

考虑主应力方向影响的正交各向异性土体强度

吕玺琳^{1, 2}, 钱建固^{1, 2}, 黄茂松^{1, 2}

(1. 同济大学 岩土及地下工程教育部重点实验室, 上海 200092; 2. 同济大学 土木工程学院, 上海 200092)

摘要: 利用材料组构与应力主轴的方向关系, 对椭圆型角隅函数进行修正并引入到 Mohr-Coulomb 准则, 建立了一个适用于正交各向异性土体的三维强度准则. 通过所建立的准则, 推导了考虑主应力轴方向变化影响的土体峰值应力比与中主应力比关系的计算公式, 获得了土体峰值内摩擦角随中主应力比及大主应力偏转角的变化特性. 通过与不同沉积面角度条件下的三轴试验及空心圆柱扭剪试验结果对比表明, 理论公式预测的内摩擦角与试验结果一致.

关键词: 土体强度; 主应力方向; 正交各向异性; 材料组构
中图分类号: TU 432 **文献标志码:** A

Strength of Cross-anisotropic Soils Considering Influence of Principal Stress Direction

LÜ Xilin^{1, 2}, QIAN Jiangu^{1, 2}, HUANG Maosong^{1, 2}

(1. Key Laboratory of Geotechnical and Underground Engineering of the Ministry of Education, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. College of Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: According to the relationship between the material fabric and axis of major principal stress, the elliptic shape function was revised by adding a cross-anisotropic term, and then a 3D cross-anisotropic failure criterion was proposed based on the Mohr-Coulomb criterion. The formula for calculating the peak stress ratio under different intermediate principal stress ratio condition was deduced, then the varying characteristics of peak friction angle with the intermediate principal stress ratio and the angle of major principal stress direction relative to material fabric were also obtained. A comparative study of a series of triaxial tests with different sample sedimentation angles and hollow cylinder tests shows that the predicted friction angle agrees well with the experimental results.

Key words: soil strength; principal stress direction; cross-anisotropy; material fabric

受天然沉积等多种因素影响, 实际工程中土体的强度常表现出各向异性特性. 受复杂外荷载或土体开挖卸荷的影响, 土体中的 3 个主应力不仅大小变化复杂, 且主应力方向亦发生变化, 如何合理描述复杂应力条件下土体的强度是工程中需解决的难题, 考虑到土体强度在岩土工程稳定性分析中的重要性, 有必要对其进行深入研究.

当前土体强度测定大多通过三轴试验或平面应变试验进行, 但由于这两种试验只能实现两个主应力独立加载, 因而所得结果与实际情况存在偏差. 真三轴试验由于能独立控制 3 个主应力大小而得到了广泛应用, 如盛佳韧等^[1]对上海软黏土强度特性进行了真三轴试验研究, Ye 等^[2-3]通过真三轴试验研究了超固结土强度随应力 Lode 角的变化规律, 并进一步研究了其体变特性. 近年来, 真三轴试验也被用于正交各向土体强度的研究, 如 Abelev 和 Lade^[4]通过试验研究了正交各向异性土体强度参数随中主应力的变化规律. 由于真三轴试验中应力主轴方向固定, 因此不能测定主应力方向变化对土体力学特性的影响. 空心圆柱扭剪试验不仅能实现对 3 个主应力大小的独立控制, 而且可对主应力的方向进行控制, 因而为主应力方向变化这种复杂应力路径下土体强度的研究提供了有效途径. Lin 和 Penumadu^[5]通过空心圆柱扭剪试验, 研究了土体峰值内摩擦角与主应力轴方向偏转角间的关系. 对于各向同性土体而言, 空心圆柱扭剪试验获得的试验结果与真三轴试验结果相近. 然而, Lade 等^[6]的研究结果表明, 在当土体存在各向异性时, 其空心圆柱扭剪试验得到的土体强度特性与真三轴试验结果存在较大差异. Kumruzzaman 和 Yin^[7]有关初始各向异性土体的空心圆柱扭剪试验则进一步表明, 主应力轴偏转条件下得到的峰值内摩擦角明显低于真三轴试验结果. 这种差异是由于土体各向异性引起的, 然而当前

收稿日期: 2014-05-12

基金项目: 国家“九七三”重点基础研究发展计划青年科学家专题(2014CB049100); 国家自然科学基金(U1433123); 中央高校基本科研业务费专项资金

第一作者: 吕玺琳(1981—), 男, 工学博士, 副教授, 主要研究方向为岩土力学与工程. E-mail: xilinlu@tongji.edu.cn

有关这一特性还缺乏合理的理论解释和定量描述。

有关各向异性土体的三维强度理论描述,当前大多通过对现有的各向同性强度准则修正得到,如 Pietruszczak 和 Mróz^[8]从微观角度在各向同性强度准则中引入各向异性张量,建立了各向异性强度准则,并对土体强度参数随土样切样角度的变化规律进行了研究。Gao 等^[9]通过引入微观结构张量建立了一般形式的初始各向异性强度准则。李学丰等^[10]通过引入细观组构张量,建立了一个宏细观结合的强度准则。Liu 和 Indraratna^[11]基于 SMP 模型,根据破坏面和弱剪切面间关系,提出一个考虑主应力方向影响的各向异性强度准则。吕玺琳等^[12]则根据 Mortara^[13]提出的修正偏平面形状函数的方法,基于三维 Mohr-Coulomb 准则建立了一个层状各向异性土体的强度准则,并与真三轴试验结果进行了对比验证,但该准则不能合理描述主应力方向变化对砂土强度参数的影响,因而有必要进一步研究。

针对当前有关各向异性土体三维强度特性研究中存在的不足,本文同时考虑土样沉积面角度及中主应力比的影响,构造合理的角隅函数对三维各向异性 Mohr-Coulomb 强度准则进行修正,据此探讨各向异性土体在主应力方向变化条件下的强度特性,并对土体的内摩擦角随沉积面角度及中主应力比的变化规律进行深入研究。

1 空心圆柱扭剪试验应力状态

为探求主应力方向变化对土体强度特性的影响,空心圆柱扭剪仪(HCA)是当前最为理想的试验装置。试验试样为一薄壁空心圆柱,如图 1 所示。在对空心圆柱试样内外施加均布压力后,通过施加轴力和扭矩进行加载。根据所施加荷载的大小计算得到试样的各应力分量分别为

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{p_o r_o + p_i r_i}{r_o + r_i} \\ \sigma_\theta = \frac{p_o r_o - p_i r_i}{r_o - r_i} \\ \sigma_z = \frac{W}{\pi(r_o^2 - r_i^2)} + \frac{p_o r_o^2 - p_i r_i^2}{r_o^2 - r_i^2} \\ \tau_{\theta z} = \frac{3M_T}{2\pi(r_o^3 - r_i^3)} \end{cases} \quad (1)$$

式中: p_o , p_i 为内外压力; r_o , r_i 为内外径; W 为竖向压力; M_T 为扭矩。

将式(1)变换为大、中、小主应力分量描述为

$$\begin{cases} \sigma_1 = \frac{\sigma_z + \sigma_\theta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_z - \sigma_\theta}{2}\right)^2 + \tau_{\theta z}^2} \\ \sigma_2 = \sigma_r \\ \sigma_3 = \frac{\sigma_z + \sigma_\theta}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_z - \sigma_\theta}{2}\right)^2 + \tau_{\theta z}^2} \end{cases} \quad (2)$$

主应力轴的偏转角为

$$\delta = \frac{1}{2} \arctan \frac{2\tau_{\theta z}}{\sigma_z - \sigma_\theta} \quad (3)$$

式中 δ 为大主应力轴的方位角。

在空心圆柱扭剪试验过程中,通过调整内外围压、轴力及扭矩,可对 3 个主应力值及应力主轴偏转角这 4 个变量进行独立控制。为描述这种复杂应力状态下的中主应力变化特性,一般通过应力 Lode 角或中主应力比 b 进行描述,其两者的转换关系为

$$b = \frac{1 - \sqrt{3} \tan \theta_\sigma}{2} \quad (4)$$

式中中主应力比 $b = (\sigma_2 - \sigma_3) / (\sigma_1 - \sigma_3)$ 。

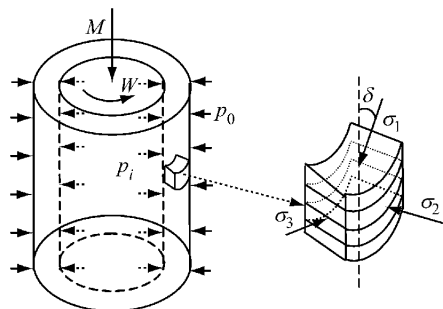


图 1 空心圆柱扭剪试验应力特征

Fig.1 Stress state in hollow cylinder test

当空心圆柱试样内外压力相等时,中主应力系数与大主应力偏转角关系还将满足

$$b = \sin^2 \delta \quad (5)$$

2 主应力轴方向变化条件下土体强度

2.1 三维各向异性 Mohr-Coulomb 准则

要描述天然沉积砂土的三维强度特性,须建立一个合理的三维强度准则。由于围压对砂土强度参数影响较小,因而在 p - q 应力空间采用直线形式的 Mohr-Coulomb 准则能描述其强度特性。为描述砂土的各向异性,只需对各向同性三维强度准则的偏平面形状进行修正即可。为合理反映土体强度随 Lode 角的变化规律,需在 p - q 应力空间建立的强度准则基础上引入合理的角隅函数。考虑沉积砂土大主应力方向与沉积面关系的影响,参考 Rodriguez 和 Lade^[14]的方法,在椭圆型角隅函数中引入一个反映

各向异性特性的项,将三维强度准则修正为

$$F = q - M_f p = q - M_{f0}(1 + \Omega - 3\Omega^2)g(\theta_\sigma)p = 0 \quad (6)$$

式中: F 为屈服函数; M_f 为模型参数; 有效平均应力 $p = I_1/3 = \sigma_{kk}/3$; 有效广义剪应力 $q = \sqrt{3J_2}$, $J_2 = s_{ij}s_{ij}/2$, $s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}p$; M_{f0} 为材料参数; Ω 为各向异性系数; l 为反映组构张量与主应力方向关系的量; 应

力 Lode 角 $\theta_\sigma = \arcsin[3\sqrt{3}J_3/(2J_2^{3/2})]/3$, $J_3 = \sqrt{s_{ij}s_{jk}s_{ki}/3}$; $g(\theta_\sigma)$ 为角隅函数;

$$l^2 = \frac{\sigma_1^2 \cos^2 \delta + \sigma_3^2 \sin^2 \delta}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2} \quad (7)$$

式中 δ 为大应力方向与组构方向的夹角. 椭圆型函数^[15-16]表示为

$$g(\theta_\sigma) = \frac{2(1 - \beta^2)\cos(\frac{\pi}{6} + \theta_\sigma) + (2\beta - 1)\sqrt{4(1 - \beta^2)\cos^2(\frac{\pi}{6} + \theta_\sigma) + \beta(5\beta - 4)}}{4(1 - \beta^2)\cos^2(\frac{\pi}{6} + \theta_\sigma) + (2\beta - 1)^2} \quad (8)$$

其中: β 为可反映三轴拉伸及三轴压缩条件下峰值应力比差异的参数^[17], 可以表示为

$$\beta = \frac{M_{fE}}{M_{fC}} = \frac{(3 - \sin \varphi_C)\sin \varphi_E}{(3 + \sin \varphi_E)\sin \varphi_C} \quad (9)$$

式中: φ_E, φ_C 分别为各向同性土体三轴拉伸($b=1$)及三轴压缩($b=0$)条件下的峰值内摩擦角.

2.2 各向异性参数的确定

由于土体各向异性强度表达式(1)中包含 M_{f0} , β 及 Ω 三个参数, 这些参数可通过三种不同条件下的三轴试验(如图 1 所示)结果进行确定. 图 2a 为大主应力与沉积面垂直的三轴压缩试验, 图 2b 为大主应力与沉积面平行的三轴压缩试验, 图 2c 为小主应力与沉积面垂直的三轴拉伸试验.

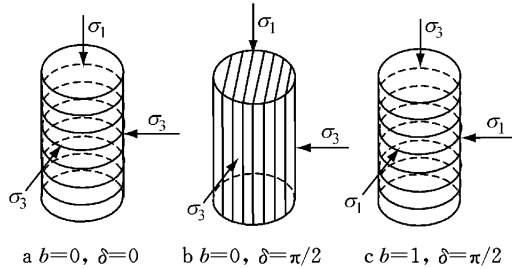


图2 主应力方向与组构的关系

Fig.2 Relationship between principal stress direction and material fabric

对于第一种情况,得到的土体强度可表示为

$$q = M_{f1} p \quad (10)$$

此时,式(7)简化为

$$l^2 = \sigma_1^2 / (\sigma_1^2 + 2\sigma_3^2) \quad (11)$$

利用式(10),则式(11)变为

$$l^2 = \frac{(3 + 2M_{f1})^2}{3(9 + 2M_{f1}^2)} \quad (12)$$

对于第二种情况,得到的土体强度可表示为

$$q = M_{f2} p \quad (13)$$

此时,式(7)简化为

$$l^2 = \sigma_3^2 / (\sigma_1^2 + 2\sigma_3^2) \quad (14)$$

进一步可得

$$l^2 = \frac{(3 - M_{f2})^2}{3(9 + 2M_{f2}^2)} \quad (15)$$

对于第三种情况,得到的土体强度可表示为

$$q = M_{f3} p \quad (16)$$

此时,式(7)变为

$$l^2 = \frac{\sigma_3^2}{2\sigma_1^2 + \sigma_3^2} = \frac{(3 - 2M_{f3})^2}{3(9 + 2M_{f3}^2)} \quad (17)$$

将式(12),式(15)及式(17)分别代入式(10),式(13)及式(16),联立求得

$$M_{f0} = \frac{M_{f1}}{\left(1 + \Omega - \frac{(3 + 2M_{f1})^2}{9 + 2M_{f1}^2}\Omega\right)} \quad (18)$$

$$\Omega = \frac{M_{f2} - M_{f1}}{M_{f1} - M_{f2} - \frac{M_{f1}(3 - M_{f2})^2}{9 + 2M_{f2}^2} + \frac{(3 + 2M_{f1})^2 M_{f2}}{9 + 2M_{f1}^2}} \quad (19)$$

$$\beta = \frac{M_{f3}}{\left[1 + \Omega - \frac{(3 - M_{f3})^2}{(9 + 2M_{f3}^2)}\Omega\right]M_{f0}} \quad (20)$$

2.3 主应力方向变化时强度参数变化规律

土体峰值内摩擦角的正弦值可表示为

$$\sin \varphi = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3} \quad (21)$$

通过联立式(6),式(7)和式(21),可得不同中主应力比 b 条件下的内摩擦角正弦值计算公式,即

$$\sin \varphi_b = \frac{3M_{f0}(1 + \Omega - 3\Omega^2)g(\theta_\sigma)}{6\sqrt{b^2 - b + 1} + (1 - 2b)M_{f0}(1 + \Omega - 3\Omega^2)g(\theta_\sigma)} \quad (22)$$

在主应力方向变化条件下,通过本文强度准则得到的中主应力比 b 对内摩擦角的影响如图 3 所示. 土体内摩擦角随 b 值增大呈现出先增大,随后达到峰值,再逐渐减小的规律. 各向异性参数绝对值的增大将导致预测得到的内摩擦角增大.

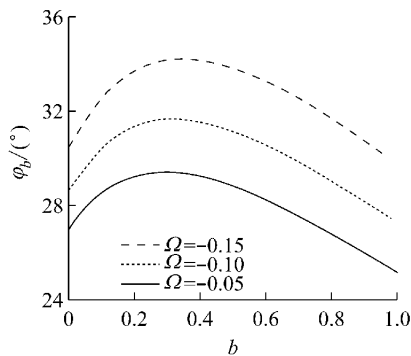


图 3 中主应力比对内摩擦角的影响
($M_0 = 1.0, \beta = 0.7, \delta = 0$)

Fig. 3 Influence of intermediate principal stress ratio on peak friction angle ($M_0 = 1.0, \beta = 0.7, \delta = 0$)

进一步得到大主应力方向与材料组构间的夹角对峰值内摩擦角的影响如图 4 所示,随着夹角的增大,内摩擦角呈现出减小的趋势。

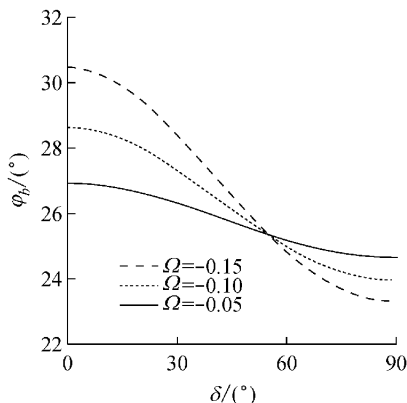


图 4 大主应力方向变化对内摩擦角的影响
($M_0 = 1.0, \beta = 0.7, b = 0$)

Fig. 4 Influence of the direction of principle stress on friction angle ($M_0 = 1.0, \beta = 0.7, b = 0$)

3 试验结果预测

3.1 三轴试验

为验证所建立的三维各向异性强度准则的合理性,首先对 Oda 等^[18]的三轴试验结果进行理论预测.试验采用 Toyoura 砂,由 75%石英、22%长石及 3%磁铁矿组成,其平均粒径为 0.18 mm,不均匀系数 $C_u = 1.5$,最大和最小孔隙比分别为 0.99 和 0.63.试样直径为 7.5 cm,长度为 8 cm,初始孔隙比为 0.67~0.68,通过制作沉积面方向与大主应力方向成 $0^\circ, 30^\circ, 60^\circ$ 和 90° 角的试样,在 50 kPa 及 100 kPa 围压条件下进行试验.试验得到的内摩擦角如图 5

所示,采用本文强度准则进行预测,强度参数采用 $M_0 = 1.783, \Omega = -0.024$,结果如图 5 所示.从图中可看出,理论预测得到的峰值内摩擦角随沉积面角度增大而减小,且理论预测值与试验结果符合较好。

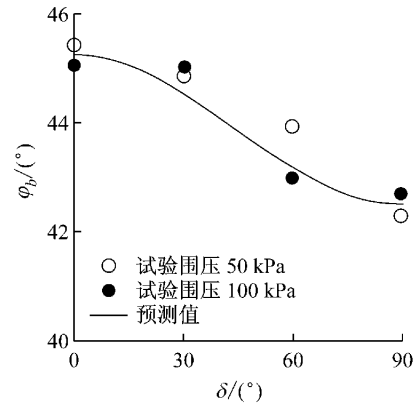


图 5 三轴状态下沉积面角度对内摩擦角的影响

Fig. 5 Influence of bedding plane angle on the friction angle under triaxial condition

3.2 空心圆柱扭剪试验

对 Kumruzzaman 和 Yin^[7]的香港风化花岗岩土体(CDG)空心圆柱扭剪试验强度结果进行理论预测.试样按 ASTM 制样标准分七层制作,土样干重度为 $1.71 \text{ kN} \cdot \text{m}^{-3}$,孔隙比为 0.55,含水率为 13%~14%,试验围压分别为 200 kPa 和 400 kPa.试验过程中,主应力方向角 δ 从 0° ~ 90° 偏转,由于试验过程中内外压相等,则 $b = \sin^2 \delta$.

选取一组强度参数 $M_0 = 1.28, \beta = 0.72$,各向异性参数取 $\Omega = -0.1$,通过本文准则预测得到的峰值内摩擦角随中主应力比的变化规律如图 6 所示.从图中可看出,随着中主应力比的增大,土体峰值内摩擦角逐渐增大,当 b 约为 0.25 时达到极大值,其后峰值内摩擦角随中主应力比的增大而逐渐减小。

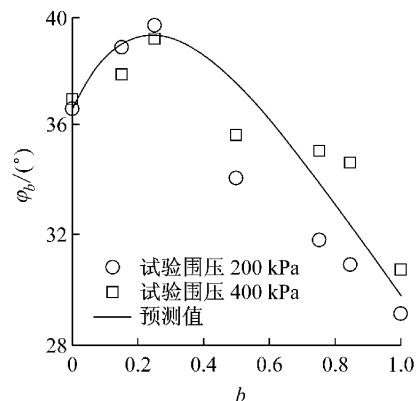


图 6 中主应力系数对内摩擦角的影响

Fig. 6 Influence of intermediate principal stress ratio on the friction angle

4 结语

通过引入考虑了土体材料组构与大主应力方向间关系修正的椭圆型自隔函数,对 Mohr-Coulomb 准则进行三维化,从而建立了一个三维各向异性强度准则,并探讨了各参数的确定方法. 基于所建立的准则,研究了土体峰值应力比随中主应力比及大主应力方向与材料组构夹角的变化规律. 研究结果表明,内摩擦角随中主应力比的增大呈现出先逐渐增大到峰值再逐渐减小的规律,随土体沉积面法向与主应力方向间夹角的增大,内摩擦角呈减小的趋势,且各向异性程度越大时,其减小趋势越明显.

参考文献:

- [1] 盛佳初, 武朝军, 叶冠林, 等. 上海黏土强度特性真三轴试验研究[J]. 岩土力学, 2013, 34(1): 47.
SHENG Jiaren, WU Chaojun, YE Guanlin, *et al.* Strength property of Shanghai clay in true triaxial tests[J]. Rock and Soil Mechanics, 2013, 34(1): 47.
- [2] Ye G L, Ye B, Zhang F. Strength and dilatancy of overconsolidated clays in drained true triaxial tests[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, ASCE, 2014, 140(4): 06013006.
- [3] YE G L, SHENG J R, YE B, WANG J H. Automated true triaxial apparatus and its application to over-consolidated clay[J]. Geotechnical Testing Journal, 2012, 35(4): 517.
- [4] Abelev A V, Lade P V. Effects of cross anisotropy on three-dimensional behavior of sand. I: stress-strain behavior and shear banding[J]. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, 2003, 129(2): 160.
- [5] Lin H, Pennumadu D. Experimental investigation of principal stress rotation in kaolin clay[J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, ASCE, 2005, 131(5): 633.
- [6] Lade P V, Nam J, Hong W P. Shear banding and cross-anisotropic behaviour observed in laboratory sand tests with stress rotation[J]. Canadian Geotechnical Journal, 2008, 45: 74.
- [7] Kumruzzaman M, Yin J H. Influence of principal stress direction on the stress-strain-strength behaviour of completely decomposed granite[J]. Architecture and Civil Engineering, 2010, 8(1): 79.
- [8] Pietruszczak S, Mroz Z. Formulation of anisotropic failure criteria incorporating a microstructure tensor [J]. Computers and Geotechnics, 2000, 26(2): 105.
- [9] Gao Z W, Zhao J D, Yao Y P. A generalized anisotropic failure criterion for geomaterials[J]. International Journal of Solids and Structures, 2010, 47(22/23): 3166.
- [10] 李学丰, 黄茂松, 钱建固. 宏细观结合的砂土各向异性破坏准则[J]. 岩石力学与工程学报, 2010, 29(9): 1885.
LI Xuefeng, HUANG Maosong, QIAN Jiangu. Failure criterion of anisotropic sand with the method of macro-meso incorporation [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2010, 29(9): 1885.
- [11] Liu M D, Indraratna B N. General strength criterion for geomaterials including anisotropic effect [J]. International Journal of Geomechanics, ASCE, 2011, 11(3): 251.
- [12] 吕玺琳, 黄茂松, 钱建固. 层状各向异性无黏性土三维强度准则[J]. 岩土工程学报, 2011, 33(6): 945.
LÜ Xilin, HUANG Maosong, QIAN Jiangu. Three-dimension strength criterion for layered-anisotropic cohesionless soils[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2011, 33(6): 945.
- [13] Mortara G. A yield criterion for isotropic and cross-anisotropic cohesive-frictional materials [J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2010, 34(9): 953.
- [14] Rodriguez N M, Lade P V. Effects of principal stress directions and mean normal stress on failure criterion for cross-anisotropic sand [J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, ASCE, 2013, 139(11): 1592.
- [15] Bardet J P. Lode dependences for pressure-sensitive isotropic elastoplastic materials [J]. Journal of Applied Mechanics, ASME, 1990, 57(3): 498.
- [16] 吕玺琳, 黄茂松, 钱建固. 基于非共轴本构模型的真三轴试验分叉分析[J]. 岩土工程学报, 2008, 30(5): 646.
LÜ Xilin, HUANG Maosong, QIAN Jiangu. Bifurcation analysis in true triaxial tests on sands based on non-coaxial elastoplasticity model [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2008, 30(5): 646.
- [17] 吕玺琳, 黄茂松, 钱建固. 真三轴状态下砂土强度参数[J]. 岩土力学, 2009, 30(4): 981.
LÜ Xilin, HUANG Maosong, QIAN Jiangu. Strength parameter of sands under true triaxial condition [J]. Rock and Soil Mechanics, 2009, 30(4): 981.
- [18] Oda M, Koishikawa I, Higuchi T. Experimental study of anisotropic shear strength of sand by plane strain test[J]. Soils and Foundations, 1978, 18(1): 25.