第 43 卷第 4 期
2015 年 4 月

同 济 大 学 学 报(自 然 科 学 版)
JOURNAL OF TONGJI UNIVERSITY(NATURAL SCIENCE)

Vol. 43 No. 4
Apr. 2015

文章编号：0253-374X(2015)04-0639-04

DOI：10.11908/j.issn.0253-374x.2015.04.023

仿射 Schur 代数 $S_{\Delta}(2,3)_{\mathbf{Q}}$ 的生成元与关系式

刘明强，濮燕敏

(同济大学 数学系，上海 200092)

摘要：利用从普遍包络代数到仿射 Schur 代数之间的关系，给出了仿射 Schur 代数 $S_{\Delta}(2,3)_{\mathbf{Q}}$ 的表现，即生成元与关系式. 这个表现是通过在普遍包络代数的表现上额外增加一些关系式得到的.

关键词：仿射 Schur 代数；普遍包络代数；三角分解；圈代数

中图分类号：O152.5　　　　**文献标志码**：A

The generators and relations for affine Schur algebra $S_{\Delta}(2,3)_{\mathbf{Q}}$

LIU Mingqiang，*PU Yanmin*

(Department of Mathematics，Tongji University，Shanghai 200092，China)

Abstract：Based on the relations between the universal enveloping algebras and affine Schur algebras，we provide a presentation for $S_{\Delta}(2,3)_{\mathbf{Q}}$ in terms of generators and relations in this paper. This presentation is obtained by adding more relations to the presentation of the universal enveloping algebra.

Key words：affine Schur algebra；universal enveloping algebra；triangular decomposition；loop algebra

根据文献[1]中提到的从生成元与关系式的角度研究 q-Schur 代数的方法，文献[2-3]给出了 $n>r$ 时，仿射 q-Schur 代数的表现，即具体的生成元与关系式. 文献[4]给出了 $n=r$ 时仿射 q-Schur 代数的表现. 仿射 q-Schur 代数在 $n<r$ 时的表现，目前还没有比较成熟的结果. 本文主要给出 $n=2, r=3$ 时，仿射 Schur 代数的生成元与关系式.

1　普遍包络代数 $U(\widehat{\mathrm{gl}}_2)$

设 t 是一个不定元. 记 $U(\widehat{\mathrm{gl}}_2)$ 是 $\widehat{\mathrm{gl}}_2$ 的普遍包络代数，其中 $\widehat{\mathrm{gl}}_2 := \widehat{\mathrm{gl}}_2(\mathbf{Q})\otimes\mathbf{Q}[t,t^{-1}]$. 这里 $\widehat{\mathrm{gl}}_2$ 是一般线性李代数 $\widehat{\mathrm{gl}}_2(\mathbf{Q})$ 的圈代数；可以参考文献[5]. 根据文献[4]，存在李代数同构：$M_{\Delta,2}(\mathbf{Q})\to\widehat{\mathrm{gl}}_2(\mathbf{Q})$，$E^{\Delta}_{i,j+2l}\mapsto E_{i,j}\otimes t^l$，$1\leqslant i,j\leqslant 2$，$l\in\mathbf{Z}$. 以后将 $\widehat{\mathrm{gl}}_2(\mathbf{Q})$ 与 $M_{\Delta,2}(\mathbf{Q})$ 等同起来. 这里 $M_{\Delta,2}(\mathbf{Q})$ 的定义可参考文献[4].

为了方便后面讨论，先引入一些记号. 令 $\mathbf{Z}^2_{\Delta}=\{(\lambda_i)_{i\in\mathbf{Z}}\mid\lambda_i\in\mathbf{Z},\lambda_{i-2}\}$，$\mathbf{N}^2_{\Delta}=\{(\lambda_i)_{i\in\mathbf{Z}}\in\mathbf{Z}^2_{\Delta}\mid\lambda_i\in 0\}$. 可以利用下列映射将集合 $\mathbf{Z}^2_{\Delta}$ 与 $\mathbf{Z}^2$ 等同起来：

$$b_2:\mathbf{Z}^2_{\Delta}\to\mathbf{Z}^2,\quad \lambda\mapsto b_2(\lambda)=(\lambda_1,\lambda_2)$$

定义矩阵集合 $\boldsymbol{\Theta}_{\Delta}(2)=\{\boldsymbol{A}\in M_{\Delta,2}(\mathbf{Q})\mid a_{i,j}\in\mathbf{N}\ \forall i,j\}$，$\boldsymbol{\Theta}^{\pm}_{\Delta}(2)=\{\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{\Theta}_{\Delta}(2)\mid$ 对任意 $i, a_{i,i}=0\}$. 令 $\boldsymbol{\Theta}^{+}_{\Delta}(2)=\{\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{\Theta}_{\Delta}(2)\mid$ 当 $i\geqslant j, a_{i,j}=0\}$，$\boldsymbol{\Theta}^{-}_{\Delta}(2)=\{\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{\Theta}_{\Delta}(2)\mid$ 当 $i\leqslant j, a_{i,j}=0\}$. 对于 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{\Theta}_{\Delta}(2)$，$\lambda\in\mathbf{Z}^2_{\Delta}$，记 $\sigma(A):=\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant 2,j\in\mathbf{Z}}a_{i,j}$ 以及 $\sigma(\lambda):=\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant 2}\lambda_j$. 特别地，令 $\boldsymbol{\Theta}_{\Delta}(2,3)=\{A\in\boldsymbol{\Theta}_{\Delta}(2)\mid\sigma(A)=3\}$ 和 $\Lambda_{\Delta}(2,3)=\{\lambda\in\mathbf{N}^2_{\Delta}\mid\sigma(\lambda)=3\}$. $U^+(\widehat{\mathrm{gl}}_2)$(相应地 $U^-(\widehat{\mathrm{gl}}_2)$，$U^0(\widehat{\mathrm{gl}})$)是由 $E^{\Delta}_{j,i}(i<j)$(相应地 $E^{\Delta}_{j,i}(j>i)$，$E^{\Delta}_{i,i}$(任意 i))生成的子代数. 则有三角分解：

$$U(\widehat{\mathrm{gl}}_2)=U^+(\widehat{\mathrm{gl}}_2)\otimes U^0(\widehat{\mathrm{gl}}_2)\otimes U^-(\widehat{\mathrm{gl}}_2). \tag{1}$$

设 $\mathscr{L}^+=\{(i,j)\mid 1\leqslant i\leqslant 2,j\in\mathbf{Z},i<j\}$. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{i,j})\in\boldsymbol{\Theta}_{\Delta}(2)$. 记 $E^{\boldsymbol{A}^+}:=\Pi_{(i,j)\in\mathscr{L}^+}(E^{\Delta}_{i,j})^{a_{i,j}}$，其中乘积顺序只要固定 $\mathscr{L}^+$ 的一个全序即可. 类似地，令 $F^{\boldsymbol{A}^-}:=\Pi_{(i,j)\in\mathscr{L}^-}(E^{\Delta}_{i,j})^{a_{i,j}}$，其中 $\mathscr{L}^-=\{(i,j)\mid 1\leqslant i\leqslant 2,j\in\mathbf{Z},j<i\}$. 设 $K_i:=E^{\Delta}_{i,i}$ 和 $\binom{K_i}{t}:=\dfrac{K_i(K_i-1)\cdots(K_i-t+1)}{t!}\in U(\widehat{\mathrm{gl}}_2)$，这里 $t\in\mathbf{Z}$，且

收稿日期：2014-05-22

第一作者：刘明强(1986—)，男，博士生，主要研究方向为代数群，量子群及其表示. E-mail：mingqiangliu@163.com

$\begin{pmatrix} K_i \\ 0 \end{pmatrix}:=1$. 对于 $\lambda\in\mathbf{N}_\Delta^2$,令 $K_\lambda=\begin{bmatrix} K_1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} K_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$,根据三角分解式(1),不难得到:

$$\{E^{A^+}K_\lambda F^{A^-} \mid \lambda\in\mathbf{N}_\Delta^2, \boldsymbol{A}\in\boldsymbol{\Theta}_\Delta^\pm(2)\} \tag{2}$$

成为 $U(\widehat{\mathrm{gl}}_2)$ 的一组基.

2 仿射 Schur 代数和代数 T,T'

设 v 是一个不定元. Ω 是一个自由 $\mathbf{Z}[v,v^{-1}]$-模,其中基元是 $\{w_i \mid i\in\mathbf{Z}\}$. 定义在 $\mathbf{Z}[v,v^{-1}]$ 上的自同态代数 $S'_\Delta(n,r):=\mathrm{End}\, H_\Delta(r)(\Omega^{\otimes r})$,将它称为仿射 q-Schur 代数. 这里 $H_\Delta(r)$ 是扩张的仿射 Hecke 代数,$\Omega^{\otimes r}$ 是一个右 $H_\Delta(r)$-模, 具体作用可见文献[6]. 将 v 特殊化为 1 时,$\mathbf{Q}$ 可看成 $\mathbf{Z}[v,v^{-1}]$-模,从而有 $S_\Delta(2,3)_\mathbf{Q}=S'_\Delta(2,3)\otimes\mathbf{Q}$. 令 $[\boldsymbol{A}]_1=[\boldsymbol{A}]_1\otimes 1\in S_\Delta(2,3)_\mathbf{Q}$,其中 $\{[\boldsymbol{A}] \mid \boldsymbol{A}\in\boldsymbol{\Theta}_\Delta(2,3)\}$ 是 $S'_\Delta(2,3)$ 的一组基. 当 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{\Theta}_\Delta^\pm(2)$, $j\in\mathbf{N}_\Delta^2$ 时,令

$$\boldsymbol{A}[j,3]=\begin{cases}\sum_{\lambda\in\Lambda_\Delta(2,3-\sigma(\boldsymbol{A}))}\lambda^j[\boldsymbol{A}+\mathrm{diag}(\lambda)]_1, \\ \qquad 若\ \sigma(\boldsymbol{A})\leqslant 3 \\ 0, \qquad 其他\end{cases}$$

由文献[4,7],存在代数的满同态

$$\eta_r: U(\widehat{\mathrm{gl}}_2)\rightarrow S_\Delta(2,3)_\mathbf{Q}, \tag{3}$$

使得 $\eta_r(E_{i,i}^\Delta)=0[e_i^\Delta,3]$; 当 $i\neq j$ 时,$\eta_r(E_{i,j}^\Delta)=E_{i,j}^\Delta[0,3]$. 对于 $1\leqslant i,j\leqslant 2$,令

$$\varepsilon(i,j):=\begin{cases}1, & 若\ j=i; \\ -1, & 若\ j\equiv i-1 (\mathrm{mod}\ 2); \\ 0, & 其他\end{cases}$$

构造下列代数:

定义 1 令 $\mathbf{T}=\mathbf{T}_\Delta(2,3)$ 是由元素

$$e_i, f_i, k_i, e_{i,i+2m}^\Delta (1\leqslant i\leqslant 2, m\in\mathbf{Z}\backslash\{0\},)$$

生成并满足下列关系式:

$$k_1+k_2=3; \tag{R1}$$

$$k_i(k_i-1)(k_i-2)(k_i-3)=0; \tag{R2}$$

$$k_ik_j=k_jk_i; \tag{R3}$$

$$k_ie_j-e_jk_i=\varepsilon(i,j)e_j; \tag{R4}$$

$$k_if_i-f_jk_i=-\varepsilon(i,j)f_j; \tag{R5}$$

$$e_{i,i+2m}^\Delta k_j=k_je_{i,i+2m}^\Delta; \tag{R6}$$

$$e_if_j-f_je_i=\delta_{ij}(k_j-k_{j+1}) \tag{R7}$$

$$\begin{gathered} e_i^3e_j-3e_i^2e_je_i+3e_ie_je_i^2-e_je_i^3=0,\ |i-j|=1 \\ e_ie_j-e_je_i=0,\ 否则 \end{gathered} \tag{R8}$$

$$\begin{gathered} f_i^3f_j-3f_i^2f_jf_i+3f_if_jf_i^2-f_jf_i^3=0,\ |i-j|=1 \\ f_if_j-f_jf_i=0,\ 否则 \end{gathered} \tag{R9}$$

$$\begin{gathered} (e_{1,1+2m}^\Delta+e_{2,2+2m}^\Delta)e_j=e_j(e_{1,1+2m}^\Delta+e_{2,2+2m}^\Delta), \\ e_{1,1+2m}^\Delta e_{j,j+2n}^\Delta=e_{j,j+2n}^\Delta e_{i,i+2m}^\Delta (n\in\mathbf{Z}\backslash\{0\}), \\ (e_{1,1+2m}^\Delta+e_{2,2+2m}^\Delta)f_j=f_j(e_{1,1+2m}^\Delta+e_{2,2+2m}^\Delta); \end{gathered} \tag{R10}$$

$$\begin{gathered} [[e_1,e_{2,2m}^\Delta],e_2]=e_{1,1+2m}^\Delta-e_{2,2+2m}^\Delta; \\ [f_2,[e_{2,4-2m}^\Delta,f_1]]=e_{1,1-2m}^\Delta-e_{2,2-2m}^\Delta \end{gathered} \tag{R11}$$

知道 $U(\widehat{\mathrm{gl}}_2)$ 有相同的生成元且仅满足关系式(R3)~(R11),因此存在代数的满同态 $\xi_r: U(\widehat{\mathrm{gl}}_2)\rightarrow\mathbf{T}$ 使得:

$$E_i\mapsto e_i, F_i\mapsto f_i, K_i\mapsto k_i\ 且\ E_{i,i+2m}^\Delta\mapsto e_{i,i+2m}^\Delta. \tag{4}$$

$\mathbf{T}$ 的零部分记为:$\mathbf{T}^0$. 它是由元素 k_i 生成,其中 $1\leqslant i\leqslant 2$. 对于 $\lambda\in\mathbf{N}_\Delta^2$,令 $k_\lambda=\prod_{1\leqslant i\leqslant 2}\begin{bmatrix} k_i \\ \lambda_i \end{bmatrix}$. 可以将 $\mathbf{T}$ 的生成元 k_i 用 k_λ 替换,其中 $\lambda\in\Lambda_\Delta(2,3)$. 根据式(3),可以假定 $e_i:=\eta_r(E_{i,i+1}^\Delta)=E_{i,i+1}^\Delta[0,3]$, $f_i:=\eta_r(E_{i+1,i}^\Delta)=E_{i+1,i}^\Delta[0,3]$, $k_i:=\eta_r(E_{i,i}^\Delta)=0[e_i^\Delta,3]$ 和 $e_{i,i+2m}^\Delta:=\eta_r(E_{i,i+2m}^\Delta)=E_{i,i+2m}^\Delta[0,3]$. 为了避免符号用得过多,这里有些符号会重复. 不难验证定义 1 中的所有关系式在 $S_\Delta(2,3)_\mathbf{Q}$ 中成立,从而得到一个代数的满同态:α: $\mathbf{T}\rightarrow S_\Delta(2,3)_\mathbf{Q}$.

为了计算方便,对于 $m\in\mathbf{Z}$, $1\leqslant i\leqslant 2$,令 $e_{i,i+1+2m}^\Delta:=[e_{i,i+1}^\Delta,e_{i+1,i+1+2m}^\Delta]=\xi_r([E_{i,i+1}^\Delta,E_{i+1,i+1+2m}^\Delta])$. 则可以得到,

$$对于\ i,j,k,l\in\mathbf{Z},有[e_{i,j}^\Delta,e_{k,l}^\Delta]= \\ \delta_{\bar{j},\bar{k}}e_{i,l+j-k}^\Delta-\delta_{\bar{l},\bar{i}}e_{k,j+l-j}^\Delta. \tag{5}$$

对于 $1\leqslant i\leqslant 2$ 和 $\boldsymbol{A}\in\Theta_\Delta(2)$,令 $\sigma_i(\boldsymbol{A})=a_{i,i}+\sum_{j<i}(a_{i,j}+a_{j,i})$. 记 $\mathrm{ro}(\boldsymbol{A})=(\sum_{j\in\mathbf{Z}}a_{i,j})_{i\in\mathbf{Z}}$, $\mathrm{co}(A)=(\sum_{i\in\mathbf{Z}}a_{i,j})_{j\in\mathbf{Z}}$ 分别是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行求和以及列求和. 对于 $\boldsymbol{A}=(a_{i,j})\in\boldsymbol{\Theta}_\Delta^\pm(2)$, 设 $\boldsymbol{e}^{A^+}=\xi_r(E^{A^+})$ 和 $\boldsymbol{f}^{A^-}=\xi_r(F^{A^-})$. 这里 $\boldsymbol{e}^{A^+}$ 和 $\boldsymbol{f}^{A^-}$ 的乘积顺序不同于 E^{A^+}, F^{A^-},顺序如下:

令

$$\boldsymbol{e}^{A^+}=\boldsymbol{M}_2\boldsymbol{M}_1,\ \boldsymbol{f}^{A^-}=\boldsymbol{M}'_1\boldsymbol{M}'_2 \tag{6}$$

其中

$$\begin{gathered} \boldsymbol{M}_j=({e_{1,j}^\Delta}^{a_{1,j}}{e_{1,j+2}^\Delta}^{a_{1,j+2}}\cdots{e_{1,j+2s}^\Delta}^{a_{1,j+2s}})\cdot \\ ({e_{2,j+2}^\Delta}^{a_{2,j+2}}\cdots{e_{2,j+2s}^\Delta}^{a_{2,j+2s}}) \\ \boldsymbol{M}'_j=({e_{j+2s,2}}^{a_{j+2s,2}}\cdots{e_{j+2,2}}^{a_{j+2,2}})\cdot \\ ({e_{j+2s,1}}^{a_{j+2s,1}}\cdots{e_{j,1}}^{a_{j,1}}). \end{gathered}$$

这里的 s 是正整数并且满足下列条件:

(1) $\prod_{1\leqslant i\leqslant 2}a_{i,i+2s}a_{i,i-2s}\neq 0$.

(2) 若 $t>2s$ 或 $t<-2s$, 则对于任意 i, $a_{i,i+t}=0$.

由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 仅有限个元素非 0,从而每个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 都会存在唯一一个满足上面条件(1),(2)的 s. 也可以对矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{i,j})$分解

$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{A}_1$,其中子矩阵 $\boldsymbol{A}_2$ 满足:

$$a_{i,1+2j}=0,\tag{7a}$$

以及子矩阵 $\boldsymbol{A}_1$ 满足:

$$a_{i,2+2j}=0.\tag{7b}$$

从而得到 $e^{A^+}=e^{A_2^+}e^{A_1^+}$, $f^{A^-}=f^{A_1^-}f^{A_2^-}$. 对于 $1\leqslant i\leqslant 2$,令 $\alpha_i\in\Lambda_\Delta(2,0)$ 满足若 $i=1$,则 $b_2(\alpha_i)=(1,-1)$;否则,$b_2(\alpha_i)=(-1,1)$. 引理 1 的结论可以直接从定义 1 得到:

引理 1　设 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{\Theta}_\Delta^\pm(2)$以及 $\lambda\in\lambda_\Delta(2,3)$.

(1) 若 $\lambda_i\geqslant\sigma_i(\boldsymbol{A}^+)$,对于 $1\leqslant i\leqslant 2$,则 $e^{A^+}k_\lambda=k_{\lambda'}e^{A^+}$,其中 $\lambda'=\lambda-\mathrm{co}(\boldsymbol{A}^+)+\mathrm{ro}(\boldsymbol{A}^+)$;

(2) 若 $\lambda_i\geqslant\sigma_i(\boldsymbol{A}^-)$,对于 $1\leqslant i\leqslant 2$,则 $k_\lambda e^{A^-}=e^{A^-}k_{\lambda'}$,其中 $\lambda'=\lambda+\mathrm{co}(\boldsymbol{A}^-)-\mathrm{ro}(\boldsymbol{A}^-)$.

留意到 $e_{i,i}^\Delta=\sum\limits_{\lambda\in\Lambda_\Delta(2,3)}\lambda_i k_\lambda$,这里 $1\leqslant i\leqslant 2$. 根据引理 1 以及式(5),不难得到下列结果.

命题 1　若 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{\Theta}_\Delta^\pm(2)$,则

$$e^{A^+}f^{A^-}=f^{A^-}e^{A^+}+\sum_{\substack{B\in\boldsymbol{\Theta}_\Delta^\pm(2)\\ \sigma(B)<\sigma(A)\\ \lambda\in\Lambda_\Delta(2,3)}}c_{\lambda,B}e^{B^+}k_\lambda f^{B^-},\tag{8}$$

其中 $c_{\lambda,B}\in\mathbf{Z}$.

为了计算方便,引入一些符号. 令 $f_i(m):=E_{i,2m+i}^\Delta[0,3]$ 和 $f_i(m_1,m_2):=E_{i,2m_1+i}^\Delta[0,3]\cdot E_{i,2m_2+i}^\Delta[0,3]-E_{i,i+2m_1+2m_2}^\Delta[0,3]$,则 $f_i(m_1,m_2)=f_i(m_1)f_i(m_2)-f_i(m_1+m_2)$,其中 $i=1,2$. 令

$f_i(m_1,m_2,m_3):=f_i(m_1)f_i(m_2)f_i(m_3)-(f_i(m_1+m_2+m_3)+f_i(m_1+m_2,m_3)+f_i(m_1+m_3,m_2)+f_i(m_2+m_3,m_1))$,

$f_i(m_1,m_2,m_3,m_4):=f_i(m_1)f_i(m_2)f_i(m_3)f_i(m_4)-(f_i(\sum\limits_{1\leqslant j\leqslant 4}m_j)+f_i(m_1+m_2,m_3+m_4)+f_i(m_1+m_3,m_3+m_4)+f_i(m_1+m_4,m_2+m_3)+f_i(m_1,m_2+m_3+m_4)+f_i(m_2,m_1+m_3+m_4)+f_i(m_3,m_1+m_2+m_4)+f_i(m_4,m_1+m_2+m_3)+f_i(m_1,m_2,m_3+m_4)+f_i(m_1,m_3,m_2+m_4)+f_i(m_1,m_4,m_2+m_3)+f_i(m_2,m_3,m_1+m_4)+f_i(m_2,m_4,m_1+m_3)+f_i(m_3,m_4,m_1+m_2))$.

直接利用文献[4]中的乘法公式,可以计算得到:

引理 2　下列等式:① $f_1(m_1)k_{(0,3)}=0$, $f_2(m_1)\cdot k_{(3,0)}=0$;② $f_i(m_1,m_2)k_{(i,3-i)}=0$;③ $f_i(m_1,m_2,m_3)k_{(3-i,i)}=0$;④ $f_1(m_1,m_2,m_3,m_4)k_{(3,0)}=0$, $f_2(m_1,m_2,m_3,m_4)k_{(0,3)}=0$,在代数 $S_\Delta(2,3)_{\mathbf{Q}}$中成立,这里 $i=1,2$ 和 $m_1,m_2,m_3\in\mathbf{Z}\backslash\{0\}$.

类似地,令 $f_i(m):=e_{i,2m+i}$以及 $f_i(m_1,m_2):=f_i(m_1)f_i(m_2)-f_i(m_1+m_2)$. 为了符号的简化,这里用了与仿射 Schur 代数相同的符号. 设 $\mathbf{I}$ 是 $\mathbf{T}$ 的理想,其中生成元为①～④等式左边的元素.

定理 1　定义代数 $\mathbf{T}'=\mathbf{T}/\mathbf{I}$,其中 $\mathbf{I}$ 是①～④定义的理想. 则存在代数同构 $\mathbf{T}'\cong S_\Delta(2,3)_{\mathbf{Q}}$.

3　主要结果

由于从 $\mathbf{T}$ 到 $\mathbf{T}'$有一个自然代数同态,为了符号的简化,将 $e_{i,j}^\Delta$的象仍用相同的符号 $e_{i,j}^\Delta$表示. 若没有特殊说明,这一章讨论的都是代数 $\mathbf{T}'$ 中的元素. 设 $\boldsymbol{\Theta}_\Delta(2)_1=\{\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{\Theta}_\Delta(2)\mid a_{j,j}=a_{2,j}=a_{1,2j}=0$ 对于所有 $j\in\mathbf{Z}\}$和 $\boldsymbol{\Theta}_\Delta(2)_2=\{\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{\Theta}_\Delta(2)\mid a_{j,j}=a_{1,j}=a_{2,2j+1}=0$ 对于所有 $j\in\mathbf{Z}\}$. 记 $\boldsymbol{\Theta}_\Delta^+(2)_i=\boldsymbol{\Theta}_\Delta^+(2)\cap\boldsymbol{\Theta}_\Delta(2)_i$, $\boldsymbol{\Theta}_\Delta^\pm(2)_i=\boldsymbol{\Theta}_\Delta^\pm(2)\cap\boldsymbol{\Theta}_\Delta(2)_i$以及 $\boldsymbol{\Theta}_\Delta^-(2)_i=\boldsymbol{\Theta}_\Delta^-(2)\cap\boldsymbol{\Theta}_\Delta(2)_i$,其中 $i=1,2$. 则在代数 $\mathbf{T}'$中易得下列结果.

引理 3　设 $\lambda\in\Lambda_\Delta(2,3)$, $1\leqslant i\leqslant 2$. 若 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{\Theta}_\Delta^\pm(2)_i$且 $\lambda_i<\sigma_i(\boldsymbol{A})$,则

$$e^{A^+}k_\lambda f^{A^-}=\sum_{\substack{B\in\boldsymbol{\Theta}_\Delta^\pm(2)_i,\sigma(B)<\sigma(A)\\ \lambda_i\geqslant\sigma_i(B)}}d_{\lambda,B}e^{B^+}k_\lambda f^{B^-},$$

其中 $d_{\lambda,B}\in\mathbf{Z}$ 且当 $j\neq i$ 时,$\sigma_j(\boldsymbol{B})=0$.

推论 1　设 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{\Theta}_\Delta^\pm(2)$,对于某个 i 有 $\boldsymbol{A}^-\in\boldsymbol{\Theta}_\Delta^-(2)_i$且 $\lambda_i<\sigma_i(\boldsymbol{A})$,则

$$f^{A^-}e^{A^+}k_\lambda=\sum_{\substack{C\in\boldsymbol{\Theta}_\Delta^\pm(2),\sigma(C)<\sigma(A)\\ \lambda_i\geqslant\sigma_i(C)\\ C^-\in\boldsymbol{\Theta}_\Delta^-(2)_i}}c_{\lambda,C}f^{C^-}e^{C^+}k_\lambda,\tag{9}$$

其中 $c_{\lambda,C}\in\mathbf{Z}$. 特别地,若 $\boldsymbol{A}^-=0$,则 $\boldsymbol{C}^-=0$.

类似地,设 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{\Theta}_\Delta^\pm(2)$,对于某个 i 有 $\boldsymbol{A}^+\in\boldsymbol{\Theta}_\Delta^+(2)_i$且 $\lambda_i<\sigma_i(\boldsymbol{A})$,则

$$k_\lambda f^{A^-}e^{A^+}=\sum_{\substack{C\in\boldsymbol{\Theta}_\Delta^\pm(2),\sigma(C)<\sigma(A)\\ \lambda_i\geqslant\sigma_i(C)\\ C^+\in\boldsymbol{\Theta}_\Delta^-(2)_i}}d_{\lambda,C}k_\lambda f^{C^-}e^{C^+},\tag{10}$$

其中 $d_{\lambda,C}\in\mathbf{Z}$. 特别地,若 $\boldsymbol{A}^+=0$,则 $\boldsymbol{C}^+=0$.

对于任意 $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{\Theta}_\Delta^\pm(2)$, $\lambda\in\lambda_\Delta(2,3)$,设 $m_{A,\lambda}=e^{A^+}k_\lambda f^{A^-}$. 根据式(1)和式(4),容易得到 $\mathbf{T}'$ 是由所有 $m_{A,\lambda}$张成的,其中 $\lambda\in\Lambda_\Delta(2,3)$, $\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{\Theta}_\Delta^\pm(2)$.

命题 2　对于 $\boldsymbol{A}=(a_{i,j}\in\boldsymbol{\Theta}_\Delta(2)$,设

$$m_A=e^{A^+}k_\lambda f^{A^-},$$

其中 $\lambda=\lambda(A)\in\Lambda_\Delta(2,3)$, $b_1(\lambda)=(\sigma_1(\boldsymbol{A}),\sigma_2(\boldsymbol{A}))$. 则集合 $\mathscr{M}:=\{m_A\mid\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{\Theta}_\Delta(2,3)\}$是代数 $\mathbf{T}'$的张成集.

证明　令 $\lambda\in\Lambda_\Delta(2,3)$. 固定 $\boldsymbol{B}\in\boldsymbol{\Theta}_\Delta^\pm(2)$. 若对所

有的i,有$\lambda_i\geqslant\sigma_i(\boldsymbol{B})$,则存在唯一的矩阵$\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{\Theta}_\Delta(2,3)$使得$m_{\boldsymbol{A}}=m_{\boldsymbol{B},\lambda}$.因此,要证明这个命题,只需要证明对于某个$i$,若$\lambda_i<\sigma_i(\boldsymbol{B})$,则$m_{\boldsymbol{B},\lambda}$可以由$\mathscr{M}$中的元素张成即可.对$\sigma(\boldsymbol{B})$进行归纳.若$\sigma(\boldsymbol{B})=1$,根据推论1显然成立.现在假设$\sigma(\boldsymbol{B})>1$.

(1) 若$\lambda_1<\sigma_1(\boldsymbol{B})$,根据式(7),存在矩阵$\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2$,使得$\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{B}^+}=\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{B}_2^+}\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{B}_1^+}$和$\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{B}^-}=\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{B}_1^-}\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{B}_2^-}$.则有

$$m_{\boldsymbol{B},\lambda}=\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{B}_2^+}\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{B}_1^+}\boldsymbol{k}_\lambda\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{B}_1^-}\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{B}_2^-}.$$

根据式(9),可以假定$\lambda_1\geqslant\sigma_1(\boldsymbol{B}^+)$.则由引理1第1条,$m_{\boldsymbol{B},\lambda}=\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{B}_2^+}(\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{B}_1^+}\boldsymbol{k}_\lambda)\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{B}_1^-}\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{B}_2^-}=\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{B}_2^+}\boldsymbol{k}_{\lambda'}\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{B}_1^+}\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{B}^-}$,其中$\lambda'=(\lambda_1-\sum_{1\leqslant j\leqslant s}b_{2,1+2j},\lambda_2+\sum_{1\leqslant j\leqslant s}b_{2,1+2j})$.这里的$s$即为式(6)中对应矩阵$\boldsymbol{B}$极小的$s$.由式(8)可以得到:

$$\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{B}_1^+}\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{B}^-}=\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{B}^-}\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{B}_1^+}+\sum_{\substack{D\in\boldsymbol{\Theta}_\Delta^\pm(2)\\ \sigma(\boldsymbol{D})<\sigma(\boldsymbol{B}_1^++\boldsymbol{B}^-)\\ \lambda\in\Lambda_\Delta(2,3)}}c_{\lambda,D}\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{D}^+}\boldsymbol{k}_\lambda\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{D}^-}.$$

因此,只需证明$\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{B}_2^+}\boldsymbol{k}_{\lambda'}\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{B}^-}\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{B}_1^+}$可以由$\mathscr{M}$中的元素张成.令$\boldsymbol{B}_1^+=\boldsymbol{B}_{1,1}^++\boldsymbol{B}_{2,1}^+$,其中$\boldsymbol{B}_{1,1}^+=(b_{ij})$,$b_{2,1+2j}=0$且$\boldsymbol{B}_{2,1}^+=(b_{ij})$,$b_{1,1+2j}=0$.事实上$\boldsymbol{B}_{11}^+\in\boldsymbol{\Theta}_\Delta^\pm(2)_1$.由$\sigma_1(\boldsymbol{B}^-)=\sum_{1\leqslant j\leqslant 2s}b_{1,1-j}$,$\lambda_1<\sigma_1(\boldsymbol{B})$,知$\lambda'_1<\sigma_1(\boldsymbol{B}^-)+\sigma_1(\boldsymbol{B}_{11}^+)=\sigma_1(\boldsymbol{B}^-+\boldsymbol{B}_{11}^+)=\sigma_1(\boldsymbol{D})$,这里记$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{B}^-+\boldsymbol{B}_{11}^+$.根据式(10),

$$\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{B}_2^+}\boldsymbol{k}_{\lambda'}\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{B}^-}\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{B}_{1,1}^+}\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{B}_{1,2}^-}=\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{B}_2^+}(\boldsymbol{k}_{\lambda'}\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{B}^-}\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{B}_{1,1}^+})\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{B}_{1,2}^-}=$$

$$\sum_{\substack{C\in\boldsymbol{\Theta}_\Delta^\pm(2),\sigma(\boldsymbol{C})<\sigma(\boldsymbol{D})\\ \lambda'_1\geqslant\sigma_1(\boldsymbol{C})\\ C^+\in\boldsymbol{\Theta}_\Delta^\pm(2)_1}}d_{\lambda',C}\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{B}_2^+}\boldsymbol{k}_{\lambda'}\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{C}^-}\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{C}^+}\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{B}_{1,2}^+}$$

重复地利用式(5)和式(8),则只需证$\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{B}_2^+}\boldsymbol{k}_{\lambda'}\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{C}^+}\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{B}_{1,2}^+}\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{C}^-}$可以由$\mathscr{M}$中的元素张成.又$\boldsymbol{C}^+\in\boldsymbol{\Theta}_\Delta^\pm(2)_1$,有:

$$\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{B}_2^+}\boldsymbol{k}_{\lambda'}\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{C}^+}\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{B}_{1,2}^+}\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{C}^-}=\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{B}_2^+}\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{C}^+}\boldsymbol{k}_{\lambda'}\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{B}_{1,2}^+}\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{C}^-}=$$

$$\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{B}_2^+}\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{C}^+}\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{B}_{1,2}^+}\boldsymbol{k}_\lambda\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{C}^-}. \tag{11}$$

根据$\sigma(\boldsymbol{C})+\sigma(\boldsymbol{B}_{12}^+)+\sigma(\boldsymbol{B}_2^+)<\sigma(\boldsymbol{B})$且$\lambda_1>\sigma(\boldsymbol{C})+\sigma(\boldsymbol{B}_{12}^+)+\sigma(\boldsymbol{B}_2^+)$,归纳得证.

(2) 若$\lambda_1\geqslant\sigma_1(\boldsymbol{B})$且$\lambda_2<\sigma_2(\boldsymbol{B})$,令$m_{\boldsymbol{B},\lambda}=\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{B}_2^+}\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{B}_1^+}\cdot\boldsymbol{k}_\lambda\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{B}_1^-}\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{B}_2^-}$.根据式(6),只需证明:$\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{B}_1^+}\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{B}_2^+}\boldsymbol{k}_\lambda\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{B}_2^-}\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{B}_1^-}$是可以$\mathscr{M}$的元素张成,就可以推出式(11).利用证明(1)的方法可以类似地证明出来.

现在来证明定理1:由引理2,知道从代数$\mathbf{T}'$到$S_\Delta(2,3)_{\mathbf{Q}}$有一个代数的满同态.根据命题2,知道代数$\mathbf{T}'$是由集合$\mathscr{M}:=\{m_{\boldsymbol{A}}\mid\boldsymbol{A}\in\boldsymbol{\Theta}_\Delta(2,3)\}$张成的.而根据文献[4],集合$\mathscr{M}$的同态像成为$S_\Delta(2,3)_{\mathbf{Q}}$的一组基,从而这两个代数同构.

参考文献:

[1] Doty S, Giaquinto A. Presenting Schur algebras [J]. International Mathematics Research Notices, 2002, 36: 1907.

[2] Doty S, Green R M. Presenting affine q-Schur algebras [J]. Mathematische Zeitschrift, 2007, 256: 311.

[3] McGerty K. Generalized q-Schur algebras and quantum Frobenius [J]. Advances in Mathematics, 2007, 214: 116.

[4] Deng B M, Du J, Fu Q. A double hall algebra approach to affine quantum schur-weyl theory [M]. New York: Cambridge University Press, 2012.

[5] Kac V. Infinite dimensional lie algebras [M]. 3rd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.

[6] Ginzburg V, Vasserot E. Langlands reciprocity for affine quantum groups of type A_n [J]. International Mathematics Research Notices, 1993, 3: 67.

[7] Yang D. On the affine Schur algebra of type A [J]. Commmunication in Algebra, 2009, 37: 1389.