

层状地基上梁的边界元-边界元耦合解法

艾智勇^{1,2}, 蔡建邦^{1,2}

(1. 同济大学 土木工程学院, 上海 200092; 2. 同济大学 岩土及地下工程教育部重点实验室, 上海 200092)

摘要: 分别对地基接触面和梁进行离散, 假定地基反力的分布情况, 并确定梁单元节点和反力未知量; 将无限长 Euler-Bernoulli 梁的基本解作为梁边界单元法的核函数, 然后把 Euler-Bernoulli 梁边界积分方程应用到各节点, 建立起基础梁的边界积分方程组; 将层状地基的基本解作为地基边界积分方程的核函数, 通过边界积分方程建立起梁各节点竖向位移与地基反力未知量的沉降-反力柔度矩阵; 最后, 根据地基与梁接触面的位移协调条件, 建立起层状地基与 Euler-Bernoulli 梁共同作用问题总的边界元-边界元耦合方程组. 根据该理论, 编制了相应的程序, 通过与现有文献对比验证该理论的正确性, 并分析了分层地基特性对基础梁的影响. 研究表明: 相比有限元-边界元耦合法, 边界元-边界元耦合法的效率更高.

关键词: 层状地基; Euler-Bernoulli 梁; 边界元-边界元耦合法

中图分类号: TU470

文献标志码: A

BEM-BEM Coupling Method for a Beam on Multilayered Soils

AI Zhiyong^{1,2}, CAI Jianbang^{1,2}

(1. College of Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. Key Laboratory of Geotechnical and Underground Engineering of the Ministry of Education, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: Dividing the foundation interface and the beam into several segments, and assuming the distribution of the foundation reaction, the beam nodes and the reaction variables are confirmed. By taking the fundamental solutions of the infinite Euler-Bernoulli beam as the kernel functions of the boundary element method (BEM) of the beam, the boundary integral equation of Euler-Bernoulli beam is applied to each node so as to establish the boundary integral equations of the foundation beam. The settlement-reaction flexibility matrix between the vertical displacements of beam nodes and the foundation reacting forces is formed through Gauss integral by

adopting the fundamental solution of layered soils as the kernel function of the boundary element method (BEM) of the subgrade. Finally, the global BEM-BEM coupling equations of the soil-beam interaction problem are obtained according to the compatible displacement condition at the soil-beam interface. According to the above theory, the corresponding program is compiled, and further the accuracy of the theory is verified by comprising the results of this paper with the existing reference. Moreover, the influence of the characteristics of the soil layers is analyzed, showing that the BEM-BEM coupling method is more efficient than the FEM-BEM coupling method.

Key words: layered foundation; Euler-Bernoulli beam; BEM-BEM coupling method

在对诸如条形基础、地下市政管线等结构构件进行分析时, 往往会把它们简化为地基梁问题来处理. 地基梁问题是经典的研究课题, 国内外很多学者对此进行过研究, 取得了许多成果. 地基与梁相互作用问题的分析方法主要有: 链杆法^[1]、有限差分法^[2]、有限单元法^[3-6]、边界单元法^[7-8]、有限差分-边界元耦合法^[9], 以及有限单元-边界元耦合法^[10]等. 另一方面, 目前对地基梁问题的研究采用的多是 Winkler 地基模型、双参数地基模型或弹性半空间地基模型, 这些地基模型与实际情况存在较大差异. 分层地基模型能很好地考虑到土体之间的剪切作用和天然的分层特性, 更贴近工程实际情况. 由于边界单元法可使问题在求解过程中维数降低一阶, 并且有精度高等优点, 故受到越来越多的青睐, 而地基与梁的完全边界单元法(本文称之为边界元-边界元耦合法)方面的研究还较少. 因此, 采用边界元-边界元耦合法对层状地基与 Euler-Bernoulli 梁共同作用问题进行求解, 并将该方法与 FEM-BEM 耦合法进行对比分析.

1 层状地基上 Euler-Bernoulli 梁的边界元-边界元耦合计算理论

1.1 Euler-Bernoulli 梁内任意点的边界积分方程

图1为 Euler-Bernoulli 地基梁的示意图, r 轴为梁底纵轴线, 图中参数意义为: 第 i 层土的弹性模量 E_{si} , 泊松比 ν_{si} , 厚度 h_i ; 梁长 L , 弹性模量 E_b , 惯性矩 I_b , 集中荷载 P 和分布荷载 p . 为方便理论推导, 梁均匀地划分为 $(m-1)$ 段, 每段的长度为 $l_1 = L/(m-1)$, 共 m 个节点; 将地基接触面分为 m 段, 两端的长度为 $0.5l_1$, 中间单元长均为 l_1 , 并假设每段地基接触面的反力均匀分布(见图1). 设梁第 i 个节点的 r 坐标表示为 $l_i^b (i=1, 2, \dots, m)$, 地基第 i 个单元左边和右边的 r 坐标分别表示为 l_i^s 和 $l_{i+1}^s (i=1, 2, \dots, m)$.

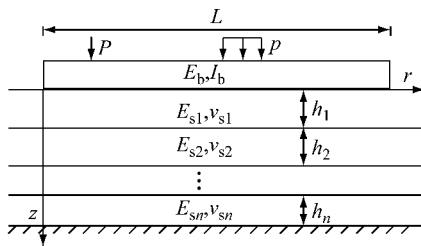


图1 成层地基上的 Euler-Bernoulli 梁

Fig.1 An Euler-Bernoulli beam on multilayered soils

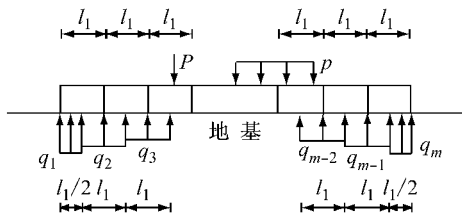


图2 弹性地基梁的受力简图

Fig.2 The force diagram of an elastic foundation beam

Euler-Bernoulli 梁弯曲的控制方程为

$$E_b I_b \frac{d^4 s(r)}{dr^4} - p(r) = 0 \quad (1)$$

式中: s 为梁的竖向位移; r 为梁长度方向的坐标, $r \in (0, L)$, 其中 0 和 L 分别为梁两端的坐标.

式(1)的一个基本解为^[11]

$$s^*(r, \xi) = \frac{1}{12E_b I_b} r_b^3 \quad (2)$$

式中: $s^*(x, \xi)$ 表示在无限长 Euler-Bernoulli 梁 ξ 处作用一单位竖向集中荷载时引起 r 处的竖向位移; $r_b = |r - \xi|$, 表示两点之间的距离.

假定 $r = \xi$ 为 Euler-Bernoulli 梁上任意一内点, $\xi \in (0, L)$, 则 ξ 处的竖向位移的边界积分方程可表

示为^[11]

$$s(\xi) = [s^*(r, \xi) \hat{Q}(r)]_0^L - [\theta^*(r, \xi) \hat{M}(r)]_0^L + [M^*(r, \xi) \theta(r)]_0^L - [Q^*(r, \xi) s(r)]_0^L + \int_0^L s^*(r, \xi) p(r) dr + \sum s^*(r, \xi) P_i(r) \quad (3)$$

$$\theta^*(r, \xi) = \frac{\partial s^*(r, \xi)}{\partial r} \quad (4)$$

$$M^*(r, \xi) = -E_b I_b \frac{\partial^2 s^*(r, \xi)}{\partial r^2} \quad (5)$$

$$Q^*(r, \xi) = -E_b I_b \frac{\partial^3 s^*(r, \xi)}{\partial r^3} \quad (6)$$

式中: $\theta(r)$ 为梁在 r 处的转角; \hat{Q} 和 \hat{M} 分别表示梁两端的竖向力和弯矩; $\theta^*(r, \xi)$, $M^*(r, \xi)$ 和 $Q^*(r, \xi)$ 分别表示在无限长梁 ξ 处作用一单位竖向集中荷载时引起 r 处的转角、弯矩和剪力.

对式(3)关于 r 进行求导, 可得梁关于转角的边界积分方程

$$\theta(\xi) = \frac{ds(\xi)}{dr} = \left[\frac{\partial s^*(r, \xi)}{\partial r} \hat{Q}(r) \right]_0^L - \left[\frac{\partial \theta^*(r, \xi)}{\partial r} \hat{M}(r) \right]_0^L + \left[\frac{\partial M^*(r, \xi)}{\partial r} \theta(r) \right]_0^L - \left[\frac{\partial Q^*(r, \xi)}{\partial r} s(r) \right]_0^L + \int_0^L \frac{\partial s^*(r, \xi)}{\partial r} p(r) dr + \sum \frac{\partial s^*(r, \xi)}{\partial r} P_i(r) \quad (7)$$

1.2 层状地基上梁的边界元-边界元耦合解法

将式(3)和式(7)应用到梁的每个节点, 可以得到地基梁总的边界积分方程组, 即式(8)和式(9). 由于式(3)和式(7)只针对梁内点(非梁两端的边界点), 为了计算梁两端节点的竖向位移和转角, 采用点 $r = 0 + \varepsilon$ 和 $r = L - \varepsilon (\varepsilon \rightarrow 0)$ 来替代梁两端点来进行计算.

$$Q_P^* s + M_P^* \theta = A_1 - b C q \quad (8)$$

$$Q_M^* s + M_M^* \theta = A_2 - b X q \quad (9)$$

式中,

$$Q_P^* =$$

$$\begin{bmatrix} 1 - Q^*(l_1^b, l_1^b) & Q^*(l_2^b, l_1^b) & \cdots & Q^*(l_m^b, l_1^b) \\ -Q^*(l_1^b, l_2^b) & Q^*(l_2^b, l_2^b) & \cdots & Q^*(l_m^b, l_2^b) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -Q^*(l_1^b, l_m^b) & Q^*(l_2^b, l_m^b) & \cdots & 1 + Q^*(l_m^b, l_m^b) \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$M_P^* =$$

$$\begin{bmatrix} M^*(l_1^b, l_1^b) & M^*(l_2^b, l_1^b) & \cdots & -M^*(l_m^b, l_1^b) \\ M^*(l_1^b, l_2^b) & M^*(l_2^b, l_2^b) & \cdots & -M^*(l_m^b, l_2^b) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M^*(l_1^b, l_m^b) & M^*(l_2^b, l_m^b) & \cdots & -M^*(l_m^b, l_m^b) \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$Q_M^* = \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\begin{bmatrix} -Q^*(l_1^b, l_1^b) & Q^*(l_2^b, l_1^b) & \cdots & Q^*(l_m^b, l_1^b) \\ -Q^*(l_1^b, l_2^b) & Q^*(l_2^b, l_2^b) & \cdots & Q^*(l_m^b, l_2^b) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -Q^*(l_1^b, l_m^b) & Q^*(l_2^b, l_m^b) & \cdots & Q^*(l_m^b, l_m^b) \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$M_M^* = \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\begin{bmatrix} 1+M^*(l_1^b, l_1^b) & M^*(l_2^b, l_1^b) & \cdots & -M^*(l_m^b, l_1^b) \\ M^*(l_1^b, l_2^b) & M^*(l_2^b, l_2^b) & \cdots & -M^*(l_m^b, l_2^b) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M^*(l_1^b, l_m^b) & M^*(l_2^b, l_m^b) & \cdots & 1-M^*(l_m^b, l_m^b) \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$A_1(i) = \int_0^L s^*(x, l_i^b) p(x) dx + \sum s^*(x, l_i^b) P(x) \quad (14)$$

$$A_2(i) = \int_0^L \frac{\partial s^*(x, l_i^b)}{\partial x} p(x) dx + \sum s^*(x, l_i^b) P(x) \quad (15)$$

$$C(i, j) = \int_{l_j^b}^{l_{j+1}^b} s^*(x, l_i^b) dx \quad (16)$$

$$X(i, j) = \int_{l_j^b}^{l_{j+1}^b} \frac{\partial s^*(x, l_i^b)}{\partial x} dx \quad (17)$$

$$s = [s_1 \ s_2 \ \cdots \ s_m]^T \quad (18)$$

$$\theta = [\theta_1 \ \theta_2 \ \cdots \ \theta_m]^T \quad (19)$$

$$q = [q_1 \ q_2 \ \cdots \ q_m]^T \quad (20)$$

式中: Q_P^* , Q_M^* , M_P^* , M_M^* , C 和 X 均为 m 阶方阵; A_1 和 A_2 为 m 阶列向量; b 为梁底宽度。

由文献[12], 可得到层状各向同性弹性地基的基本解 $\delta(i, \phi, R)$, 它表示层状地基表面任意点 ϕ 作用单位集中荷载引起的节点 i 的沉降, R 为点 ϕ 到点 i 的距离。将 $\delta(i, \phi, R)$ 作为地基边界单元法的核函数, 则反力 q_j 区域上作用单位均布荷载在梁节点 i 处引起的沉降为

$$\delta_{ij} = \iint \delta(i, \phi, R) d\Gamma_j \quad (21)$$

由式(21)可得梁各节点竖向位移与地基反力之间的矩阵表达式为

$$w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix} = \delta q = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \cdots & \delta_{1m} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \cdots & \delta_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{m1} & \delta_{m2} & \cdots & \delta_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_m \end{bmatrix} \quad (22)$$

式中, w_i 为梁节点 i 处的地基沉降。

根据地基与梁接触面上的竖向位移协调条件有

$$s = w \quad (23)$$

将式(22)和式(23)代入式(8)和式(9), 可得到地基梁边界元-边界元耦合解法的总方程组, 即

$$\begin{bmatrix} Q_P^* \delta + bC & M_P^* \\ Q_M^* \delta + bX & M_M^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \quad (24)$$

求解式(24), 可得地基梁的地基反力和转角, 再通过式(22)可求得梁的竖向位移。

2 数值计算和分析

2.1 验证性算例

为了验证本文理论及程序的正确性, 将本文计算结果与文献[1]结果进行对比, 其中计算模型见图 3。取深度 1 000 m 来模拟弹性半空间。从图 4 中的对比结果可见: 本文结果与链杆法[1]计算结果吻合较好, 这说明本文理论和程序是正确的。

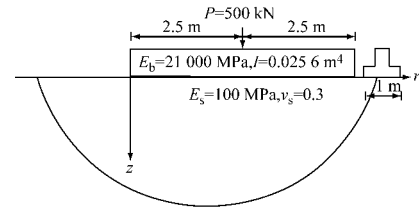


图 3 弹性半空间上 Euler-Bernoulli 梁

Fig. 3 A Euler-Bernoulli beam on an half-space

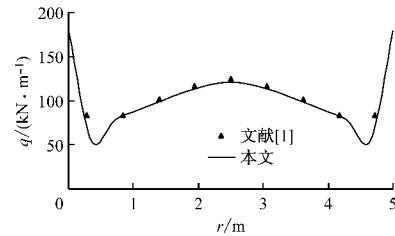


图 4 沿梁长方向地基反力对比

Fig. 4 Comparison of the foundation reaction along the length's direction of the beam

2.2 与 FEM-BEM 耦合法的对比

本例以三层土体组成的地基上的梁作为计算模型。梁上作用均布荷载, 其中, $L: h_b: b: h_1: h_2: h_3 = 10: 1: 1: 25: 25: 25$, $\nu_b = 0.2$, $E_b: E_1: E_2: E_3 = 3\ 200: 1: 4: 2$, $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0.4$ 。分别采用本文方法和文献[10]中的 FEM-BEM 耦合法对地基梁模型进行分析, 分析结果见图 5, 其中, 量纲为一的竖向位移为 $I_1 = E_s w / (pb)$ 。

由图 5 可知, 相比于本文的 BEM-BEM 耦合法, FEM-BEM 耦合法需要把梁离散成更多的单元才能达到相同的精度; 而边界元法花费的时间更少,

可以节省约 1/3 的计算时间。

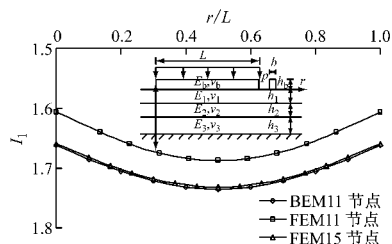


图 5 地基梁两种分析方法的沉降对比

Fig.5 Comparison of settlements of the foundation beam by the two methods

2.3 地基成层性的影响

下面的算例通过对三种不同工况的对比,分析地基成层性对地基梁位移的影响. 相关计算参数为: $L:h_b:b:h_1:h_2=8:1:1:4:50$, $\nu_{s1}=\nu_{s2}=0.35$; 工况一: $E_b:E_{s1}:E_{s2}=3\ 000:1:4$; 工况二: $E_b:E_{s1}:E_{s2}=3\ 000:2:4$; 工况三: $E_b:E_{s1}:E_{s2}=3\ 000:1:8$.

图 6 为在三种工况下梁竖向位移沿梁长的变化情况,其中对竖向位移进行量纲为一处理,取为 $E_b w/(pb)$. 通过对比可知,土层弹性模量的改变对梁挠度的影响比下层土体模量的改变要大很多. 这说明:第一层土的性质对地基梁影响更大;而且首层土的弹性模量越大,梁的竖向位移越小.

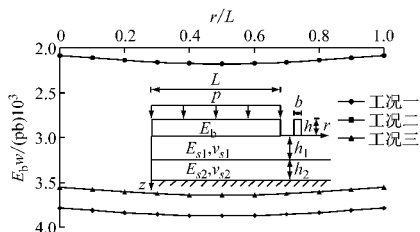


图 6 均布荷载作用下地基梁的沉降

Fig.6 The settlements of the foundation beam under an uniformly distributed load

3 结论

(1) 采用边界元-边界元耦合法求解多层地基上 Euler-Bernoulli 梁的静力响应,并通过对比算例验证了本文理论及程序的正确性。

(2) 与 FEM-BEM 耦合法相比,边界元-边界元耦合法对梁划分更少单元便能达到相同的精度,同时计算所需时间也更短,计算效率高。

(3) 数值结果计算表明,相比第二层土,第一层土的弹性模量对地基梁的沉降影响更大;而且,第一层土的弹性模量越大,梁的沉降越小。

参考文献:

- [1] Zemochkin B N, Sinitsyn A P. Practical method for the calculation of foundation beams and plates on an elastic foundation[M]. Moscow: Stroizdat, 1962.
- [2] 蔡四维. 弹性地基梁的新解法[J]. 土木工程学报, 1959, 6(5): 337.
CHAI Siwei. New method for elastic foundation beam[J]. Journal of Civil Engineering, 1959, 6(5): 337.
- [3] Cheung Y K, Nag D K. Plates and beams on elastic foundations—linear and non-linear behaviour [J]. Geotechnique, 1968, 18(2): 250.
- [4] 张季容, 姚祖恩, 楼文娟. 有限单元法计算分层地基上的弹性地基梁[J]. 岩土工程学报, 1986, 8(3): 16.
ZHANG Jirong, YAO Zuen, LOU Wenjuan. Computation of a beam on multilayer foundation using finite element method[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 1986, 8(3): 16.
- [5] 陈天恩, 张克绪, 单兴波. 弹性地基梁的修正刚度矩阵解法[J]. 哈尔滨建筑大学学报, 2000, 33(2): 44.
CHEN Tianyu, ZHANG Kexu, SHAN Xingbo. Modifying stiffness matrix method of elastic foundation beam[J]. Journal of Harbin University of Civil Engineering & Architecture, 2000, 33(2): 44.
- [6] 马立博, 时伟, 周印章, 等. Winkler 与三参数弹性地基梁模型的计算比较[J]. 青岛理工大学学报, 2008, 29(4): 36.
MA Libo, SHI Wei, ZHOU Yinzhang, et al. The calculation comparison between Winkler and tri-parameter elastic foundation beam model[J]. Journal of Qingdao Technological University, 2008, 29(4): 36.
- [7] 王林生. 基础梁板的边界元法[J]. 河海大学学报, 1989, 17(1): 31.
WANG Linsheng. BEM for beams and plates on foundations [J]. Journal of Hohai University, 1989, 17(1): 31.
- [8] 郑建军, 周欣竹. 考虑剪切变形时文克勒地基梁静力分析的边界元法[J]. 四川建筑科学研究, 1992(3): 44.
ZHENG Jianjun, ZHOU Xinzhu. The BEM for static analysis of Winkler foundation beam with considering shear effect [J]. Sichuan Building Science, 1992(3): 44.
- [9] AI Zhiyong, LI Zhixiong, CHENG Yichong. BEM analysis of elastic foundation beams on multilayered isotropic soils [J]. Soils and Foundations, 2014, 54(4): 667.
- [10] 艾智勇, 蔡建邦. 层状地基上弹性地基梁的有限元/边界元耦合分析[J]. 岩土力学, 2015, 36(S2): 685.
AI Zhiyong, CAI Jianbang. FEM/BEM coupling analysis of elastic foundation beam on layered soils [J]. Rock and Soil Mechanics, 2015, 36(S2): 685.
- [11] Tanaka M, Matsumoto T, Oida S. A Boundary element method applied to the elastostatic bending problem of beam-stiffened plates [J]. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2000, 24(10): 751.
- [12] 艾智勇, 董洲, 成怡冲. 多层地基轴对称弹性空间问题的解析层元解[J]. 建筑结构学报, 2012, 33(4): 150.
AI Zhiyong, DONG Zhou, CHENG Yichong. Analytical layer element solution of axisymmetrically elastic problem for multilayered soils [J]. Journal of Building Structures, 2012, 33(4): 150.