第44卷第3期
2016年3月

同济大学学报(自然科学版)
JOURNAL OF TONGJI UNIVERSITY(NATURAL SCIENCE)

Vol.44 No.3
Mar. 2016

文章编号：0253-374X(2016)03-0469-02

DOI:10.11908/j.issn.0253-374x.2016.03.020

双星图的 Ramsey 数的上界

余　培，李雨生
（同济大学 数学系，上海 200092）

摘要：对给定的两个图 G 和 H，Ramsey 数 $R(G,H)$是最小的正整数 N，使得对完全图 K_N 的边任意红/蓝着色，则或者存在红色子图 G，或者存在蓝色子图 H. 双星 $B(m,n)$为直径是3，有两个中心顶点，其顶点度分别为 $m+1$ 和 $n+1$ 的树. 得到，当 $n>m$ 时，$R(B(m,n))<2n+m+2$；当 $n=m$ 或 $n=m+1$ 时，$R(B(m,n))=2m+n+2$.

关键词：Ramsey 数；树；双星
中图分类号：O157.5　　**文献标志码**：A

An Upper Bound for the Ramsey Numbers of Bistars

YU Pei, LI Yusheng
(Department of mathematics, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: For two given graphs G and H, Ramsey number $R(G,H)$ is the smallest integer N such that any red/blue edge-coloring of K_N contains a red copy of G or a blue copy of H. Let a bistar $B(m,n)$ be a tree of diameter three with two central vertices of degree $m+1$ and $n+1$, respectively. It is shown that $R(B(m,n))<2n+m+2$ for $n>m$; and $R(B(m,n))=2m+n+2$ for $n=m$ or $n=m+1$.

Key words: Ramsey number; tree; bistar

1　引言

本文中研究的图均为简单图. 对给定的两个图 G 和 H，Ramsey 数 $R(G,H)$是最小的正整数 N，使得对完全图 K_N 任意的红/蓝 边着色，则或者存在红色子图 G，或者存在蓝色子图 H. 当 $G=H$ 时，简记 $R(G,G)=R(G)$.

Ramsey 数是组合数学中公认的难题. 以 T_n 表示具有 n 个顶点的树. 作为最简单的图类，其 Ramsey 数 $R(T_n)$格外引人关注. 两种经典的树图，星 $K_{1,n-1}$和路 P_n 的 Ramsey 数已知如下，分别见文献[1-2]和文献[3].

引理1　设 n 为大于1的正整数，则 $R(K_{1,n-1})=\begin{cases}2n-3, n\text{ 为奇数},\\ 2n-2, n\text{ 为偶数}.\end{cases}$

引理2　设 n 为大于1的正整数，则 $R(P_n)=n+\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-1$.

Erdös 和 Faudree 等[4]得到 $R(T_n)$的最优下界 $4n/3-1$，对于上界有一个经典的猜想.

猜想1　设 n 是大于1的正整数. 是否任何树 T_n 都满足 $R(T_n)\leqslant R(K_{1,n-1})$.

这个猜想没有获得任何证实，但可以看到 $R(P_n)$是满足猜想1的. 本文研究一类特殊的树：双星图 $B(m,n)$. 它是直径为3，有两个中心顶点，其顶点度分别为 $m+1$ 和 $n+1$ 的树. 直观地讲，就是用一条边连接两个星 $K_{1,m}$和 $K_{1,n}$的中心点. 如没有特殊说明，文中假设 $n\geqslant m$. 对于 $B(m,n)$，文中求出了它的 Ramsey 上界，同时得到它也满足猜想1.

如果用 k 种颜色对图 G 的顶点进行着色，使得两个相邻的顶点有不同的颜色则称图 G 是可 k 真着色的. 将真着色中的最小 k 称为图 G 的色数，记为 $x(G)$. 用 $s(G)$表示对 G 进行 $x(G)$点着色时，相同颜色顶点类所含顶点数的最小值. Burr[5]得到 Ramsey 数的一般下界.

引理3　若图 G 和 H 满足，G 连通且 G 的顶点数大于等于 $s(H)$，则：

$$R(G,H)\geqslant(x(H)-1)(|G|-1)+s(H).$$

对 $B(m,n)$而言，$x(B(m,n))=2$，$s(B(m,n))=m+1$，故可得到推论1的结果.

推论1　当正整数 $n\geqslant m$ 时，$R(B(m,n))\geqslant 2m+n+2$.

在有关双星 $B(m,n)$的 Ramsey 数的研究中，

收稿日期：2015-04-24
第一作者：余　培(1993—)，男，博士生，主要研究方向为组合数学与图论. E-mail：yupeizjy@163.com

Guo 和 Volkman[6] 得到 $R(B(1,n))$ 的值. 最近 Bahlas 和 Spencer[7]得到下面的结果:①当 $m=2$, $n\geqslant 3$ 时,$R(B(2,n))\leqslant 2n+3$. ②当 $m\geqslant 3$, $m+2\leqslant n\leqslant 2m-1$ 时,$R(B(m,n))\leqslant 2n+m+1$. ③当 $m\geqslant 3$, $n\in\{m,m+1\}$ 时,$R(B(m,n))\leqslant 2m+n+1$.

本文扩充了①~③的结果,同时指出文献[7]中得到的③中的结果是有问题的,这里修正为定理1并给出相应的证明.

定理1 当 $n=m$ 或 $n=m+1$ 时, $R(B(m,n))=2m+n+2$.

定理2 当 $n\geqslant m$ 时,$R(B(m,n))\leqslant 2n+m+1$.

2 证明

给定图 G, 用 $|G|$ 表示图 G 的顶点个数, $N(v)$ 和 $d(v)$ 分别表示顶点 v 的邻域和度数. 给图 G 的边红/蓝着色时,记 $N_r(v)=\{u\in G|\ \{u,v\}$ 是红边$\}$ 是 v 的红邻域,$d_r(v)=|N_r(v)|$ 为其红色度. 类似地定义蓝邻域 $N_b(v)$ 和蓝色度 $d_b(v)$.

在证明定理1之前,先引入引理4并给出相应的证明.

引理4 已知正整数 m,n,N 满足 $n\geqslant m$, $2m+n+2\leqslant N\leqslant 2m+2n+1$. 给完全图 K_N 的边任意红/蓝着色,若不含单色 $B(m,n)$,则对 K_N 中任意点 v,均有:

$$N-m-n\leqslant d_r(v),\ d_b(v)\leqslant m+n-1.$$

证明 若存在顶点 v 满足 $d_r(v)\geqslant m+n+1$, 则对 $N_r(v)$ 中任意点 u,均有 $d_r(u)\leqslant m$,否则存在红色 $B(m,n)$. 由于 $d_r(u)+d_b(u)=N-1$,故 $d_b(u)\geqslant N-1-m\geqslant m+n+1$. 类似的分析可知,对 $N_b(u)$ 中任意 w 均有 $d_b(w)\leqslant m$, $d_r(w)\geqslant m+n+1$. 若 $N_r(v)$ 和 $N_b(u)$ 的交集非空,取 x 为其中一点,则 $d_r(x)\leqslant m$ 且 $d_r(x)\geqslant m+n+1$,矛盾. 若 $N_r(v)$ 和 $N_b(u)$ 的交集为空,则:$N\geqslant|N_r(v)|+|N_b(u)|+1\geqslant 2(m+n+1)+1$,矛盾. 故对任意点 v 均有 $d_r(v)\leqslant m+n$,类似地 $d_b(v)\leqslant m+n$. 此时若 K_N 中存在一点 v 满足 $d_r(v)=m+n$,则 $d_b(v)=N-1-(m+n)\geqslant m+1$. 对 $N_r(v)$ 中任意点 w,由于 $d_b(w)\leqslant m+n$,故 $d_r(w)\geqslant N-1-(m+n)\geqslant m+1$. 若 w 与 $N_b(v)$ 之间存在红边,则存在 w, v 为中心点的红色 $B(m,n)$,矛盾. 故 $N_r(v)$ 与 $N_b(v)$ 之间全是蓝边,此时 $\{v\cup N_r(v)\}$ 与 $N_b(v)$ 之间包含蓝色完全二部图 $K_{m+n+1,m+1}$, 从而有蓝色 $B(m,n)$,矛盾. 故对 K_N 中任意点 v,均有 $d_r(v)\leqslant m+n-1$,类似的,$d_b(v)\leqslant m+n-1$.

由 $d_r(v)+d_b(v)=N-1$ 可知 $N-m-n\leqslant d_r(v), d_b(v)\leqslant m+n-1$,证毕.

定理1的证明 当 $n=m$ 或 $n=m+1$ 时,由推论1可知,$R(B(m,n))\geqslant 2m+n+2$. 下面只需证: $R(B(m,n))\leqslant 2m+n+2$.

记 $N=2m+n+2$,给完全图 K_N 的边任意红/蓝着色,记 R 和 B 为所得到的红色子图和蓝色子图. 假设不含单色 $B(m,n)$,由引理4知,对 K_N 中任意点 v,均满足 $d_r(v)$,$d_b(v)$ 落在区间$[m+2,m+n-1]$内,其中 $m+2\geqslant n+1$. 不妨设 $d_r(v)=m+n-a$, $d_b(v)=m+1+a$,其中 $1\leqslant a\leqslant n-2$. 考虑 $N_r(v)$ 与 $N_b(v)$ 之间边的连接情况. $N_r(v)$ 中的任意点 w 到 $N_b(v)$ 中至多有 a 条红边,否则将会存在一个以 w, v 为中心点的红色 $B(m,n)$;类似地 $N_b(v)$ 中任意点 w 到 $N_r(v)$ 中至多有 $n-a-1$ 条蓝边,否则将存在一个以 v, w 为中心的蓝色 $B(m,n)$. 因此 $N_r(v)$ 与 $N_b(v)$ 之间最多有 $a(m+n-a)+(n-a-1)(m+1+a)$ 条边,但经验算:

$$(m+n-a)(m+1+a)=|N_r(v)|*|N_b(v)|>a(m+n-a)+(n-a-1)(m+1+a)$$

这产生矛盾. 故原假设不成立,从而存在单色 $B(m,n)$. 证毕.

定理2的证明 记 $N=2n+m+1$, 给完全图 K_N 的边任意红/蓝着色,记 R 和 B 为所得到的红色子图和蓝色子图.

情形1 $m+1\leqslant n\leqslant 2m-1$ 时,用类似于定理1的证明或直接引用文献[7]中的结果,可知此时定理成立.

情形2 $n\geqslant 2m$ 时,对 m 进行归纳证明. 当 $m=1$ 时,$N=2n+2$. 对 K_N 中任意点 v,由于 $d_r(v)+d_b(v)=N-1=2n+1$,故可设 $d_r(v)\geqslant n+1$. 在 $N_r(v)$ 在中选取集合 A 满足 $|A|=n+1$,设 $C=V(K_N)\backslash(v\cup A)$ 则 $|C|=n$. 若 A 中存在一点 u 与 C 中点连红边,则存在红色 $B(1,n)$,定理成立. 否则,A 和 C 可形成蓝色完全二部图 $K_{n+1,n}$,故存在蓝色 $B(1,n)$. 因此当 $m=1$ 时,定理成立.

假设当 $m\leqslant k-1$ 时,定理成立.

当 $m=k$ 时, 假设不含单色 $B(k,n)$,由引理4知,对 K_N 中任意点 v,均有 $d_r(v)$,$d_b(v)$ 落在区间$[n+1,k+n-1]$内. 由归纳假设知,$R(B(k-1,n))<2n+k+1=N$. 由 Ramsey 数的定义可知,存在一个单色 $B(k-1,n)$,不妨假设为红色. 设该 $B(k-1,n)$

(下转第490页)