ MPa,直径 $d_s = 15.7$ mm,截面面积 $A_s = 146.4$ mm²,截面周长 $c = 50$ mm.图 9 为简支梁网格划分情况,其中混凝土单元 888 个,预应力钢筋单元 74 个,黏结单元 74 个.同时,在 ANSYS 分别采用 Link 8 单元和 Solid 95 单元模拟预应力钢筋和混凝土,建立与图 9 网格完全相同的实体有限元模型作为比对,ANSYS 模型中认为预应力钢筋和混凝土完全黏结,两者间位移通过约束方程^[21]协调.

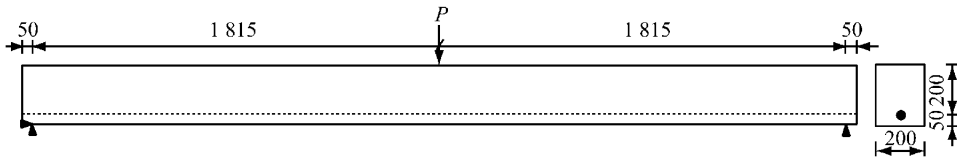


图 8 16/31-1865 号试验梁构造尺寸及布束形式(单位:mm)

Fig.8 Structural size and tendon layout of experimental beam 16/31-1865 (unit: mm)

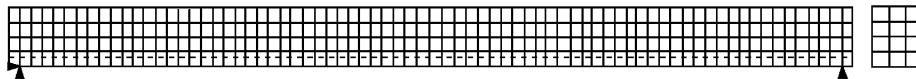


图 9 16/31-1865 号试验梁有限元网格划分

Fig.9 Finite element mesh of experimental beam 16/31-1865

弹性加载分 4 级荷载步.荷载步 1,预应力筋张拉及锚固;荷载步 2~4,跨中集中力 P 按 $0 \rightarrow 10$ kN, $10 \rightarrow 20$ kN, $20 \rightarrow 30$ kN 逐级加载.将本程序、ANSYS 和 Ayoub 程序计算得到的荷载-跨中位移结果列于图 10,可以看出,4 条曲线的发展规律是一致的.首先,预应力筋初始锚固时,跨中截面出现反拱;此后,随着集中力 P 的逐级增大,跨中变形逐渐由上拱转为下挠.其中,本程序与 ANSYS 计算得到的荷载-位移线最为接近,这是由于两者有限元模型中的单元类型和网格布置完全相同.由于本程序考虑了预应力钢筋的滑移,而 ANSYS 模型假设预应力钢筋与混凝土完全黏结,因此本程序模型中预应力钢筋对结构刚度的贡献应小于 ANSYS 模型中预应力钢筋对结构刚度的贡献,亦即本程序模型的整体刚度应小于 ANSYS 模型的整体刚度.即在同一荷载水平下,本程序计算的位移值应大于 ANSYS 计算的位移值,这在图 10 中亦有体现. Ayoub 模型虽考虑了预应力钢筋的滑移,但由于单元形式、网格布置、荷载处理方式的不同,其结果与本程序有一定差别,第一荷载步末相差最大,为 18%.

沿梁体纵向的分布情况示于图 11,图 11a,11b 分别对应荷载步 1 和荷载步 4.无论是初始锚固时刻,或是弹性加载结束时刻,钢束滑移量和黏结应力沿梁体纵向分布均相对跨中对称.由于局部锚固应力影响,梁端混凝土的压力及变形比跨中混凝土大,造成钢束滑移量和黏结应力的峰值位置出现在梁端,经过一段长度的过渡区,钢束滑移量和黏结应力在跨中达到并维持在稳定水平.

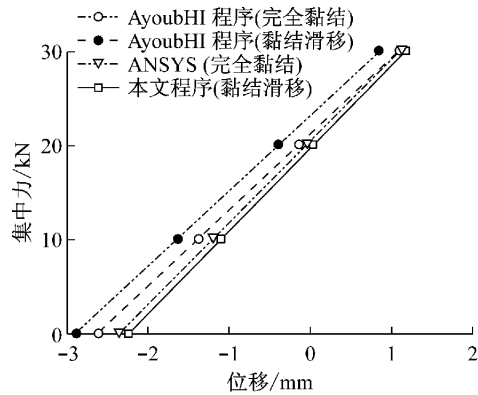


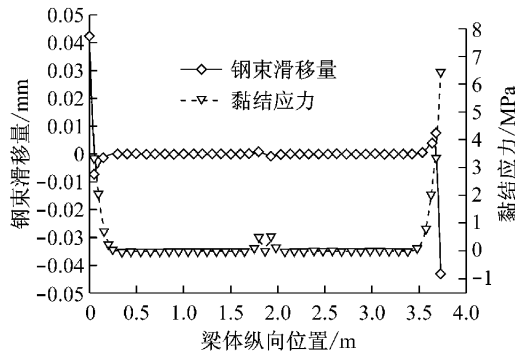
图 10 弹性荷载步下跨中位移发展曲线对比

Fig.10 Displacement development curves at midspan under graded elastic load

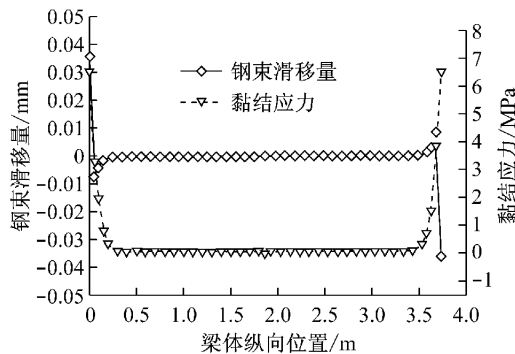
将本程序计算的钢束滑移量和切向黏结应力

图 12 为预应力钢筋锚固后钢束预应力损失和

永存应力沿梁体纵向的分布情况,两者均关于跨中对称,但分布规律正好相反.对于预应力损失,梁端处最大,达 105 MPa,为张拉控制应力的 8%,然后逐渐向跨中衰减过渡,直至稳定在 46 MPa 上下水平.对于永存应力,最大值出现在跨中,梁端处则相对较小,说明钢束在锚固后,内部预应力需经过一段传递长度才能达到稳定,这与 Ayoub 的研究结论完全一致.



a 弹性荷载步 1



b 弹性荷载步 4

图 11 弹性荷载步下钢束滑移量及黏结应力沿梁体纵向分布
Fig. 11 Distribution of tendon slippage and bond stress along the beam

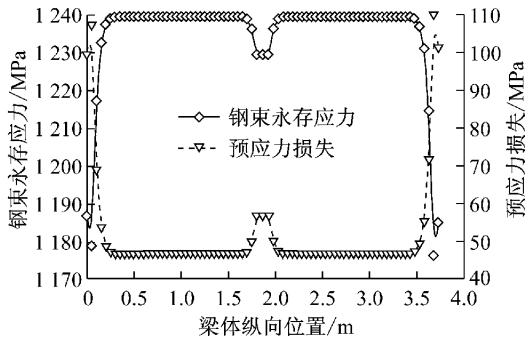


图 12 初始锚固后钢束永存应力及预应力损失沿梁体纵向分布

Fig. 12 Distribution of eternal stress in tendon and prestress loss along beam after anchorage

将钢束永存应力沿梁体纵向分布随荷载步的发

展示于图 13,可以看出,随着集中力的逐级增大,钢束永存应力水平亦逐渐增大,其中跨中处增幅明显,梁端处则较小,分布规律逐渐由水平线发展为倒三角,与集中力作用下的简支梁跨中弯矩图形状相似.说明随着外荷载增加,简支梁跨中弯矩逐渐增大,预应力钢筋越来越多地参与到结构抗力.

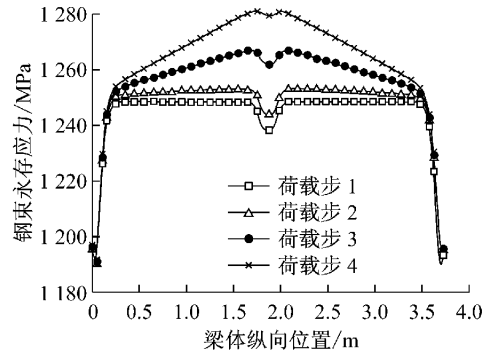


图 13 钢束永存应力随弹性荷载步的发展

Fig. 13 Development of eternal stress in tendon under graded elastic loads

7 结论

(1)提出一种预应力混凝土空间组合式滑移模型,以无厚度黏结单元模拟预应力钢筋和混凝土交界面,该模型结合传统组合式模型和分离式模型的优点,允许预应力钢筋能以任意形式穿过混凝土单元而不需考虑其布置和走向,网格划分灵活.

(2)基于位移有限元框架,由虚功原理推导滑移模型的有限元平衡方程,对单个组合单元的滑移模型而言,2个虚拟节点的6个自由度在平衡方程集成过程中得到缩减,相比分离式模型,自由度数减少 8%.

(3)通过预应力混凝土矩形截面简支梁算例,验证了滑移模型弹性计算结果的准确性,利用该模型可方便提取钢束滑移量、黏结应力、应力损失等信息.

参考文献:

[1] 吕西林,金国芳,吴晓涵. 钢筋混凝土结构非线性有限元理论与应用[M]. 上海:同济大学出版社,1997.
LÜ Xilin, JIN Guofang, WU Xiaohan. Nonlinear finite element method for steel-bar-reinforced concrete structures and applications [M]. Shanghai: Tongji University Press, 1997.
[2] Maekawa K, Pimanimas A, Okamura H. Nonlinear mechanics of reinforced concrete[M]. New York: Spon Press, 2003.
[3] Palermo D, Vecchio F J. Compression field modeling of

- reinforced concrete subjected to reversed loading: formulation [J]. *ACI Structural Journal*, 2003, 100(5): 616.
- [4] Kwak H G, Filippou F C. Finite element analysis of reinforced concrete structures under monotonic loads [R]. Berkeley: University of California, Berkeley, 1990.
- [5] 马诚,陈惟珍. PC 桥梁预应力和徐变耦合时变效应的数值模拟[J]. *桥梁建设*, 2013, 43(3): 77.
MA Cheng, CHEN Weizhen. Numerical simulation of coupling time-varying effect of prestress and creep of PC bridge [J]. *Bridge Construction*, 2013, 43(3): 77.
- [6] 沈聚敏,王传志,江见鲸. 钢筋混凝土有限元与板壳极限分析[M]. 北京:清华大学出版社,1993.
SHEN Jumin, WANG Chuanzhi, JIANG Jianjing. Finite element analysis on reinforced concrete and the ultimate analysis on slab and shell [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1993.
- [7] 朱伯芳. 有限单元法原理与应用[M]. 北京:中国水利水电出版社,1998.
ZHU Bofang. The finite element method theory and applications [M]. Beijing: China WaterPower Press, 1998.
- [8] Kang Y J. Nonlinear geometric, material, and time-dependent analysis of reinforced and prestressed concrete frames [D]. Berkeley: University of California, Berkeley, 1977.
- [9] Van Zyl S F, Scordelis A C. Analysis of curved, prestressed, segmental bridges [J]. *Journal of the Structural Division*, ASCE, 1979, 105(11): 2399.
- [10] Van Greunen J, Scordelis A C. Nonlinear analysis of prestressed concrete slabs [J]. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, 1983, 109(7): 1742.
- [11] Roca P, Mari A R. Nonlinear geometric and material analysis of prestressed concrete general shell structures[J]. *Computers and Structures*, 1993, 46(5): 905.
- [12] Wu X H, Otani S, Shiohara H. Tendon model for nonlinear analysis of prestressed concrete structures [J]. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, 2001, 127(4): 398.
- [13] 龙渝川,张楚汉,周元德. 钢筋混凝土嵌入式滑移模型[J]. *工程力学*, 2007(S1): 41.
LONG Yuchuan, ZHANG Chuhan, ZHOU Yuande. Embedded slip model for analyzing reinforced concrete structures [J]. *Engineering Mechanics*, 2007(S1): 41.
- [14] 宋天霞,黄荣杰,杜太生. 钢筋混凝土非线性有限元及其优化设计[M]. 武汉:华中科技大学出版社,2003.
SONG Tianxia, HUANG Rongjie, DU Taisheng. Reinforced concrete nonlinear finite element and optimal design [M]. Wuhan: Huazhong University of Science and Technology Press, 2003.
- [15] Nilson A H. Nonlinear analysis of reinforced concrete by the finite element method [J]. *ACI Journal*, 1968, 65(9): 757.
- [16] Mirza S M, Houde J. Study of bond stress-slip relationships in reinforced concrete [J]. *ACI Journal*, 1979, 76(1): 19.
- [17] Eligehausen R, Popov E P, Bertero V V. Local bond stress-slip relationships of deformed bars under generalized excitations [R]. Berkeley: University of California, Berkeley, 1983.
- [18] Casanova A, Jason L, Davenne L. Bond slip model for the simulation of reinforced concrete structures [J]. *Engineering Structures*, 2012, 39: 66.
- [19] Ayoub A, Filippou F C. Finite-element model for pretensioned prestressed concrete girders [J]. *Journal of Structural Engineering*, 2010, 136: 401.
- [20] Mitchell D, Cook W D, Khan A A, *et al.* Influence of high strength concrete on transfer and development length of pretensioning strand [J]. *PCI Journal*, 1993, 14(4): 62.
- [21] 王新敏. ANSYS 工程结构数值分析[M]. 北京:人民交通出版社,2007.
WANG Xinmin. Numerical analysis of engineering structures [M]. Beijing: China Communications Press, 2007.