

地基承载力尺寸效应离散元分析

蒋明镜^{1,2,3}, 李磊^{1,2,3}, 孙超^{1,2,3}

(1. 同济大学 土木工程防灾国家重点实验室, 上海 200092; 2. 同济大学 岩土及地下工程教育部重点实验室, 上海 200092;
3. 同济大学 土木工程学院, 上海 200092)

摘要: 采用离散元软件 PFC2D 模拟 4 种宽度的载荷试验, 并结合前人试验结果, 研究地基尺寸效应的一般规律, 探讨尺寸效应产生的原因。结果表明: 承载力系数随基础宽度的增大而减小, 减小量随基础宽度的增大而降低。p-s 曲线的最大曲率(即拐点的曲率)随基础宽度的增大而减小, 曲线总体形态逐渐趋于平滑。净砂在离散元模拟中, 它的强度包线为一条直线。随着应力水平的提高, 土颗粒的峰值内摩擦角基本不变, 但是地基极限承载力依然存在尺寸效应, 这说明强度包线的非线性并不是尺寸效应产生的根本原因。

关键词: 地基承载力; 承载力系数; 尺寸效应; 强度包线

中图分类号: TU43

文献标志码: A

Analysis on Scale Effect of Bearing Capacity of Foundation by Discrete Element Method

JIANG Mingjing^{1,2,3}, LI Lei^{1,2,3}, SUN Chao^{1,2,3}

(1. State Key Laboratory for Disaster Reduction in Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. Key Laboratory of Geotechnical and Underground Engineering of the Ministry of Education, Tongji University, Shanghai 200092, China; 3. College of Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: Based on the previous experimental results and a simulation loading test with 4 widths of the footing by employing the discrete element software of PFC2D, a study was made on the general law of scale effect and the causes of the scale effect. The result indicates that with the increasing of the width of the footing, bearing capacity factor decreases, and the amount of reduction decreases with the increasing of the width of the footing. Maximum curvature of p-s curve (i. e., the curvature of the inflection point) decreases with the increasing of the width of the footing, and the overall shape of p-s curve gradually gets smooth. In the discrete element method (DEM) simulation of net sand, the soil strength envelope is a straight line. When peak internal friction angle of particles remains as a constant with an increasing confining

pressure, the scale effect remains on the bearing capacity of the foundation, which suggests that the strength envelope of nonlinear is not the fundamental cause of scale effect.

Key words: foundation bearing capacity; bearing capacity factor; scale effect; strength envelope

在经典的承载力理论中, 砂土地基浅基础的极限承载力 q_{ult} 公式为

$$q_{ult} = 0.5\gamma BN_{\gamma}s_{\gamma} \quad (1)$$

式中: γ 为土的重度; B 为基础宽度; N_{γ} 为承载力系数, 仅与土的内摩擦角 φ 有关; s_{γ} 为形状参数, 对于条形基础可取 1.0。

在 Terzaghi^[1], Meyerhof^[2], Caquot 和 Kerisel^[3] 等提出的承载力计算公式中, 虽然承载力系数 N_{γ} 有不同的表达方式, 但在这些公式中承载力系数 N_{γ} 均被认为是峰值内摩擦角的函数。但是, 大量实验结果表明, 地基承载力系数 N_{γ} 随基础宽度的增大而减小, 即产生所谓的尺寸效应。

为研究尺寸效应产生的原因, 国内外许多学者已经进行了大量研究^[4-21]。这些研究工作主要是基于模型试验和有限单元法, 虽然取得许多有益的成果, 但是, 关于尺寸效应产生的根本原因, 还没有达成共识。对于室内试验, 由于多种影响因素同时并存, 在分析实验现象时确定各影响因素所起的作用比较困难。对于有限单元法则需要设定土体的本构模型, 难以反映土体的剪胀、颗粒转动等现象。离散单元法基于离散介质力学, 立足于土颗粒的微观接触机制和运动规律, 以此反映颗粒集合体在不同加载情况下的宏微观响应, 能有效反映颗粒微观信息与土体宏观力学特性的相互关系。

本文采用离散元软件 PFC2D, 对 4 种宽度的载

收稿日期: 2014-05-29

基金项目: 国家杰出青年科学基金(51025932); 国家自然科学基金(51179128)

第一作者: 蒋明镜(1965—), 男, 教授, 博士生导师, 国家杰出青年基金获得者, 主要从事天然结构性黏土、砂土、非饱和土、太空土和深海能源土宏观微观试验、本构模型和数值分析研究。E-mail: mingjing.jiang@tongji.edu.cn

荷试验进行数值模拟,并结合前人试验结果进行分析,研究尺寸效应的一般规律,探讨尺寸效应产生的原因.

1 离散元模拟

1.1 模型地基生成

在考虑地基对称性后,取其一半作为研究对象.为了制备更加均匀的试样,采用蒋明镜等^[22]提出的分层欠压法生成模型地基,如图 1 所示.地基模型的宽度为 0.48 m,高度约为 0.30 m,重力加速度为 10 g.根据相似原理,施加 10 倍地球重力加速度后,模型地基的尺寸相当于扩大了 10 倍.模型地基颗粒总数为 160 000,粒径分为 15 种,目标孔隙比为 0.18,土体颗粒级配如图 2 所示, $d_{50}=1.30$ mm,不均匀系数 $C_u=d_{60}/d_{10}=2.4$.详细物理参数如表 1 所示.

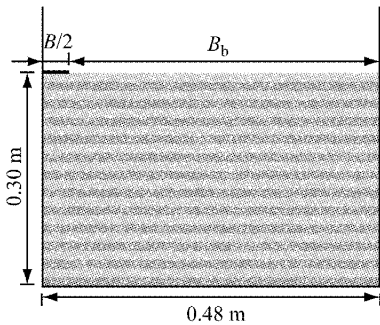


图 1 DEM 模型地基及其尺寸

Fig.1 DEM model ground and its size

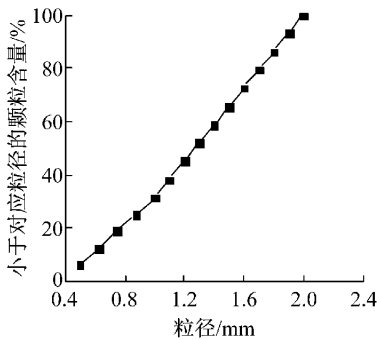


图 2 地基材料的颗粒级配曲线

Fig.2 Grain size distribution of ground material

1.2 模型地基固结

将地基模型在 10 倍重力加速度下固结,图 3 为地基固结完成后的孔隙比分布图.固结完成后孔隙比在 0.167 上下波动,比固结前的初始孔隙比稍密了一些,但地基中没有出现明显的过松或过密现象,故可以认为试样是基本均匀的,能够满足计算需要.

表 1 试样参数

Tab.1 Parameters of the sample

参数名称	数值
颗粒总数	160 000
颗粒直径 d/mm	0.5~2.0
颗粒密度 $\rho/(\text{kg}\cdot\text{m}^{-3})$	2 600
颗粒法向刚度 $k_n/(\text{N}\cdot\text{m}^{-1})$	1.5×10^8
颗粒切向刚度 $k_s/(\text{N}\cdot\text{m}^{-1})$	1.0×10^8
颗粒间摩擦系数 μ	1.0
初始孔隙比 e	0.18
墙体法向刚度 $k_n/(\text{N}\cdot\text{m}^{-1})$	1.5×10^8
墙体切向刚度 $k_s/(\text{N}\cdot\text{m}^{-1})$	1.0×10^8
颗粒与墙体摩擦系数 μ	1.0
局部阻尼系数	0.7

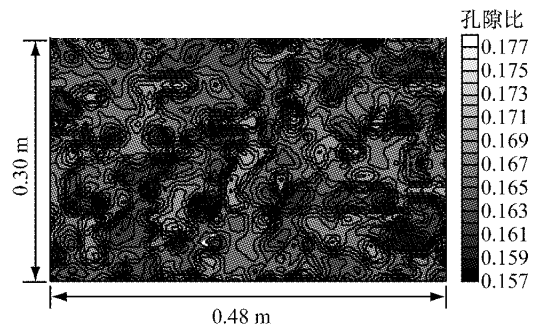


图 3 固结完成后地基土中的孔隙比

Fig.3 Void ratio in the foundation after consolidation

1.3 测定地基基本力学参数

利用 PFC2D 模拟双轴压缩试验,测试地基土的基本力学特性.试验围压取值分别为 40, 80, 120, 200, 300, 400 kPa,取值范围包含了地基土中可能出现的最大围压.在离散元中由于围压 σ_3 是可以设定的,而大主应力 σ_1 也可通过双轴试样上下加载板上的反力获得,故可以利用 $p=(\sigma_1+\sigma_3)/2$, $q=(\sigma_1-\sigma_3)/2$,求得球应力和偏应力.

如图 4 所示,试样的最大抗剪强度随围压的增大而增大,应力-应变曲线为典型的应变软化型.图

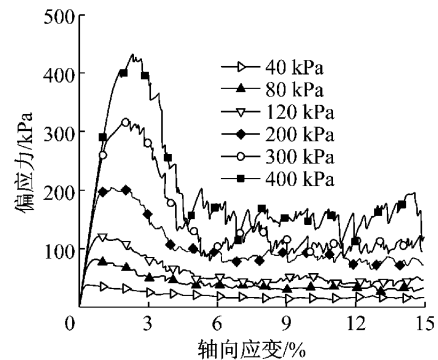


图 4 不同围压下地基土双轴试验应力-应变曲线

Fig.4 Stress-strain relationship of ground soil in biaxial tests under varied confining pressures

中峰值偏应力 q 与其所对应的围压 σ_3 基本相等,由偏应力与主应力的关系 $q = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$ 可知, $\sigma_1 \approx 3\sigma_3$.

地基土的强度包线如图 5 所示,根据试验结果可确定地基土的峰值内摩擦角 $\varphi_p = 31.5^\circ$,且随着围压的增大峰值内摩擦角基本保持为常数,没有出现增加或减小的现象.

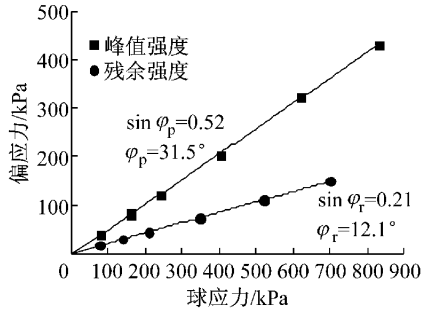


图 5 地基土强度包线

Fig.5 Strength envelope of ground soil

如图 6 所示,随着围压的增大主应力比保持为常数,没有出现明显地增大或减小.如图 7 所示,土体在剪切开始阶段存在轻微地剪缩,而后迅速转变为剪胀.

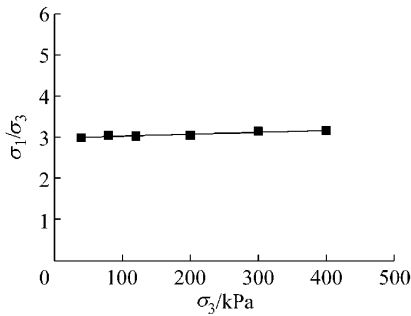


图 6 试样的峰值主应力比-围压关系

Fig.6 Relationship of peak principal stress ratio vs confining pressure of the tested material

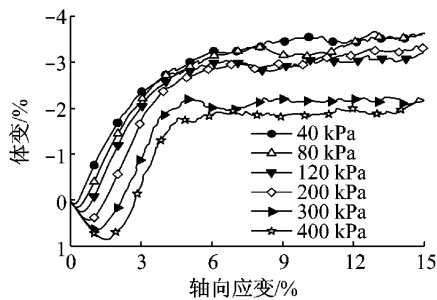


图 7 试样的体变-应变关系

Fig.7 Relationship of volumetric strain vs axial strain of the tested material

1.4 边界效应和粒径效应的考虑

模拟 4 种尺寸的载荷试验,缩尺后的基础半宽分别为 0.038,0.044,0.052,0.060 m.基础尺寸上限要避免模型箱侧壁的约束作用对边界受力条件和变形条件的影响,即避免边界效应的影响.基础尺寸下限要避免粒径效应的影响.在本模型中基础边界与模型箱侧壁的最小距离 $B_b = 0.42$ m,此时基础半宽 $B/2 = 0.060$ m, $B_b/B = 3.5$;最小基础宽度与最大粒径和平均粒径之比分别为 $B/d_m = 0.076/0.002 = 38$, $B/d_{50} = 0.076/0.013 = 58$.徐明等^[23]的离心模型试验结果表明,当 $B_b/B \geq 3$ 时,可以忽略边界效应的影响,当 $B/d_m \geq 23$ 时,可以忽略粒径效应的影响.本文采用的计算模型满足上述条件,故可以忽略边界效应及粒径效应的影响.

1.5 确定加载速度

在离散元数值模拟中,通过应变控制加载速度,加载速度过大或过小均不能反映实际地基承载力.①本文以基础半宽 0.06 m 的地基为试验对象,分别采用不同的速率 (0.005 0, 0.007 5, 0.010 0, 0.050 0, 0.100 0, 0.500 0 $m \cdot s^{-1}$) 加载,试验结果如表 2 所示.以加载速度为横坐标、地基极限承载力为纵坐标建立坐标系,对试验所得到的数据进行曲线拟合,得到地基极限承载力与加载速度之间的关系式 $q_u = 2.644v - 6.7$ (图 8).②利用太沙基地基极限承载力计算公式,估算地基土的极限承载力.已知地基土的峰值内摩擦角 $\varphi_p = 31.5^\circ$,查表得承载力系数 $N_\gamma = 23.65$,计算得 $q_{ult} = 0.5\gamma BN_\gamma = 184.5$ kPa.③把利用太沙基公式计算得到的地基极限承载力值,代入拟合公式 $q_u = 2.644v - 6.7$ 中反算加载速度,得到加载速度为 $0.072 m \cdot s^{-1}$.将加载速度 $0.072 m \cdot s^{-1}$ 分别应用到不同基础宽度下的计算中,在加载速度相同、基础尺寸不同的情况下,土体的应变率是相同的,所不同的仅仅是受影响的土体范围.此种情况下,土体的强度参数是相同的,故在同一加载速度下研究地基承载力的尺寸效应是合理的.

表 2 不同加载速度下模拟地基的极限承载力

Tab.2 Ultimate bearing capacities of simulation foundation at different loading velocities

加载速度/($m \cdot s^{-1}$)	地基极限承载力/kPa
0.005 0	10.83
0.007 5	15.00
0.010 0	20.00
0.050 0	125.00
0.100 0	250.00
0.500 0	1 316.67

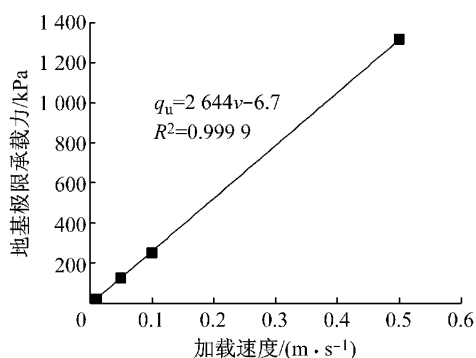


图 8 地基极限承载力与加载速度关系

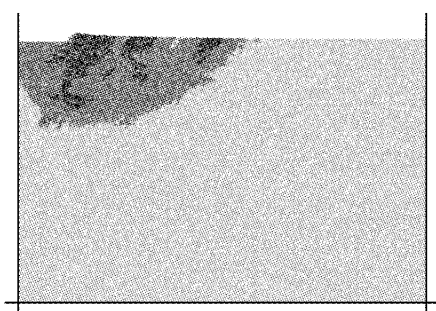
Fig.8 Relationship between loading velocity and ultimate bearing capacity of foundation

2 模拟计算结果分析

2.1 典型场量、应力路径及应力水平

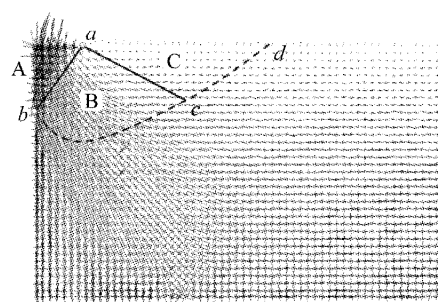
由于不同基础宽度下地基土体内部的主要场量、应力路径及应力水平等比较相似,故以下仅以基础半宽为 0.06 m 时的地基为例分析相关场量、应力路径及应力水平在地基达到极限承载力时的规律。

根据地基中土颗粒的速度分布范围将速度场平均分成 5 个小区间并分别着色,如图 9 所示。地基达到极限承载力时,土颗粒的运动主要集中在滑动区,其他区域的运动速度则比较小。

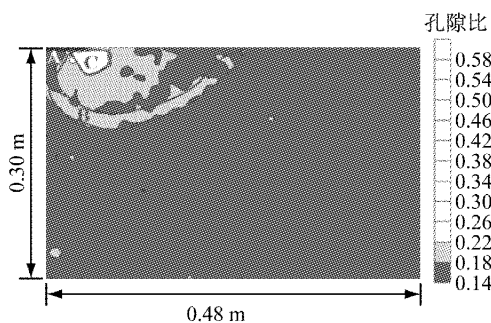
图 9 速度场 ($B/2=0.06$ m)Fig.9 Velocity field ($B/2=0.06$ m)

在图 10 中,“十”字符号的大小表示两个主应力的方向,由图可知,主应力偏转存在明显的分区现象。在 A 区(弹性区),主应力整体沿顺时针方向发生偏转,且偏转角度较小;在 B 区(普朗特径向剪切带),主应力整体沿逆时针方向发生偏转,偏转量较大;在 C 区(郎肯被动土压力区),主应力整体沿顺时针方向发生偏转,且偏转角度较小。主应力偏转的分区现象佐证了以往滑动体分区的合理性。

由图 11 可知,达到极限承载力的地基土,其内部的空隙比也发生了明显的变化,在滑裂面附近(B

图 10 主应力场 ($B/2=0.06$ m)Fig.10 Principal stress field ($B/2=0.06$ m)

区)土体发生剪胀,孔隙比明显增大;在载荷板右侧边缘附近土体孔隙比明显变大并存在一个中心区域(C区),在中心区域以外,普朗特径向剪切带的绝大部分土体都同时发生了剪胀现象。

图 11 地基中的孔隙比 ($B/2=0.06$ m)Fig.11 Void ratio in the foundation ($B/2=0.06$ m)

转动是表征颗粒运动状态的非经典场量,本文采用蒋明镜等^[24]提出的平均纯转动率(APR)来表征颗粒的转动情况。如图 12 所示,图中黑色表示顺时针转动,白色表示逆时针转动,可以发现在滑动带上转动比较集中,且整个滑动带上的转动方向是一致的。

为了研究滑动带上土体单元的应力路径,在滑动带上布置了 4 个测量圆,测量圆的大致位置如图 12 所示,结果如图 13 所示。对比分析 A, B, C, D 这 4 个测点的应力路径可以发现,当达到极限承载力时, A, B, C, D 这 4 个测点都处于极限状态,但尚没有测点出现明显的软化现象。

图 14 为达到极限承载力时典型土体单元的应力水平与载荷板竖向位移的全过程关系曲线。图中横坐标表示载荷板的竖向位移,纵坐标表示土体单元在一定应变下的应力水平, η 为某一位移情况下土体单元中的偏应力 q 与此时的球应力 p 的比值, M 为土体所能承受的最大偏应力 q' 与此时的球应力 p 的

2.2 p - s 曲线的形态特征分析

4 种基础宽度对应的 p - s 曲线如图 15 所示。从

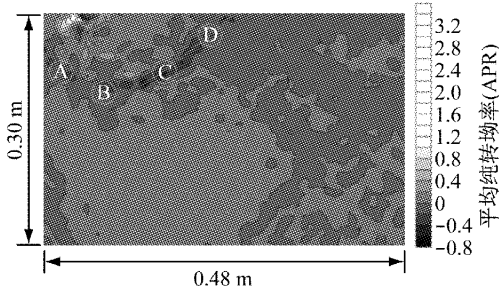


图 12 转动场 APR($B/2=0.06\text{ m}$)
Fig.12 APR of rotation field ($B/2=0.06\text{ m}$)

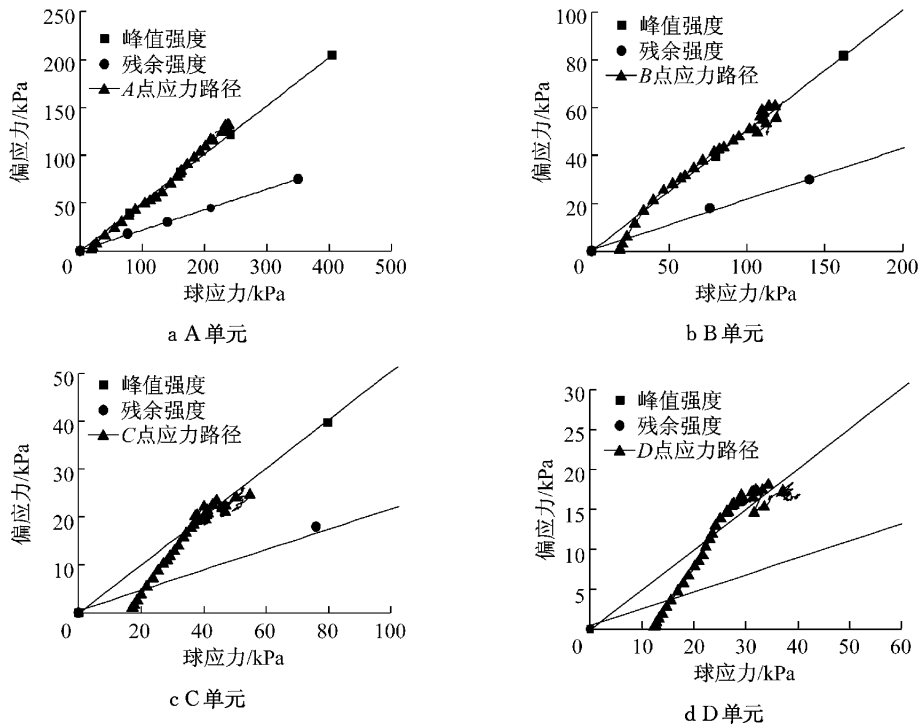


图 13 典型土体单元的应力路径
Fig.13 Typical stress paths of soil elements

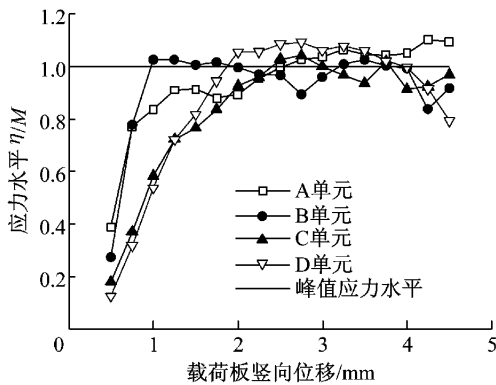


图 14 土体单元应力水平与荷载板竖向位移的关系
Fig.14 Relationship of stress leve of soil elements vs the vertical displacement of loading plate

比值,即 $p-q$ 平面上峰值强度包线的斜率(如图 5 所示, $M=0.52$)。由图 5 可知,在 4 个典型土体单元中, B 单元首先进入极限状态, A, B, C, D 单元进入极限状态则稍晚一些,当荷载板位移为 2.5 mm 左右时, A, B, C, D 这 4 个测点都进入了极限状态,但是此时地基并没有立即达到极限承载力,而是在荷载板位移达到约 4.5 mm 时才达到极限承载力。图 5 中土体单元的应力水平有时超过了峰值应力水平,这是由于这些土体单元的应变率大于双轴试验时试样的应变率所造成的。

式比较接近整体剪切破坏, $p-s$ 曲线的拐点比较明显。但是随着基础宽度的增大 $p-s$ 曲线拐点处的曲率逐渐减小,曲线总体形态趋于平滑。对于进一步研究 $p-s$ 曲线形态与基础宽度之间的关系,将数值计算结果与前人试验成果进行粗略地定性对比是有一定积极意义的。

根据离散元计算结果及 Cerato 和 Lutenege^[20] 的试验结果不难发现,随着基础宽度的增大, $p-s$ 曲线的最大曲率(即拐点处的曲率)逐渐减小,拐点越来越不明显,并最终可使地基的破坏模式从整体剪切破坏过渡到局部剪切破坏。由于经典的地基极限承载力计算,没有考虑地基破坏模式的微妙变化,这可能成为导致尺寸效应产生的一个因素。

$p-s$ 曲线的形态判断, 4 种基础宽度下地基的破坏模

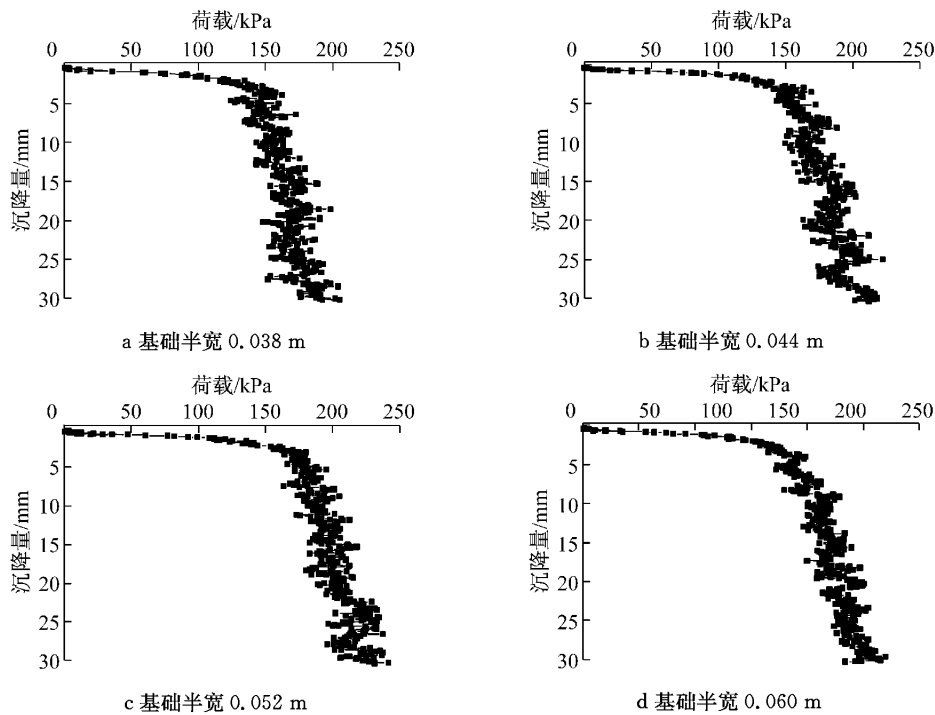


图 15 不同基础宽度的 $p-s$ 曲线

Fig.15 $p-s$ curves of different footing widths

2.3 承载力系数变化趋势分析

不同基础宽度下地基极限承载力如表 3 所示。通过太沙基地基极限承载力公式反算得到不同宽度下的地基承载力系数 N_γ ，绘制出的曲线如图 16 所示。由图可知，承载力系数 N_γ 随着基础宽度的增大而减小，减小量随基础宽度的增加而降低。

表 3 不同宽度基础的地基承载力

Tab.3 Bearing capacity of foundation with different widths

基础半宽/m	地基极限承载力/kPa	地基承载力系数 N_γ
0.038	140	28.34
0.044	150	26.22
0.052	170	25.15
0.060	185	23.72

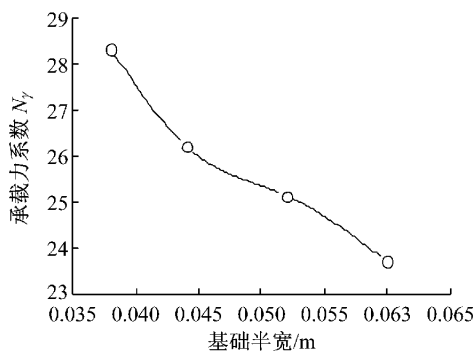


图 16 离散元试验中承载力系数与基础宽度的关系

Fig.16 Relationship between coefficient of bearing capacity and footing width in discrete element tests

为更好地分析尺寸效应的基本规律，继承已有研究成果，将离散元模拟结果与 Cerato 和 Lutenegger^[20] 的室内试验结果进行了定性对比，结果表明，数值试验结果与室内试验结果在整体趋势上一致。

3 离散元计算结果与传统认识对比

3.1 传统认识一

砂土在不同围压下剪破时的大、小主应力比 $(\sigma_1/\sigma_3)_f$ 随围压 σ_3 的增大而减小^[25]。如图 17 所示，不论砂土密实度如何，主应力比 $(\sigma_1/\sigma_3)_f$ 开始都随围压 σ_3 的增大而减小，密实度越大主应力比减小越显

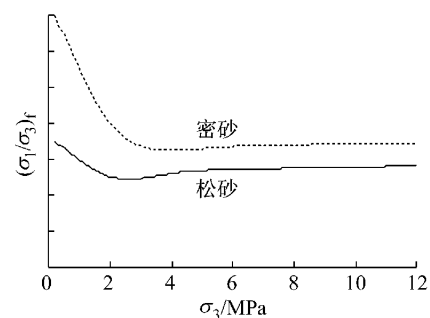


图 17 主应力比 $(\sigma_1/\sigma_3)_f$ 与 σ_3 的关系^[25]

Fig.17 Relationship between the ratio of principal stresses and confining pressure^[25]

著,当围压 σ_3 达到某一值后,主应力比 $(\sigma_1/\sigma_3)_f$ 几乎保持为常数。

根据摩尔-库伦强度理论,无黏性土的极限平衡条件为

$$\sigma_1 = \sigma_3 \tan^2(45^\circ + \varphi/2) \quad (2)$$

$$\text{即} \quad (\sigma_1/\sigma_3)_f = \tan^2(45^\circ + \varphi/2) \quad (3)$$

故当主应力比 $(\sigma_1/\sigma_3)_f$ 有较大值时,相应的峰值内摩擦角 φ 也有较大值,当主应力比 $(\sigma_1/\sigma_3)_f$ 保持为常数时,相应的峰值内摩擦角 φ 为常数。又因为承载力系数 N_γ 仅与土的峰值内摩擦角 φ 有关,且 N_γ 随着 φ 地减小而减小。所以得出如下结论:随着土体应力水平地提高,土体的峰值内摩擦角减小,地基承载力系数 N_γ 减小。

3.2 传统认识二

图 18 为砂土的摩尔-库伦强度包线,图中,①代表纯滑动摩擦强度包线;②表示纯粹由剪胀(+)与剪缩(-)引起的强度包线的变化;③表示实际的强度包线。由图可知,在低压力下,紧砂的剪胀性使砂土的峰值内摩擦角明显增大,强度包线坡度陡,随着围压的增加,剪胀变为剪缩,颗粒挤碎作用逐渐加大影响,峰值内摩擦角变小。许多研究者从以上强度包线的非线性出发得出与传统认识一相同的结论:随着土体应力水平的提高,土体的峰值内摩擦角减小,地基承载力系数 N_γ 减小,即强度包线的非线性导致了尺寸效应的产生。

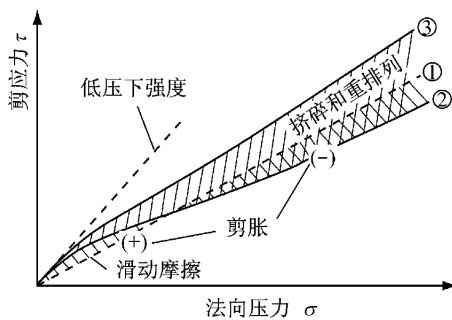


图 18 砂土的强度包线

Fig.18 Strength envelope of sand

3.3 离散元计算结果

在离散元计算模型中颗粒是用圆盘代替的,不存在颗粒挤碎现象。如图 5 所示,通过双轴试验测得理想砂土的强度包线是一条直线,土体的峰值内摩擦角随着围压的增大基本保持为常数,没有明显的减小。如图 6 所示,理想砂土的主应力比随围压的增大也基本保持为常数,没有明显的减小。但是,如图 16 所示,地基承载力尺寸效应依然存在,而且承载力系数的变化规律与室内试验结果基本吻合,这说明:

“强度包线的非线性(即随着土体应力水平的提高,土体的峰值内摩擦角减小)”,并不是尺寸效应产生的根本原因。

4 结论

采用离散单元法,模拟了 4 种宽度的载荷试验,并结合前人试验结果,研究了尺寸效应的一般规律,探讨了尺寸效应产生的原因,得出了以下结论:

(1)地基承载力系数 N_γ 随基础宽度的增大而减小,减小量随基础宽度的增加而降低。

(2)随着基础宽度的增大 $p-s$ 曲线的最大曲率(即拐点处的曲率)逐渐减小,曲线总体形态逐渐趋于平滑。

(3)在离散元计算中,土体的强度包线为一条直线,不同应力水平下,土体的内摩擦角为常数,但是地基承载力依然存在尺寸效应,说明强度包线的非线性并不是导致尺寸效应的根本原因。

参考文献:

- [1] Terzaghi K. Theoretical soil mechanics[M]. New York: Wiley Press, 1943.
- [2] Meyerhof G G. Some recent research on the bearing capacity of foundations[J]. Canadian Geotechnical Journal, 1963, 1(1): 16.
- [3] Caquot A, Kerisel J. Sur le terme de surface dans le calcul des fondations en milieu pulverulent[C]// Proceedings of the Third International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering. Zürich;[s. n.], 1953: 336-337.
- [4] Berry D S. Stability of granular mixtures[C]// Proceedings of the 38th Annual Meeting of ASTM. Philadelphia: ASTM,1935: 491-507.
- [5] De Beer E E. The scale effect in the transposition of the results of deep-sounding tests on the ultimate bearing capacity of piles and caisson foundations[J]. Geotechnique, 1963,13(1): 39.
- [6] Tatsuoka F. Progressive failure and particle size effect in bearing capacity of a footing on sand[C]// Proceedings of Geotechnique Engineering Congress. Boulde: ASCE Geotechnolgy Special Publication, 1991: 788-802.
- [7] Tatsuoka F, Siddiquee M S A, Tanaka T. Link among design, model tests, theories and sand properties in bearing capacity of footing on sand [C]//Proceedings of the 13th International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering. New Delhi: International Society for Soil Mechanics and Foundation Engineering, 1994:87-88.
- [8] Ovesen N K. Centrifugal testing applied to bearing capacity problems of footings on sand[J]. Geotechnique, 1975, 25(2): 394.
- [9] Yamaguchi M. On the scale effect of footings in dense sand [C]//Proceedings of the 9th International Conference on Soil

- Mechanics and Foundation Engineering. Tokyo:[s. n.], 1977; 795-798.
- [10] Herle I, Teichman J. Effect of grain size and pressure level on bearing capacity of footings on sand [C]// IS-Nagoya' 97: Deformation and Progressive Failure in Geomechanics. Nagoya:[s. n.], 1997; 781-786.
- [11] Fukushima S, Tatsuoka F. Strength and deformation characteristics of saturated sand at extremely low pressures [J]. Soils and Foundations, 1984, 24(4): 30.
- [12] Boblton M D. The strength and dilatancy of sands [J]. Geotechnique, 1986, 36(1): 65.
- [13] Graham J, Hovan J M. Stress characteristics for bearing capacity in sand using a critical state model [J]. Canadian Geotechnical Journal, 1986, 23(2): 195.
- [14] Hettler A, Gudehus G. Influence of the foundation width on the bearing capacity factor [J]. Soils and Foundations, 1988, 28(4): 81.
- [15] Ueno K, Miura K, MAaed Y. Prediction of ultimate bearing capacity of surface footings with regard to size effects [J]. Soils and Foundations, 1998, 38(3): 165.
- [16] Maeda K, Miura K. Confining stress dependency of mechanical properties of sands [J]. Soils and Foundations, 1999, 39(1): 53.
- [17] Lancelot L, Shahrour I, Al Mahmoud M. Failure and dilatancy properties of sand at relatively low stresses [J]. Journal of Engineering Mechanics, 2006, 132(12): 1396.
- [18] Das B M. Shallow foundations: bearing capacity and settlement [M]. Boca Raton: CRC Press, 2009.
- [19] Pu J L, Ko H Y. Experimental determination of bearing capacity in sand by centrifuge footing tests [C]// Proceedings of International Conference of Centrifuge. Rotterdam: [s. n.], 1988; 293-299.
- [20] Cerato A B, Lutenegeger A J. Scale effects of shallow foundation bearing capacity on granular material [J]. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 2007, 133(10): 1192.
- [21] 柳飞, 杨俊杰. 离心模型试验模拟平板载荷试验研究 [J]. 岩土工程学报, 2007, 29(6): 880.
LIU Fei, YANG Junjie. Study on plate loading test by centrifugal model tests [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2007, 29(6): 880.
- [22] Jiang M J, Konrad J M, Leroueil S. An efficient technique for generating homogeneous specimens for DEM studies [J]. Computers and Geotechnics, 2003, 30(5): 579.
- [23] 徐光明, 章为民. 离心模型中的粒径效应和边界效应研究 [J]. 岩土工程学报, 1996, 18(3): 80.
XU Guangming, ZHANG Weimin. A study of size effect and boundary effect in centrifugal tests [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1996, 18(3): 80.
- [24] Jiang M J, Yu H S, Harris D. Kinematic variables bridging discrete and continuum granular mechanics [J]. Mechanics Research Communications, 2006, 33(5): 651.
- [25] 殷宗泽, 王宝田, 余湘娟, 等. 土工原理 [M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2007.
YIN Zongze, WANG Baotian, YU Xiangjuan, *et al.* Geotechnical principles [M]. Beijing: China Water Conservancy and Electricity Press, 2007.