

采用 Chang 方法的混合试验的稳定性和精度

彭天波¹, 谢馨¹, 曾忠¹, 于训涛^{1,2}

(1. 同济大学土木工程防灾国家重点实验室, 上海 200092; 2. 同济大学建筑设计研究院(集团)有限公司, 上海 200092)

摘要: 推导了采用 Chang 方法的混合试验的控制公式, 并采用 MATLAB 分析软件建立了基于 Chang 方法的混合试验数值模拟平台. 为研究误差对采用 Chang 方法混合试验的稳定性和精度所造成的影响, 推导了两种时滞误差影响下采用 Chang 方法的混合试验的收敛性公式, 并利用数值模拟平台对收敛性理论结果进行验证. 采用上述平台, 从周期误差率和幅值误差率的角度研究了误差对采用 Chang 方法的混合试验精度的影响.

关键词: 混合试验; Chang 方法; 稳定性; 精度

中图分类号: TU311.3

文献标志码: A

Stability and Accuracy of Shaking Table-actuator Hybrid Test with Chang Method

PENG Tianbo¹, XIE Xin¹, ZENG Zhong¹, YU Xuntao^{1,2}

(1. State Key Laboratory of Disaster Reduction in Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. Tongji Architectural Design(Group) Co. Ltd., Shanghai 200092, China)

Abstract: The formula of shaking table-actuator hybrid test STAHT with Chang Method is deduced firstly and the numerical simulation platform based on Chang Method is established using software MATLAB. As errors are inevitable in STAHTs, the effects of errors on the stability and accuracy of STAHT with Chang Method are discussed with theoretical method and the numerical simulation platform is used to verify the theoretical results.

Key words: shaking table-actuator hybrid test; Chang Method; stability; accuracy

试验是研究结构地震性能的有效手段, 目前常用的结构抗震试验包括拟静力试验、振动台试验、拟动力试验及近些年发展起来的混合试验. 拟静力试验^[1] 又称低周反复荷载试验, 是指对结构构件施加

低频循环荷载, 从而得到试验结构的振动性能, 包括恢复力模型、阻尼比、骨架曲线等. 振动台试验可以通过振动台输入地震波, 真实模拟结构在地震作用下的响应, 是了解结构动力破坏机理最直接和准确的方法. 拟动力试验^[2-4] 也称计算机-作动器实时试验或混合试验, 它结合了拟静力试验和子结构技术, 将计算机与作动器联机求解, 试验过程包括数值计算、荷载控制、反应输出. 在拟动力试验基础上, 采用快速加载的方法, 能够研究率相关构件的性能^[5].

随着研究工作的深入发展, 各种试验的缺点也逐渐显现. 在拟静力试验中, 地震荷载用循环荷载代替, 该方法不能模拟工程结构在实际地震作用下的反应; 在振动台试验中, 由于受振动台尺寸和承载力的限制, 试件的尺寸受到限制; 在拟动力试验中, 试验结构离散为有限自由度, 该方法不能用于连续质量的复杂结构.

为了克服上述试验方法的缺点, Tamura 等^[4] 首次提出了振动台-作动器混合试验(STAHT) 的设想. 这种方法结合了试验子结构、实时拟动力和振动台技术, 是研究复杂结构地震反应的理想方法.

日本的 Kausel^[6-7] 阐述了混合试验的理念, 将试验模型的外部激励分为两部分, 一部分由地震模拟振动台施加, 另外一部分由作动器施加. 通过单自由度体系进行了原理说明, 并指出混合试验方法对于材料非线性和几何非线性的复杂系统也适用. 尤其是在必须考虑地面运动对构件影响时, 混合试验方法更显示了它的广泛适用性.

纽约州立大学布法罗分校的 Andrei 等^[8-10] 利用地震模拟振动台和作动器装置对两层结构进行了混合试验. Shao 等^[11] 对一个三层线性阻尼的框架结构进行了混合试验, 验证了多层框架结构混合试验的可行性.

收稿日期: 2013-12-03

基金项目: 国家自然科学基金(51278372); 科技部国家重点实验室基础研究项目(SLDRCE 08-B-04)

第一作者: 彭天波(1974—), 男, 副研究员, 工学博士, 主要研究方向为桥梁抗震. E-mail: ptb@tongji.edu.cn

通讯作者: 于训涛(1987—), 男, 工学硕士, 主要研究方向为桥梁抗震. E-mail: yuxuntao@163.com

哈尔滨工业大学吕丽娟等^[12]也对混合试验方法进行过深入研究,研究了该方法的基本原理、边界条件的模拟方法以及输入激励的拆分原则等问题.王向英等^[13]在国内率先完成了以一层框架结构为试验子结构的混合试验,验证了结构混合试验方法的可行性.

混合试验中,试验模型分为试验子结构和数值子结构两部分.试验子结构置于振动台上进行试验,数值子结构由计算机进行数值模拟.通常将结构的非线性部分或者打算重点研究的部分作为试验子结构,通过振动台和作动器混合输入模拟结构的地震响应.其中,振动台输入模拟地震作用对试验子结构的影响,作动器输入模拟数值子结构对试验子结构的影响.试验子结构的恢复力可以通过实际测量得到,而数值子结构部分则需进行数值计算,用数值积分方法求解结构的反应,因此积分算法对于混合试验来说是至关重要的.对于一种算法而言,其核心就是稳定性和精度.所谓直接积分算法的稳定性,是指如果在任何时间步长 Δt 条件下,对于任何初始条件微分方程的解不无限制地增长,则称此积分方法是无条件稳定的;如果 Δt 大于某个临界值 Δt_c ,方程的解会无限制地增长,则称此方法是有条件稳定. Newmark^[14], Hilber 等^[15], Hughes^[16] 运用放大矩阵及其特征值对不同积分算法的稳定性和精度进行了研究. Chang^[17] 对 Chang 方法进行了研究,得出 Chang 方法是一种无条件稳定算法的结论.

然而,混合试验中的误差是不可避免的.迄今为止,还未见关于误差对混合试验稳定性和精度影响的研究.因此,本文旨在研究误差对采用 Chang 方法的混合试验的稳定性和精度的影响,建立了基于 Chang 方法的数值模拟平台,利用该平台研究误差模式下采用 Chang 方法的混合试验的稳定性和精度.

1 基于 Chang 方法的数值模拟平台

Chang 方法^[18]是台湾学者 Chang S Y 于 1999 年提出的一种无条件稳定的显示算法,其假定如下:

$$\begin{cases} d_{i+1} = d_i + \beta_1 \Delta t v_i + \beta_2 (\Delta t)^2 a_i \\ v_{i+1} = v_i + \frac{1}{2} \Delta t a_i + \frac{1}{2} \Delta t a_{i+1} \end{cases} \quad (1)$$

式中: Δt 表示积分步长;下标 i 表示积分步; a, v, d 分别表示与下标相对应的加速度、速度、位移; β_1, β_2 分别表示与质量、刚度、阻尼等有关的参数,在第 i 步时,

$$\beta_1 = \left(1 + \frac{c}{2m} \Delta t\right) \left[1 + \frac{c}{2m} \Delta t + \frac{k}{4m} (\Delta t)^2\right]^{-1}$$

$$\beta_2 = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{c}{2m} \Delta t + \frac{k}{4m} (\Delta t)^2\right]^{-1}$$

式中: m 表示质量; c 表示阻尼; k 表示刚度.

简便起见,本文以两层剪切框架(图 1)为例,推导基于混合试验 Chang 方法的实现.多自由度体系的混合试验控制公式,可以采用相同的方法推导得到.

取两层剪切框架的底层框架作为试验子结构,上层框架作为数值子结构,该剪切框架可简化为图 2 所示的两自由度体系.

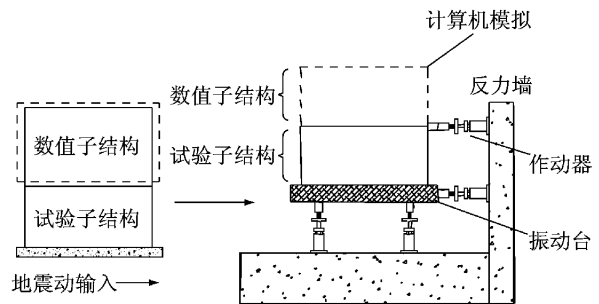


图 1 两层剪切型框架混合试验示意图

Fig. 1 Schematic diagram of an STAHT with a two-story frame structure

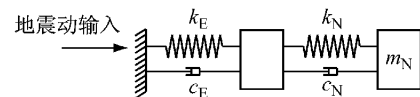


图 2 两层剪切型框架简化图

Fig. 2 The simplified model for a two-story frame structure

两自由度体系的运动方程为

$$\begin{bmatrix} m_E & m_N \\ 0 & m_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_E \\ a_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_E & 0 \\ 0 & c_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_E - v_g \\ v_N - v_E \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_E & 0 \\ 0 & k_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_E - d_g \\ d_N - d_E \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

式中:下标 N, E 和 g 分别代表数值子结构、试验子结构及地面运动; m, c, k 分别表示与下标对应的质量、阻尼、刚度; a, v, d 分别表示与下标对应的加速度、速度、位移.

第 i 步的运动方程为

$$\begin{bmatrix} m_E & m_N \\ 0 & m_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{E,i+1} \\ a_{N,i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_E & 0 \\ 0 & c_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{g,i+1} - v_{E,i+1} \\ v_{E,i+1} - v_{N,i+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{E,i+1} & 0 \\ 0 & k_{N,i+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{g,i+1} - d_{E,i+1} \\ d_{E,i+1} - d_{N,i+1} \end{bmatrix} \quad (3)$$

在混合试验中, m_N, m_E, c_N, c_E 都是试验之前已

知的. 假定数值子结构是线性结构, $k_{N,i}$ 不变, 采用恒定值 k_N ; 而试验子结构一般为非线性构件, $k_{E,i}$ 变化幅度很大, 但由于每个加载的时间步都很短, 可以假定在一个时间步内, 试验子结构的刚度 $k_{E,i}$ 变化不大.

第 i 步测得的作动器的反力 F_i 和试验子结构的位移 $d_{E,i}$ 有如下关系:

$$F_i = k_{E,i}(d_{g,i} - d_{E,i}) + c_E(v_{g,i} - v_{E,i}) \quad (4)$$

将式(4)代入式(3), 得

$$\begin{bmatrix} m_E & m_N \\ 0 & m_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{E,i+1} \\ a_{N,i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_E & 0 \\ 0 & c_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{E,i+1} - v_{g,i+1} \\ v_{N,i+1} - v_{E,i+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{F_i - c_E(v_{g,i} - v_{E,i})}{d_{g,i} - d_{E,i}} & 0 \\ 0 & k_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{g,i+1} - d_{E,i+1} \\ d_{E,i+1} - d_{N,i+1} \end{bmatrix} \quad (5)$$

由 Chang 方法的假设得

$$\begin{cases} d_{E,i+1} = d_{E,i} + \beta_{11,i} \Delta t v_{E,i} + \beta_{12,i} (\Delta t)^2 a_{E,i} \\ v_{E,i+1} = v_{E,i} + \frac{1}{2} \Delta t a_{E,i} + \frac{1}{2} \Delta t a_{E,i+1} \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} d_{N,i+1} = d_{N,i} + \beta_{21} \Delta t v_{N,i} + \beta_{22} (\Delta t)^2 a_{N,i} \\ v_{N,i+1} = v_{N,i} + \frac{1}{2} \Delta t a_{N,i} + \frac{1}{2} \Delta t a_{N,i+1} \end{cases} \quad (7)$$

其中:

$$\beta_{11} = \left(1 + \frac{c_E}{2m_E} \Delta t\right) \cdot$$

$$\left[1 + \frac{c_E}{2m_E} \Delta t + \frac{F_i - c_E(v_{g,i} - v_{E,i})}{4m_E(d_{g,i} - d_{E,i})} (\Delta t)^2\right]^{-1}$$

$$\beta_{12} = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{c_E}{2m_E} \Delta t + \frac{F_i - c_E(v_{g,i} - v_{E,i})}{4m_E(d_{g,i} - d_{E,i})} (\Delta t)^2\right]^{-1}$$

$$\beta_{21} = \left(1 + \frac{c_N}{2m_N} \Delta t\right) \left[1 + \frac{c_N}{2m_N} \Delta t + \frac{k_N}{4m_N} (\Delta t)^2\right]^{-1}$$

$$\beta_{22} = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{c_N}{2m_N} \Delta t + \frac{k_N}{4m_N} (\Delta t)^2\right]^{-1}$$

将式(6), (7)代入式(5), 得到数值子结构和试验子结构第 $i+1$ 步的控制公式为

$$\begin{aligned} a_{N,i+1} &= \frac{(2m_E + c_E \Delta t + c_N \Delta t)}{c_N \Delta t} \cdot \\ &\left(\frac{1}{2} c_N \Delta t A_i + \left(\frac{1}{2} c_N \Delta t + m_N\right) B_i\right) / \\ &\left[\left(m_E + \frac{1}{2} c_E \Delta t + \frac{1}{2} c_N \Delta t\right) m_N + \right. \\ &\left.\left(m_E + \frac{1}{2} c_E \Delta t\right) \frac{1}{2} c_N \Delta t\right] - \frac{2B_i}{c_N \Delta t} \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} a_{E,i+1} &= \left[\frac{1}{2} c_N \Delta t A_i + \left(\frac{1}{2} c_N \Delta t + m_N\right) B_i\right] / \\ &\left[\left(m_E + \frac{1}{2} c_E \Delta t + \frac{1}{2} c_N \Delta t\right) m_N + \right. \end{aligned}$$

$$\left.\left(m_E + \frac{1}{2} c_E \Delta t\right) \frac{1}{2} c_N \Delta t\right] \quad (9)$$

$$v_{N,i+1} = v_{N,i} + \frac{1}{2} \Delta t a_{N,i} + \frac{1}{2} \Delta t a_{N,i+1} \quad (10)$$

$$v_{E,i+1} = v_{E,i} + \frac{1}{2} \Delta t a_{E,i} + \frac{1}{2} \Delta t a_{E,i+1} \quad (11)$$

$$d_{N,i+1} = d_{N,i} + \beta_{21} \Delta t v_{N,i} + \beta_{22} (\Delta t)^2 a_{N,i} \quad (12)$$

$$d_{E,i+1} = d_{E,i} + \beta_{11,i} \Delta t v_{E,i} + \beta_{12,i} (\Delta t)^2 a_{E,i} \quad (13)$$

其中:

$$\begin{aligned} A_i &= c_N \left(v_{E,i} \Delta t + \frac{1}{2} a_{E,i} \Delta t\right) - \\ &c_N \left(v_{N,i} \Delta t + \frac{1}{2} a_{N,i} \Delta t\right) + \\ &k_N \left[(d_{E,i} + \beta_{11,i} \Delta t v_{E,i} + \beta_{12,i} (\Delta t)^2 a_{E,i}) - \right. \\ &\left.(d_{N,i} + \beta_{21} \Delta t v_{N,i} + \beta_{22} (\Delta t)^2 a_{N,i})\right] \end{aligned}$$

$$B_i = c_E v_{g,i+1} - c_E \left(v_{E,i} \Delta t + \frac{1}{2} a_{E,i} \Delta t\right) -$$

$$c_N \left(v_{E,i} \Delta t + \frac{1}{2} a_{E,i} \Delta t\right) +$$

$$c_N \left(v_{N,i} \Delta t + \frac{1}{2} a_{N,i} \Delta t\right) +$$

$$\frac{F_i - c_E(v_{g,i} - v_{E,i})}{d_{g,i} - d_{E,i}} [d_{g,i+1} - (d_{E,i} +$$

$$\beta_{11,i} \Delta t v_{E,i} + \beta_{12,i} (\Delta t)^2 a_{E,i})] - k_N [(d_{E,i} + \beta_{11,i} \Delta t v_{E,i} + \beta_{12,i} (\Delta t)^2 a_{E,i}) - (d_{N,i} + \beta_{21} \Delta t v_{N,i} + \beta_{22} (\Delta t)^2 a_{N,i})]$$

使用 MATLAB 编程计算基于 Chang 方法的混合试验各子步的控制信息, 加载方式包括力控制加载方式和位移控制加载方式, 这两种加载模式采用的算法相同, 但是计算机采集的数据不同, 作动器施加的命令也不同. 力控制加载方式是指作动器采用力控制, 力的大小等于数值子结构的惯性力, 模拟数值子结构对试验子结构的水平力, 采集作动器的位移作为反馈, 用于下一步的积分计算; 位移控制加载方式是指作动器采用位移控制, 位移大小为数值子结构和试验子结构交互面的绝对位移, 模拟数值子结构对试验子结构的水平位移作用, 采集作动器的反馈力, 用于下一步的积分计算. 采用两种加载方式建立的数值仿真计算平台的流程如图 3, 4 所示.

2 误差对 Chang 方法稳定性的影响

混合试验中的误差是不可避免的, 振动台施加的地震动加速度误差、作动器施加的力或位移误差、结构反应采集误差、时滞引起的试验子结构与数值子结构间作用力误差等, 都会对 Chang 方法的稳定

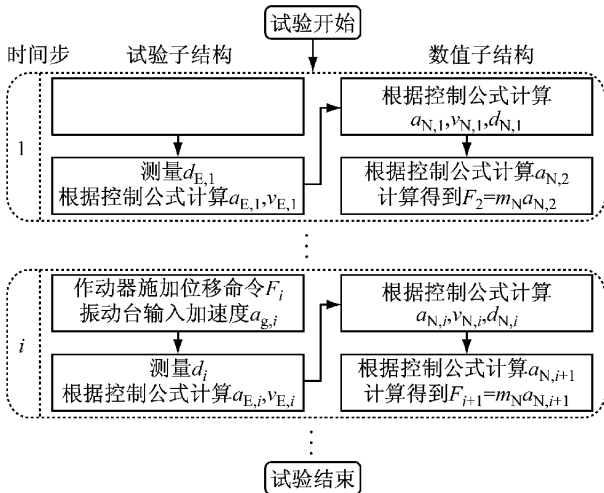


图 3 基于 Chang 方法的混合试验力控制加载流程图

Fig. 3 Flow chart for STAHT performed in load control mode with Chang Method

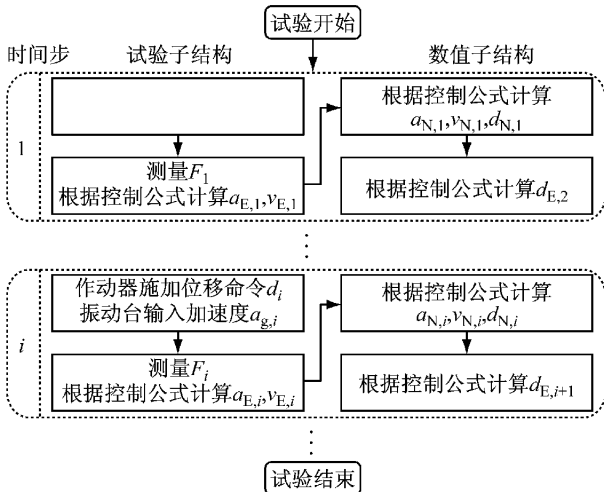


图 4 基于 Chang 方法的混合试验位移控制加载流程图

Fig. 4 Flow chart for STAHT performed in displacement control mode with Chang Method

性和精度造成影响. 因此,有必要研究误差模式下混合试验的稳定性和精度问题.

采用数值积分算法求解混合试验中试验子结构和数值子结构的动力平衡方程时, n 个自由度的运动方程组解耦成 n 个广义单自由度体系运动方程后, 性质不发生变化. 而稳定性条件对应着任意初始条件, 所以进行稳定性分析时, 可以考虑单自由度体系的自由振动问题. 运用基于 Chang 方法的数值模拟平台, 进行误差对 Chang 方法稳定性和精度的影响的研究, 对单自由度自由振动体系进行研究. 加载模式采用位移控制加载, 考虑两种力的误差模式. 误差影响下体系的平衡方程表示为

$$m(a_{i+1} + \Delta a_{i+1}) - k(d_{i+1} - d_{g,i+1}) = 0 \quad (14)$$

2.1 恒定误差的影响

第一种误差是与作动器最大量程相关的一个恒定误差, 由下式表示:

$$\Delta F_{i+1} = e_1 F_0 \quad (15)$$

式中: ΔF_{i+1} 为第 $i+1$ 步的恢复力误差; e_1 为误差与作动器量程之比; F_0 为作动器的最大力量程.

第 $i+1$ 步的恒定加速度误差表示为

$$\Delta a_{i+1} = \Delta F_{i+1} / m = e_1 F_0 / m \quad (16)$$

将式(15)代入式(14)得

$$m(a_{i+1} + e_1 F_0 / m) - k(d_{i+1} - d_{g,i+1}) = 0 \quad (17)$$

联立式(1)和(17), 得到考虑恒定误差项的 Chang 方法的放大矩阵 A_1 .

$$\begin{bmatrix} a_{i+1} \\ v_{i+1} \\ d_{i+1} \end{bmatrix} = A_1 \begin{bmatrix} a_i \\ v_i \\ d_i \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2\beta\Delta t & \beta(\Delta t)^2 \\ -\frac{k\Delta t}{2m} & 1 - \frac{k\Delta t}{m}\beta\Delta t & \frac{\Delta t}{2} - \frac{k\Delta t}{2m}\beta(\Delta t)^2 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{2k}{m}\beta\Delta t & -\frac{k}{m}\beta(\Delta t)^2 \end{bmatrix} \quad (19)$$

其中: $\beta = \frac{2}{4 + \Omega^2}$, $\Omega^2 = \frac{k(\Delta t)^2}{m}$.

根据特征方程 $|A_1 - \lambda E| = 0$ (E 表示单位矩阵), 得 A_1 的特征值 $\lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = a \pm ib = \left[1 - \frac{2\Omega^2}{(4 + \Omega^2)}\right] \pm i\sqrt{1 - \left(\frac{2\Omega^2}{4 + \Omega^2} - 1\right)^2}$. 稳定性条件为放大矩阵的谱半径 $\rho(A_1) \leq 1$, 而 $\rho(A_1) = \sqrt{a^2 + b^2} = 1$. 因此在恒定误差的影响下, Chang 方法仍然是无条件稳定的. 这是因为恒定误差与作动器施加的力无关, 对采用 Chang 方法的混合试验的稳定性没有影响.

2.2 等比误差的影响

第二种误差模式是与作动器信号成正比例关系的等比误差, 由下式表示:

$$\Delta F_{i+1} = e_2 F_{i+1} \quad (20)$$

式中: e_2 为误差与作动器信号之比.

等比加速度误差为

$$\Delta a_{i+1} = \Delta F_{i+1} / m = e_2 F_{i+1} / m = e_2 a_{i+1} \quad (21)$$

代入式(14)得

$$m(a_{i+1} + e_2 a_{i+1}) - k(d_{i+1} - d_{g,i+1}) = 0 \quad (22)$$

联立式(1)和式(22), 得到考虑等比误差影响的放大矩阵 A_2 .

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2\beta\Delta t \\ -\frac{k\Delta t}{2m(1+e_2)} & 1 - \frac{k\Delta t}{m(1+e_2)}\beta\Delta t \\ -\frac{k}{m(1+e_2)} & -\frac{2k}{m(1+e_2)}\beta\Delta t \\ \frac{\Delta t}{2} - \frac{k\Delta t}{2m(1+e_2)}\beta(\Delta t)^2 & -\frac{k}{m(1+e_2)}\beta(\Delta t)^2 \end{bmatrix} \quad (23)$$

根据 $|\mathbf{A}_2 - \lambda E| = 0$ 得矩阵 \mathbf{A}_2 的特征值: $\lambda_1 = 0$,

$$\lambda_{2,3} = a \pm ib = \left[1 - \frac{2\Omega^2}{(4 + \Omega^2)(1 + e_2)} \right] \pm i \sqrt{1 - \left[\frac{2\Omega^2}{(4 + \Omega^2)(1 + e_2)} - 1 \right]^2}$$

根据稳定性条件 $\rho(\mathbf{A}_2) = \sqrt{a^2 + b^2} = 1$, 得

$$e_2 > 0 \text{ 或 } e_2 < 0, \Omega^2 < \frac{4(1 + e_2)}{-e_2}$$

因此, 当 $e_2 > 0$ 时, Chang 方法无条件收敛; 当 $e_2 < 0$ 时, Chang 方法的收敛准则为

$$T_n = 2\pi \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi\Delta t}{\Omega} > \pi\Delta t \sqrt{\frac{-e_2}{1 + e_2}}$$

式中: T_n 为体系的最小自振周期。

T_n 与 e_2 在不同时间步长下的关系如图 5 所示。

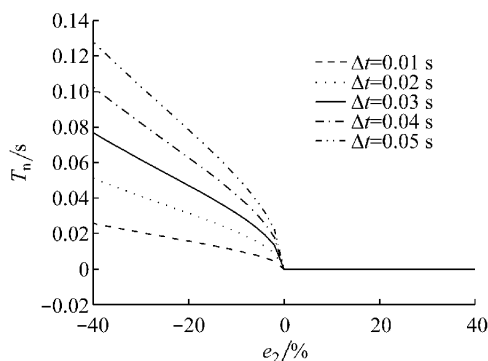


图 5 T_n 与 e_2 误差关系曲线

Fig. 5 The relation of T_n to e_2 for different time intervals

由图 5 可以看出, 当 $e_2 > 0$ 时, 对任何结构算法无条件稳定; 当 $e_2 < 0$ 时, 结构的最小自振周期 T_n 随着时间步长 Δt 和 e_2 的增大而增大。

利用数值模拟平台对 Chang 方法的稳定性进行验证, 分别选取表 1 所示的两组结构参数。根据上文理论推导的收敛条件可知, 当 $\Delta t = 0.02$ s 且 $e_2 = -10\%$ 时, 临界收敛周期 $T_s = \pi\Delta t \sqrt{-e_2/(1 + e_2)} > 0.0209$ s。基于 Chang 方法的数值模拟平台的计算结果如表 1 及图 6 所示。

表 1 数值模拟平台参数表

Tab. 1 The parameters of numerical simulation platform

算例	$\Delta t/s$	$e_2/\%$	$k/(kN \cdot m^{-1})$	m/t	T_n/s	T_s/s	是否收敛
1	0.02	-10	5×10^6	56	0.021 0	0.020 9	是
2	0.02	-10	5×10^6	55	0.020 8	0.020 9	否

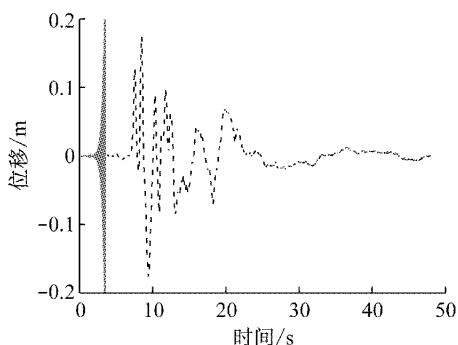


图 6 收敛准则数值验证

Fig. 6 Numerical verification of the convergence criterion

由数值模拟平台的计算结果可以看出, $T_n < 0.0209$ s 时, 结构的位移迅速发散; $T_n > 0.0209$ s 时, 结构的位移会有小幅震荡, 但是依然是收敛的。以上结论与理论结果相符。

3 误差对 Chang 方法精度的影响

利用数值积分算法求解运动方程时, 数值解与理论解之间必然存在误差, 精度是用来衡量该误差大小的指标, 这里采用周期误差率和幅值误差率来表示。周期误差率定义为 $(T_2 - T_1)/T_1$, 幅值误差率定义为 $(d_2 - d_1)/d_1$, 如图 7 所示。考虑一个单自由度结构在矩形脉冲荷载作用下的振动问题, 外荷载的时程曲线如图 8 所示。

利用基于 Chang 方法的数值模拟平台对单自由度问题求解, 并与单自由度结构在矩形脉冲荷载作用下的理论解: $d_i = \cos(\omega_n i \Delta t)$ 进行比较, 研究误差对采用 Chang 方法的混合试验精度的影响。

3.1 恒定误差的影响

在恒定误差影响下, Chang 方法的周期误差率

与 $\Delta t/T_n$ 的关系如图 9 所示,幅值误差率与 $\Delta t/T_n$ 的关系如图 12 所示。
的关系如图 10 所示。

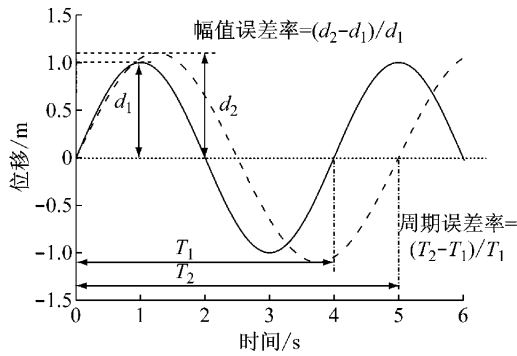


图 7 误差率定义图

Fig.7 The distortion of period and amplitude

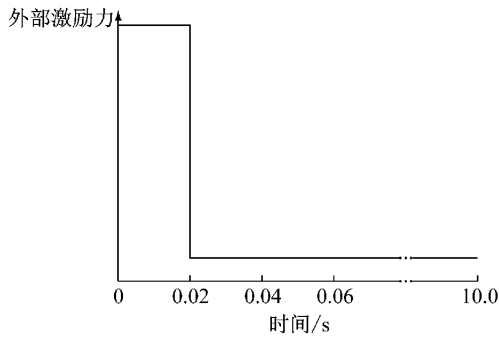


图 8 矩形脉冲荷载

Fig.8 Rectangular impulsive load

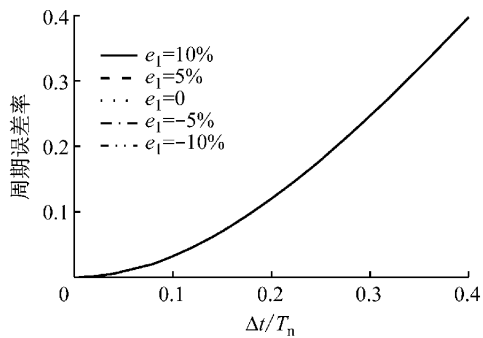


图 9 e1 误差下 $\Delta t/T_n$ 与周期误差率的关系

Fig.9 The relation of $\Delta t/T_n$ to the period distortion with e_1 error

从图 9,10 可以看出,对于不同 e_1 值, $\Delta t/T_n$ 与周期误差率的关系曲线基本重合,因此恒定误差对 Chang 方法的周期误差率影响很小。 e_1 误差对幅值误差率有一定的影响,对于一个确定的 $\Delta t/T_n$ 值, e_1 为正值时幅值偏大, e_1 为负值时幅值误差率偏小。

3.2 等比误差的影响

在 e_2 误差影响下,Chang 方法的周期误差率与 $\Delta t/T_n$ 的关系如图 11 所示,幅值误差率与 $\Delta t/T_n$ 的

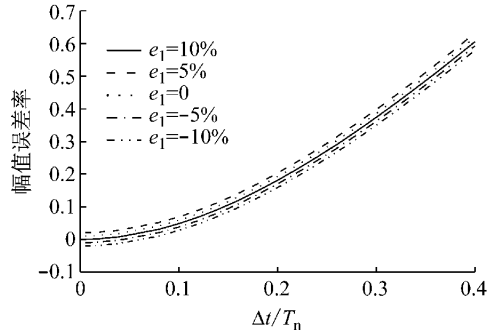


图 10 e1 误差下 $\Delta t/T_n$ 与幅值误差率的关系

Fig.10 The relation of $\Delta t/T_n$ to the amplitude distortion with e_1 error

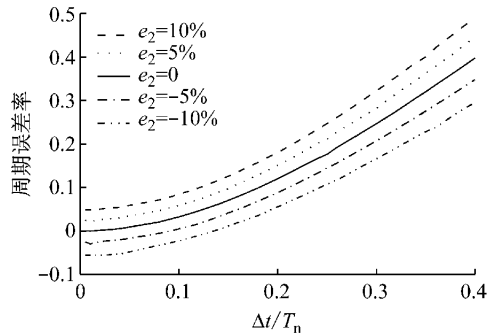


图 11 e2 误差下 $\Delta t/T_n$ 与周期误差率的关系

Fig.11 The relation of $\Delta t/T_n$ to the period distortion with e_2 error

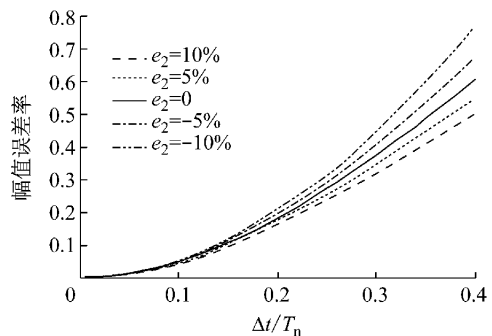


图 12 e2 误差下 $\Delta t/T_n$ 与幅值误差率的关系

Fig.12 The relation of $\Delta t/T_n$ to the amplitude distortion with e_2 error

从图 11,12 可以看出,周期误差率和幅值误差率都随时间步长 Δt 的增加而增大;对于一个确定的时间步长 Δt ,周期误差率随着 e_2 的代数值的增加而增大,幅值误差率随着 e_2 的代数值的增加而减小; e_2 为正值时周期误差率偏大,幅值误差率偏小, e_2 为负值时周期误差率偏小,幅值误差率偏大。

4 结论

针对基于 Chang 方法的数值模拟平台,研究误差模式下采用 Chang 方法的混合试验稳定性和精度,考虑恒定误差(e_1 误差)和等比误差(e_2 误差)的影响,得到如下结论:

(1) 混合试验 Chang 方法是一种无条件稳定性算法, e_1 误差不影响 Chang 方法的稳定性,但 e_2 误差对算法的稳定性有一定的影响。 e_2 为正误差值时,Chang 方法无条件收敛; e_2 为负误差值时,Chang 方法有条件收敛。

(2) e_1 误差对 Chang 方法的周期误差率的影响很小,但对幅值误差率有影响。 e_1 为正值时,幅值误差率偏大; e_1 为负值时,幅值误差率偏小。

(3) e_2 误差对 Chang 方法的周期误差率和幅值误差率均有影响。 e_2 为正值时,周期误差率偏大,幅值误差率偏小; e_2 为负值时,周期误差率偏小,幅值误差率偏大。

参考文献:

- [1] Leon R T, Deierlein G G. Consideration for the use of quasi-static test[J]. Earthquake Spectrum, 1996,12(1):87.
- [2] Takanashi K, Nakashima M. Japanese activities on on-line testing[J]. Journal of Engineering Mechanics, 1987,113(7):1014.
- [3] Nakashima M, Kato H, Takaoka E. Development of real-time pseudo dynamic testing [J]. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 1992,21(1):79.
- [4] Tamura K, Kobayashi H. Real-time hybrid vibration experiments with a 2-degree-of-freedom model [C] // Proceedings of the 30th Joint Meeting of the U S/Japan Cooperative Program in Natural Resources Panel on Wind and Seismic Effects. Gaithersburg: National Institute of Standards and Technology, 1981: 41-49.
- [5] Wang T, McCormick J, Nakashima M. Verification test of a hybrid test system with distributed column base tests[C] // Proceeding of 18th Analysis and Computation Specialty Conference. Vancouver: American Society of Civil Engineers, 2008: 1-12.
- [6] Kausel E. New seismic testing method I: fundamental concepts [J]. Journal of Engineering Mechanics, 1998, 124: 565.
- [7] Kausel E. New seismic testing method II: proof for MDOF system[J]. Journal of Engineering Mechanics, 1998, 124: 571.
- [8] Andrei M Reinhorn X, Mettupalayam V Sivaselvan. Real time dynamic hybrid testing using shake tables and force-based substructuring[C] // 17th Anniversary Computation Specialty Conference. St Louis: American Society of Civil Engineers, 2006: 1-10.
- [9] Andrei M Reinhorn, Mettupalayam Sivaselvan. Large scale real time dynamic hybrid testing technique-shake tables substructure testing[J]. Advances in Experimental Structural Engineering, 2005, 18(1): 457.
- [10] Andrei M Reinhorn M V S Z. Real-time dynamic hybrid testing of structural systems [C/CD] // 13th World Conference on Earthquake Engineering. Vancouver: [s. n.], 2004.
- [11] Shao Xiaoyun, Andrei M Reinhorn, Mettupalayam V Sivaselvan. Real-time hybrid simulation using shake tables and dynamic actuators [J]. Journal of Structural Engineering, 2011, 137(7):748.
- [12] 吕丽娟. 地震模拟振动台子结构混合试验边界条件的模拟方法研究 [D]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学, 2008.
LÜ Lijuan. Study on the boundary condition simulation of hybrid-testing[D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2008.
- [13] 王向英. 结构地震模拟振动台混合试验方法研究 [D]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学, 2010.
WANG Xiangying. Study on structural hybrid testing method with shaking table [D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2010.
- [14] Newmark N M. A method of computation for structural dynamics [J]. Journal of Engineering Mechanics Division, 1959,85(3): 67.
- [15] Hilber H M, Hughes T J R, Taylor R L. Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural mechanics [J]. Earthquake Engineering and Structure Dynamics, 1997,5(3): 283.
- [16] Hughes T J R. The finite-element method: linear static and dynamic finite-element analysis [M]. Englewood: Prentice-Hall, 1987.
- [17] Chang S Y. Explicit pseudodynamic algorithm with unconditional stability[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2002,128(9): 935.
- [18] Chang S Y. An unconditionally stable explicit algorithm in time history analysis[R]. Taipei: National Center for Research on Earthquake Engineering, 1999: NCREE-96-001.