文章编号：0253-374X(2016)03-0471-02　　　　DOI:10.11908/j.issn.0253-374x.2016.03.021

用图的分割原理计算一些 Ramsey 数

裴超平
(同济大学 数学系，上海 200092)

摘要：Ramsey 数 $R(G,H)$ 为最小的正整数 N,使得对完全图 K_N 的边集的任意红蓝二着色,都存在红色的子图 G 或者蓝色的子图 H. 结合 Burr 的一个定理和图的分割原理,证明当 $n\geqslant|G|^2+2\chi(G)\alpha(G)$ 时,$R(P_n,G)=(\chi(G)-1)(n-1)+\sigma(G)$.

关键词：Ramsey 数；Ramsey 完备性；路径
中图分类号：O157.5　　　　**文献标志码**：A

Using Partitioning Graphs to Calculate Some Ramsey Numbers

PEI Chaoping
(Department of Mathematics, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: Ramsey number is the smallest integer N such that for any red-blue edge-coloring of K_N, there is a red subgraph G or a blue subgraph H. In this paper, we use a theorem of Burr and the method of partitioning graphs to prove that if $n\geqslant|G|^2+2\chi(G)\alpha(G)$, then $R(P_n,G)=(\chi(G)-1)(n-1)+\sigma(G)$.

Key words: Ramsey numbers; Ramsey goodness; path

1 研究内容

本文所讨论的图都是简单图. 对于给定的图 G 和 H,Ramsey 数 $R(G,H)$ 为最小的正整数 N,使得对完全图 K_N 的边集的任意红蓝二着色,都存在红色的子图 G 或者蓝色的子图 H. 设 $\Delta(G)$ 为图 G 的最大度,$\chi(G)$ 为图 G 色数,$\alpha(G)$ 为 G 的最大独立集所含顶点数,$\sigma(G)$ 为 G 的着色剩余,即对 G 的顶点集的任意 $\chi(G)$-真着色中最小的颜色集所包含的顶点数. Burr[1] 得到如下的下界.

引理 1　给定图 G 和连通图 H,$|H|\geqslant\sigma(G)$,则:

$$R(H,G)\geqslant(\chi(G)-1)(|H|-1)+\sigma(G)$$

称 H 是 G-good,如果引理 1 中的等式成立. Burr[1] 证明了如果连通图 H 含有一条充分长的悬挂路径且 $|H|\geqslant\sigma(G)$,则 H 是 G-good 的. 由此引出一个问题:对于给定的图 G,H 中的悬挂路径有多长就能保证 H 是 G-good？这个问题的难度非常高,因为 Ramsey 数的求解一直是数学上具有挑战的问题之一. 因此研究一个更具体的问题:路径 P_n 有多长,能保证 P_n 是 G-good? Allen 等[2] 猜想只要 $n\geqslant\chi(G)|G|$ 就可以.

图的分割原理是近年来图论新兴起的课题之一,它研究的是对完全图的边集进行二着色后,其顶点集可以被多少条不相交的路径或者圈覆盖. Pokrovskiy[3-4] 证明了如下定理:

定理 1　对于任意的正整数 k,以及 $n\geqslant k$,假设 K_n 的边集被红蓝两种颜色着色. 则 K_n 的顶点集可以被 k 条不相交的红色路径和一个不相交的每个部集都相等的蓝色完全$(k+1)$-部图覆盖. 这里的路径和完全多部图可以是空集.

用定理 1 可以求解出关于路径的 Ramsey 数 $R(P_n,G)$.

定理 2　对于给定的图 G,当 $n\geqslant|G|^2+2\chi(G)\cdot\alpha(G)$ 时,$R(P_n,G)=(\chi(G)-1)(n-1)+\sigma(G)$.

2 定理证明

为了证明定理 2,回顾一下 Burr 的定理.

定理 3[1]　设 G 是一个具有 p 个顶点的图. 令 H 为含 n 个顶点的连通图,并且含一条长度为 m 的悬挂路径. 设 G_1 是 G 中删除含 u 个顶点的独立集所得到的图,H_1 是 H 的悬挂路径缩减 1 后的得到的

收稿日期：2015-04-23
第一作者：裴超平(1989—),男,博士生,主要研究方向为组合数学和图论,E-mail:peichaoping@msn.cn

图.如果 $m\geqslant(p-2)(p-u)+u+1$,则:

$$R(H,G)\leqslant\max(R(H_1,G),R(H,G_1)+n-1)$$

考虑 $H=P_n$,即 $n\geqslant|G|^2$ 时,有 $R(P_n,G)\leqslant\max(R(P_{n-1},G),R(P_n,G_1)+n-1)$.

设 $k=\chi(G)$.由于 $k=1$ 的情况是平凡的,假设 $k\geqslant2$.

设 $n_0=|G|^2+2(k-1)\alpha(G)$.归纳假设当 $n\geqslant n_0$ 时,$R(P_n,G_1)=(k-2)(n-1)+\sigma(G)$.证明当 $n\geqslant|G|^2+2k\alpha(G)$时,$R(P_n,G)=(k-1)(n-1)+\sigma(G)$.由定理3得:

$$R(P_n,G)\leqslant\max(R(P_{n-1},G),R(P_n,G_1)+n-1)$$

重复应用定理3,可以得 $R(P_{n-1},G)\leqslant\max(R(P_{n-2},G),(k-1)(n-1)+\sigma(G))$.于是,

$$R(P_n,G)\leqslant\max(R(P_{n-2},G),(k-1)(n-1)+\sigma(G))\leqslant\cdots\leqslant\max(R(P_{n_0},G),(k-1)(n-1)+\sigma(G))$$

设 $h=(\chi(G)-1)(n_0-1)+k\alpha(G)$.由定理1,对完全图 K_h 的任意红蓝二着色,其顶点集可以被 $k-1$ 条不相交的红色路径和1个不相交的蓝色等部集的完全 k 部图覆盖.如果这 $k-1$ 条路径中不存在红色 P_{n_0},则显然会存在蓝色的 $K_k(\alpha(G))$,从而含有一个蓝色的图 G.所以,得到 $R(P_{n_0},G)\leqslant(k-1)(n_0-1)+k\alpha(G)$.

由条件 $n\geqslant|G|^2+2k\alpha(G)=n_0+2\alpha(G)$以及 $k\geqslant2$,可得:

$$(k-1)(n-1)+\sigma(G)\geqslant(k-1)(n_0-1)+(2k-2)\cdot\alpha(G)\geqslant(k-1)(n_0-1)+k\alpha(G);$$

所以

$$R(P_n,G)\leqslant\max(R(P_{n_0},G),(k-1)(n-1)+\sigma(G))\leqslant(k-1)(n-1)+\sigma(G),$$

得证.

3 展望

相信,如果能够缩小定理3中关于悬挂路径的条件,就能够求出使得 P_n 是 G-good 的更严格的条件.而如果能给出 $R(C_{n_0},G)$的约束条件的话,可以将这个结论推广到圈上.

参考文献:

[1] Burr S A. Ramsey numbers involving graphs with long suspended paths [J]. Journal of the London Mathematical Society, 1981, 24(2): 405.

[2] Allen P, Brightwell G, Skokan J. Ramsey-goodness and otherwise [J]. Combinatorica, 2013, 33(2): 125.

[3] Pokrovskiy A. Partitioning edge-colored complete graphs into monochromatic cycles and paths [J]. Journal of Combinatorical Theory Series B, 2014, 106: 70.

[4] Pokrovskiy A. Partitioning edge-coloured complete graphs into monochromatic cycles [J]. Electronic Notes in Discrete Mathematics, 2013, 43: 311.