

基于体视学原理砂土孔隙组构的图像分析

李学丰^{1,2}, 何玉琪^{1,2}, 孟凡超²

(1. 宁夏大学 固体力学研究所, 宁夏 银川 750021; 2. 宁夏大学 物理电气信息学院, 宁夏 银川 750021)

摘要: 基于体视学原理定量描述孔隙组构的数学框架, 采用归一化思想重新定义组构张量, 提出了砂土孔隙组构描述的新方法. 该方法用平面张量的第二不变量定义幅值参量来描述孔隙各向异性的大小, 用其分量定义方向参量来描述各向异性方向, 用这两个标量描述平面孔隙分布规律. 采用多种图像处理技术消除砂样 SEM 图的一些干扰因素, 优化得到清晰的二值化图像. 砂样 SEM 图像分析表明: 不同角度的平行测试线可以用于测量平均孔隙率, 但无法测定其平面孔隙分布, 环形测试线则可较好描述孔隙的空间分布规律. 新方法用两个标量来描述平面孔隙分布, 随孔隙空间几何关系变化, 自然退化为现有张量的描述形式. 图像分析验证了新方法描述的合理性.

关键词: 孔隙组构; 图像处理; 图像分析; 定量分析; 砂土
中图分类号: TU443 **文献标志码:** A

Image Analysis of Sand Void Fabric Based on Stereology Principle

LI Xuefeng^{1,2}, HE Yuqi^{1,2}, MENG Fanchao²

(1. Solid Mechanics Institute, Ningxia University, Yinchuan 750021, China; 2. School of Physics and Electrical Information, Ningxia University, Yinchuan 750021, China)

Abstract: Based on the theoretical framework of quantitative description for void fabric with the principle of stereology, the void fabric tensor redefined with normalized idea, and a novel description method of void fabric for sand was proposed. The porosity amplitude parameter defined by the second invariant of the plane tensor to describe the degree of anisotropy and the direction parameter defined by its component to describe its direction, the plane distribution of void fabric were described by these two scalars. The program with different image processing techniques that eliminate the confounding factors of analysis on scanning electron microscope (SEM) image of sand samples was developed to obtain a clear binary image with optimization methods. The SEM image analysis of sand sample showed that parallel test lines with different

angles could measure the average porosity but could not measure the porosity distribution, while the circular test line could measure the plane distribution of void fabric. The new method with two scalar described the pore distribution on the plane, with the changed of pore geometry relationship, which degraded to the existing description format naturally. Image analysis validated the rationality of the new method.

Key words: void fabric; image processing; image analysis; quantitative analysis; sand

众所周知, 孔隙比是岩土工程实践中和土力学理论描述中最重要的物理特性参数之一. 大量研究证实^[1-3]: 由于土体细观组构各向异性的存在, 临界状态孔隙比与平均正应力的关系不唯一这对土力学临界状态的唯一性假设是个挑战. 作者用组构建立强度准则^[4]和位势理论^[5]等方面的工作中, 组构描述一直是思考的核心, 其关键在于细观理论和测试技术的发展.

目前孔隙组构的理论描述主要有三种: 一是 Oda 和 Koishikawa^[6]的二维孔隙组构理论及试验方法. 该方法因涉及颗粒重心、边界、多边形、颗粒移动等环节需要人为判断和操作, 过程繁琐, 难以推广; 二是 Bagi^[7]提出双重几何系统来描述颗粒和孔隙的影响, 但三维空间孔隙空间的定义困难使得其应用受到限制. Li 和 Li^[8]在 Bagi 等^[9]研究基础上, 也考虑颗粒孔隙和颗粒形状两个因素推导了组构描述表达式, 但也存在 Oda^[6]组构类似的问题; 三是用体视学原理确定孔隙组构. 最早 Hilliard^[9]建立该方法的数学框架, 用测试线在不同平面、空间定量测定孔隙分布. 后来, Kanatani^[10]和 Ken-Ichi^[11]将 Hilliard 方法推广为笛卡尔坐标张量的形式, 首次将解决不同问题的 Hilliard 方法统一成唯一数学框架——布冯变换, 推导了布冯变换的逆变换, 用测试线直接确定

组构张量. 三种方法中, 第三种理论基础相对扎实, 试验分析相对简便.

孔隙实验测试技术决定于其理论定义. 目前主要测试技术有两类: 一是基于 Oda^[7] 的孔隙组构理论的方法, Bhatia 和 Soliman^[12]、Al-Shibli^[13] 用该方法提取孔隙方向分布方向; 二是用体视学原理的孔隙组构确定方法. 基于 Kanatani^[10] 和 Ken-Ichi^[11] 等工作, Kuo 等^[14-15] 用该方法做了砂土孔隙张量的定量检测. 国内图像试验研究方面: 王宝军等^[16] 等的 SEM 图像三维可视化和软土孔隙度计算研究; 张先伟等^[17] 基于 SEM 和 MIP 试验的粘土微观孔隙的变化规律研究; 最近徐日庆等^[18] 基于 SEM 图像的软土孔隙率计算分析. 这些研究成果为用图像技术研究土体细微观结构做了有益尝试.

在现有理论和试验成果的研究基础上, 基于体视学原理, 采用归一化思想重新定义孔隙组构张量, 探索孔隙组构的新方法, 利用砂土细观 SEM 图像, 采用图像处理和图像分析技术对孔隙信息分析展开研究, 验证新方法的有效性.

1 孔隙组构张量的定义

基于孔隙理论研究成果, 采用体视学原理的理论方法. Hilliard^[9] 和 Kanatani^[10] 等为该方法奠定了坚实的数学基础, 但是其张量都为分量的形式描述, 且确定方法相对繁琐, 很难直接应用于宏观力学方程. 为此, 建议一种新的组构张量的测试方法, 用标量来描述平面孔隙组构分布.

1.1 广义定义

孔隙空间分布方程仍然采用平均孔隙率和一个无迹描述, 即 Kanatani^[10] 的统一形式:

$$N(\mathbf{n}) = n_m(1 + N_{ij}n_i n_j + N_{ijkl}n_i n_j n_k n_l + \dots) \quad (1)$$

式中: $N(\mathbf{n})$ 为平均孔隙分布函数, \mathbf{n} 为单位向量; N_{ij} 和 N_{ijkl} 分别为二阶和四阶无迹的孔隙张量; n_m 为单位平均孔隙率, n_m 的定义式为

$$n_m = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi L_L(\alpha, \beta) \sin \alpha d\alpha d\beta \quad (2)$$

式中: $L_L(\alpha, \beta)$ 为测试线的孔隙率; α 和 β 为积分区间的独立积分变量. 式(1)中 $N_{i_1 i_2 \dots i_n}$ 表达式为

$$N_{i_1 i_2 \dots i_n} = \frac{2n+1}{2^n} \binom{2n}{n} M_{i_1 i_2 \dots i_n} \quad (3)$$

式中: $M_{i_1 i_2 \dots i_n}$ 为 n 阶孔隙组构张量. 孔隙组构 $M_{i_1 i_2 \dots i_n}$ 描述了孔隙空间分量的分布形式, 组构的大小应该为 1, 根据这个特点, 采用归一化思想, 定义孔

隙组构张量 $M_{i_1 i_2 \dots i_n}$ 为

$$M_{i_1 i_2 \dots i_n} = \frac{\int_\Omega n_{i_1 i_2 \dots i_n} n_m L_L(\alpha, \beta) d\mathbf{n}}{\int_\Omega L_L(\alpha, \beta) d\mathbf{n}} \quad (4)$$

式中: $M_{i_1 i_2 \dots i_n}$ 为孔隙组构张量, 可直接用于孔隙张量的细观定量检测.

1.2 三维形式

式(1)确定张量理论上可以精确描述孔隙空间分布的变化. 但在实际应用中, 二阶组构张量就可以满足一般要求. 因此忽略高阶张量的影响, 式(4)描述的二阶张量为

$$M_{ij} = \frac{\int L_L(\alpha_m, \beta_m) n_i n_j d\mathbf{n}}{\int L_L(\alpha_m, \beta_m) d\mathbf{n}} \quad (5)$$

式中: M_{ij} 为二阶对称组构张量; $n_i n_j$ 为二阶组构张量的方向分量; α_m, β_m 为第 m 条测试线的描述角度.

根据式(3)和式(5)描述的无迹对称张量为

$$N_{ij} = \frac{15}{2} (M_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij}) \quad (6)$$

式中: N_{ij} 为描述孔隙空间分布的无迹的对称组构张量; δ_{ij} 为 Kronecker 张量.

式(1)描述的二阶孔隙组构的三维表达式为

$$N(\mathbf{n}) = n_m(1 + N_{ij}n_i n_j) \quad (7)$$

式(5)用级数形式可以表示为

$$M_{ij} = \frac{\sum_{m=0}^{N-1} \frac{L_L(\alpha_m, \beta_m) n_i n_j}{N}}{\sum_{m=0}^{N-1} \frac{L_L(\alpha_m, \beta_m)}{N}} = \frac{\sum_{m=0}^{N-1} L_L(\alpha_m, \beta_m) n_i n_j}{\sum_{m=0}^{N-1} L_L(\alpha_m, \beta_m)} \quad (8)$$

由图 1 可知: 组构的方向分量为 $n_1 = \cos \alpha_m$, $n_2 = \sin \alpha_m \sin \beta_m$, $n_3 = \sin \alpha_m \cos \beta_m$, 即式(5)为

$$M_{ij} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} \quad (9)$$

式中: M_{ij} 为式(8)定义的形式, 式(9)满足

$$M_{kk} = M_{11} + M_{22} + M_{33} \equiv 1 \quad (10)$$

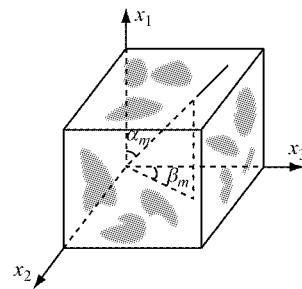


图 1 描述孔隙张量坐标示意图

Fig. 1 The coordinate used in the void fabric tensor analysis

本文定义孔隙张量 M_{ij} 的迹恒为 1, 那么式(6)描述的张量的迹为 0, 这个特点对孔隙分布公式推导和测试张量的确定提供了很大方便。

2 孔隙结构张量的平面确定方法

孔隙结构是基于空间测试线定义, 但无法直接用空间测试线获取孔隙的空间分布信息, 需要借助孔隙平面图形分析。

图 1 为孔隙在正交空间分布的示意图, 孔隙在三个正交面上的孔隙投影分布可以用平面图像分析得到。对于式(5)描述的孔隙张量, 在图 1 中 x_1-x_3 , x_1-x_2 和 x_2-x_3 正交平面的张量形式为

$$M_{ij}^{1-3} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{13} \\ M_{31} & M_{33} \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$M_{ij}^{1-2} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$M_{ij}^{2-3} = \begin{bmatrix} M_{22} & M_{23} \\ M_{32} & M_{33} \end{bmatrix} \quad (13)$$

以上三个张量可用它们的不变量来等价描述。

2.1 大小——孔隙幅值参量的定义

式(11)一式(13)张量的偏张量有两个不变量, 即第二不变量和第三不变量。这里用它的第二不变量描述平面孔隙张量的各向异性大小, 三个正交面幅值参量分别定义为

$$b_1 = \sqrt{\frac{1}{4}(M_{11} - M_{33})^2 + M_{13}^2} \quad (14)$$

$$b_2 = \sqrt{\frac{1}{4}(M_{11} - M_{22})^2 + M_{12}^2} \quad (15)$$

$$b_3 = \sqrt{\frac{1}{4}(M_{22} - M_{33})^2 + M_{23}^2} \quad (16)$$

式中: b_k ($k=1, 2, 3$) 为三个正交面的孔隙幅值参量, 是个标量, 它描述了平面各向异性程度, 可以直接用细观图像分析方法确定。根据本文够张量的归一化定义, 三个幅值参量的理论值范围为 $0 \sim 1$ 。当 $b_k=0$ 时, 孔隙均匀分布, 试样为各向同性; 当 $b_k=1$ 时, 孔隙优势方向沿一个方向分布, 为各向异性的最大值。其他取值反映了各向异性程度的不同。

2.2 方向——孔隙幅值参量

式(11)一式(13)张量的第三不变量可以描述其方向, 根据平面张量的莫尔圆定义的方向为

$$\theta_1 = \frac{1}{2} \arctan \frac{2M_{13}}{M_{11} - M_{33}} \quad (17)$$

$$\theta_2 = \frac{1}{2} \arctan \frac{2M_{12}}{M_{11} - M_{22}} \quad (18)$$

$$\theta_3 = \frac{1}{2} \arctan \frac{2M_{23}}{M_{22} - M_{33}} \quad (19)$$

式中: θ_m ($m=1, 2, 3$) 为三个正交面分量角度, 是孔隙结构主方向与参考坐标轴方向的夹角, 描述了孔隙结构各向异性程度方向, 可用图像分析直接测定。若 $\theta_m=0$, 表明孔隙主方向和平面参考坐标中方向一致。

2.3 平面分布描述

根据式(7)孔隙张量的分布定义, 三个正交面的分布函数可用本文定义的两个不变量来描述:

$$N(n_0, \theta_m, b_k, \theta) = n_0(1 + b_k \cos 2(\theta_m - \theta)) \quad (20)$$

式中: n_0 为平面平均孔隙率; θ 为平面坐标系描述角度。可见平面孔隙张量完全可以用标量的形式等价描述, 式(20)的标量都可以用图像分析直接测定。

由于本文定义的孔隙张量的迹为 1, 对于 b_k 和 θ_m 的独立变化量分别只有两个, 因此只要试验测定其中两个, 就可以完全确定孔隙结构的三维形式。

2.4 现有的孔隙计算方法

现有基于体视学原理描述孔隙张量主要用 Kanatani^[10] 中建议的形式。其平面孔隙计算式为

$$N(n_m, \theta_m) = n_m(1 + B_2 \sin(2\theta_m) + A_2 \cos(2\theta_m)) \quad (21)$$

式中

$$n_m = \sum_{m=0}^{N-1} \frac{L_L(\theta_m)}{N} \quad (22)$$

$$\begin{bmatrix} A_2 \\ B_2 \end{bmatrix} = 2 \sum_{m=0}^{N-1} L_L(\theta_m) \begin{bmatrix} \cos(2\pi m/N) \\ \sin(2\pi m/N) \end{bmatrix} / \sum_{m=0}^{N-1} L_L(\theta_m) \quad (23)$$

式中: N 是测试线数量; $L_L(\theta_m)$ 为第 m 个测试线确定孔隙长度, $\theta_m = m\pi/N$ ($m=0, 1, 2, \dots, N-1$) 角度在测试平面旋转测定。

3 孔隙结构的图像分析

3.1 分析步骤及方法

根据提出的孔隙张量的理论确定方法, 用 Matlab 编制了图像分析程序, 流程如图 2 所示。图 2 给出了整个细观结构的测定流程, 因为研究的主要目的是测定孔隙张量的正交各向异性, 因此试样的采集、制作需要使用立方体试样。

图 2 中计算程序由两部分组成: 第一部分是图像处理 Matlab 程序, 其目的是减少环境因素干扰、得到清晰的二值化图以便图像分析; 第二部分是图像分析 Matlab 程序, 是流程中最关键的部分。要得到三个正交方向孔隙分布的概率统计规律, 程序需

要对多张图片的孔隙分布做统计分析,图2中的两个循环结构主要是完成这个任务.最后,用图像分析提取的孔隙平面分布信息便可以计算出孔隙幅值参量、方向及其平面孔隙空间分布规律.

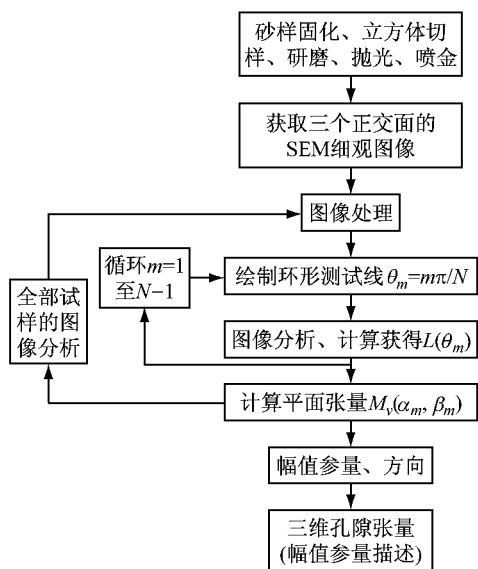


图2 图像分析技术测定孔隙组构张量总流程

Fig.2 The general procedures to determine fabric tensor of porosity in an image analyzer

3.2 平行测试线分析方法

体视学原理测试孔隙组构的要素是测试线.孔隙统计的是二值化图片中孔隙所占像素点,孔隙率为孔隙像素点的总和与测试线像素点的比值.这个定义与土力学中的孔隙比定义不同,可互相转换,但其空间分布规律相同.

图像分析程序中,将测试线与样品图像处理图进行“与”运算,获得测试线与样品孔隙交集的图像,提取孔隙数据.如图3所示,为相互平行的测试线图

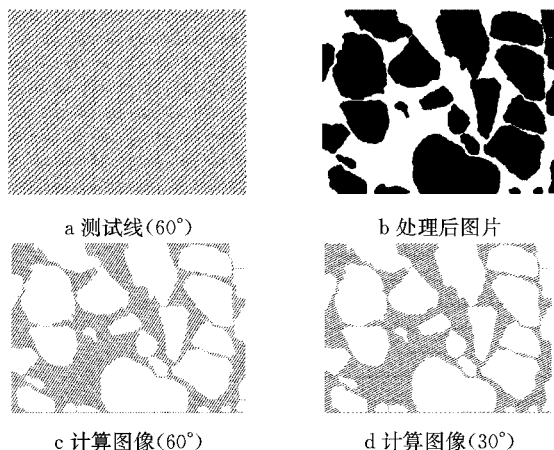


图3 平行测试线分析孔隙流程

Fig.3 The procedures to determine porosity with parallel test line

像分析计算效果.图中给出了60°测试线(图3a)、二值化图片(图3b),60°和30°两种测试线计算结果(分别为图3c和图3d),测试线用AUTOCAD绘制.图3c和图3d可以看出计算图片能较好地描述孔隙分布.

试验验证前,首先需要分析测试线密度和角度对测试线的影响.这里设计两个算例,一是相同角度不同测试线密度对同一图片进行分析,另外是相同密度、不同角度测试线对同一图片进行分析.图4为测试线密度对测试结果的影响.图4测试线角度固定,逐渐增加测试线根数来得到的孔隙率与测试线密度的关系.细观图片使用Kuo和Frost^[14]的砂样三个正交面的图像.

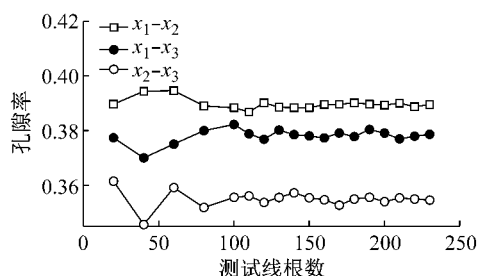
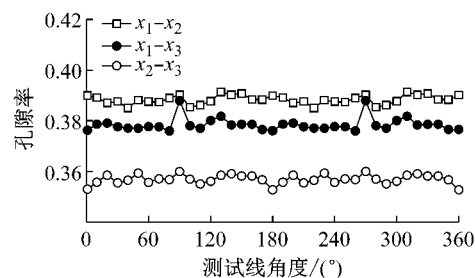


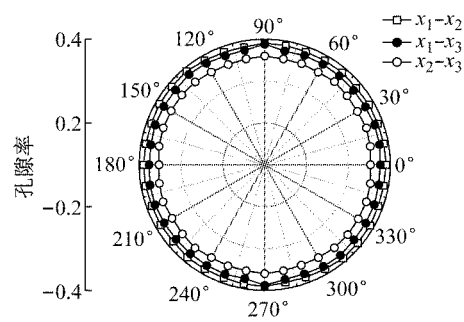
图4 测试线密度与孔隙率关系

Fig.4 Test line density VS porosity

从图5中可以看出测试线根数较少时,三个面的孔隙率波动都较大,但是随测试线根数增加,孔隙变化都趋于稳定,接近于恒定.测试线大于100根后,孔隙率的波动就可以忽略.本文测试线最多根数为230根.图5为平行测试线角度与孔隙率的关系.



a 平面图



b 玫瑰图

图5 不同角度测试线与孔隙率关系

Fig.5 Different angle test lines with the porosity

测试线都固定在 130 根,测试线角度从 $0^\circ \sim 360^\circ$ 变化,角度间隔为 10° . 图 5a 可以看出孔隙随角度变化很小,接近于一个恒定值. 图 5b 更为直观反映了采用平行测试线测得的平面的孔隙比为一个不变量,无法反映孔隙的平面分布规律.

综上所述,测试线根数较少时平均孔隙律波动

较大,但达到一定数量后该值趋于恒定;平均孔隙率是个标量,与方向无关. 因此,平行测试线可测定平面的平均孔隙率,但无法测定平面孔隙分布的情况.

3.3 环形测试线分析方法

为获得平面孔隙分布规律,必须使用环形测试线. 图 6 为环形测试线图像分析的过程.

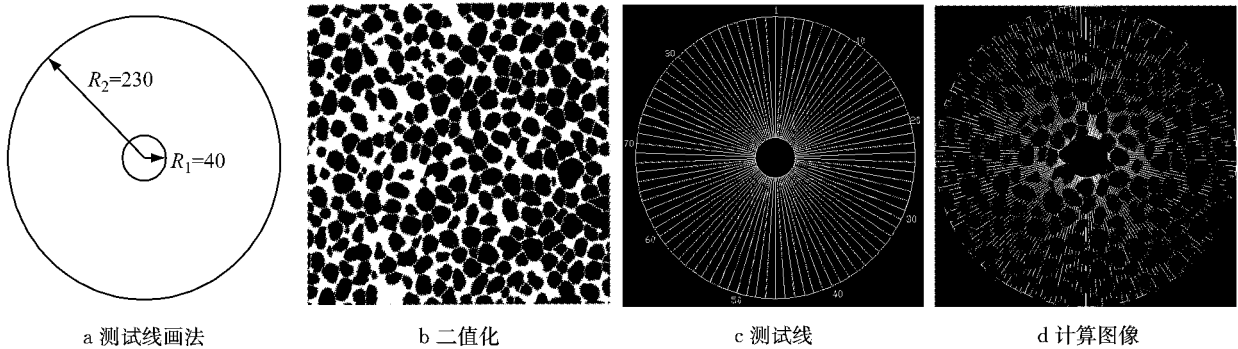


图 6 孔隙分析流程图

Fig.6 The procedures to determine porosity with ring test lines

图 6a 为测试线绘制的方法. 该方法为 Kuo 和 Frost^[14] 等一些学者使用的一种方法,即 RECs 方法,用环形测试线测量圆环区域内砂土孔隙的平面分布情况. 根据该文献^[14]的研究成果,当 $R_1 \geq 35$ 个像素点, $R_2 \leq 240$ 个像素点时,环形测试线可以得到稳定孔隙分布规律. 本文使用测试线的尺寸为: $R_1 = 40$ 个像素点, $R_2 = 230$ 个像素点,测试线根数为 180 根(根据图 6 的分析结果确定). 图 6b 为 Kuo

等^[14]的试样图片;图 6c 为测试线的分布图;图 6d 为 90 根测试线的图像分析效果.

4 孔隙结构试验分析及验证

选用 Kuo^[15]采集的砂样图像进行分析. 图 7 为试样三个正交面的 SEM 图. 试验详细介绍见文献^[15].

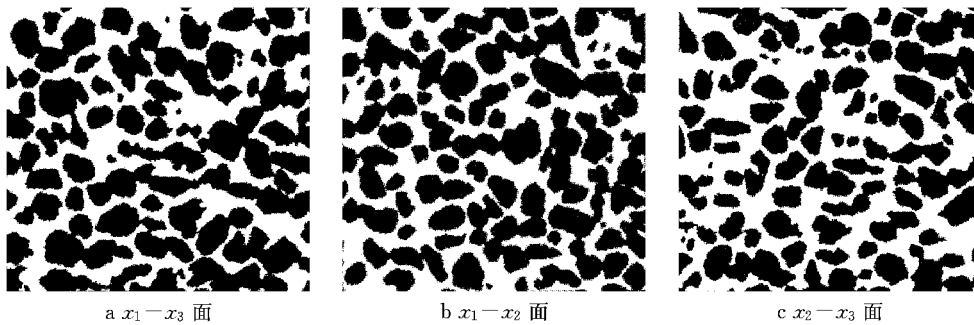


图 7 砂样结构的 SEM 图像

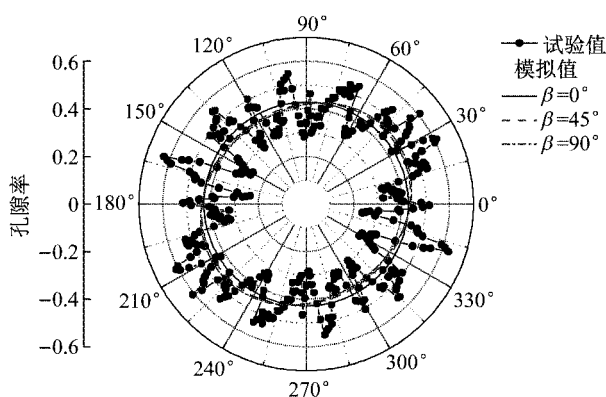
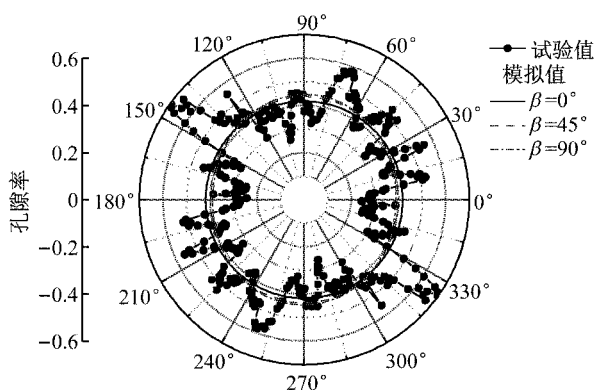
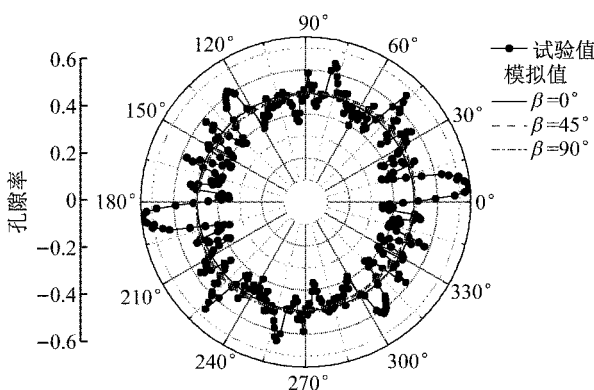
Fig.7 Example SEM Image of sand fabric analysis and simulation on $x_1 - x_3$ plane

(1) $x_1 - x_3$ 平面分析. 图 8 是 $x_1 - x_3$ 平面试样测试值和本文孔隙分布模拟曲线. 图中离散点为图像分析测定值,图中给出了三条模拟曲线,当 $\beta_m = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ 时, b_1 分别为 0.071, 0.056 和 0, 方向为 42° . 其中, $\beta_m = 90^\circ$ 时,本文模拟结果与 Kanatani^[10] 的公式计算结果一致,因此,本文公式可以退化成式 (21) 形式,该曲线表现出椭圆形各向异性规律.

(2) $x_1 - x_2$ 平面分析. 图 9 也给出了三条模拟曲

线,分当 $\beta_m = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ 时, b_2 接近 0.079, 方向为 90° . 同样, $\beta_m = 90^\circ$ 时,本文模拟和 Kanatani^[10] 的式 (21) 模拟相同. 当 $\beta_m = 90^\circ$ 时, b_2 比 b_1 大,表明 $x_1 - x_2$ 平面孔隙各向异性表现比较明显.

(3) $x_2 - x_3$ 平面分析. 图 10 为试样测试值和本文孔隙组构方向分布曲线的对比图. 分当 $\beta_m = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ 时, b_3 分别为: 0, 0.029 和 0.041, 方向为 44° . 其中, $\beta_m = 90^\circ$ 时, b_3 较小,表现出较小的各向异性.

图 8 $x_1 - x_3$ 平面孔隙图像分析及模拟Fig.8 Porosity image analysis and simulation in $x_1 - x_3$ plane图 9 $x_1 - x_2$ 平面孔隙图像分析及模拟Fig.9 Porosity image analysis and simulation in $x_1 - x_2$ plane图 10 $x_2 - x_3$ 平面孔隙组构图像分析及模拟Fig.10 Porosity image analysis and simulation in $x_2 - x_3$ plane

通过三个正交面的图像分析和模拟可以看出, 本文的图像分析和处理程序能够较好处理和分析砂土 SEM 图像, 采用环形测试线可以较好提取孔隙空间的平面分布规律。

综上所述, 孔隙描述方法可退化为传统分析方

法的形式, 具有更广适用范围, 增加了孔隙空间的另外一个独立变化角度, 实际上增加了孔隙空间排列更多的可能性, 可更好地理解孔隙空间分布在平面上投影的信息, 为确定幅值参量提供依据, 也增加了平面孔隙描述多样性和灵活性, 物理几何意义清晰。

5 结语

采用归一化的思想重新定义了孔隙组构张量, 用平面张量的第二不变量定义幅值参量描述孔隙各向异性的大小, 用其分量定义角度参量描述各向异性方向, 用定义的两个标量既可以描述孔隙的平面分布规律, 建议了体视学原理确定孔隙组构张量的新方法。

采用两类测试线进行了图像对比分析, 平行测试线分析表明: 测试线密度对测试结果影响较大, 密度小, 测试波动大, 密度达到一定值后测量值恒定; 不同角度的平行测试线可以用于测量平均孔隙率, 但无法测定其平面孔隙分布, 环形测试线则可以较好描述孔隙的平面空间分布规律。

砂土 SEM 图像分析的试验表明提出的孔隙组构分析方法能够很好描述其平面分布规律, 新方法将孔隙张量信息转换为两个标量来描述其平面分布规律, 通过孔隙空间角度条件变化, 自然退化为传统描述形式, 使用范围广。模拟结果验证了其描述的合理性, 这样测定的孔隙张量即可作为一个材料参数直接应用于砂土的宏观力学方程。

参考文献:

- [1] Li X S, Dafalias Y F. Anisotropic critical state theory: role of fabric[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2011, 138(3): 263.
- [2] Zhao J, Guo N. Unique critical state characteristics in granular media considering fabric anisotropy[J]. Geotechnique, 2013, 63(8): 695.
- [3] Sadrekarimi A, Olson S M. Residual state of sands[J]. Journal of Geotechnical & Geoenvironmental Engineering, ASCE, 2014, 140(4): 80.
- [4] 李学丰, 黄茂松, 钱建固. 宏细观结合的砂土各向异性破坏准则[J]. 岩石力学与工程学报, 2010, 29(9): 1885.
LI Xuefeng, HUANG Maosong, QIAN Jiangu. Failure criterion of anisotropic sand with the method of macro-micro incorporation[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2010, 29(9): 1885.
- [5] 李学丰, 孔亮, 黄茂松. 岩土材料特性相关塑性位势理论[J]. 岩土工程学报, 2013, 35(9): 1722.
LI Xuefeng, KONG Liang, HUANG Maosong. Property-

- dependent plastic potential theory for geomaterials[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2013, 35(9): 1722.
- [6] Oda M, Koishikawa I. Anisotropic fabric of sands[J]. Soils and Foundations, 1977, 17(4): 71.
- [7] Bagi K. Stress and strain in granular assemblies[J]. Mechanics of Materials, 1996, 22(3): 165.
- [8] Li X, Li X S. Micro-macro quantification of the internal structure of granular materials[J]. Journal of Engineering Mechanics, 2009, 135(7): 641.
- [9] Hilliard J E. Determination of structural anisotropy [M]. Berlin: Springer, 1967.
- [10] Kanatani K I. Stereological determination of structural anisotropy[J]. International Journal of Engineering Science, 1984, 22(5): 531.
- [11] Ken-Ichi K. Procedures for stereological estimation of structural anisotropy[J]. International Journal of Engineering Science, 1985, 23(5): 587.
- [12] Bhatia S K, Soliman A F. Frequency distribution of void ratio of granular materials determined by an image analyzer[J]. Soils and Foundations, 1990, 30(1): 1.
- [13] Alshibli K A, El-Saidany H A. Quantifying void ratio in granular materials using Voronoi Tessellation[J]. Journal of Computing in Civil Engineering, 2001, 15(3): 232.
- [14] Kuo C Y, Frost J D, Chameau J L A. Image analysis determination of stereology based fabric tensors [J]. Geotechnique, 1998, 48(4): 515.
- [15] Kuo C Y. Quantifying the fabric of granular materials—an image analysis approach[D]. Atlanta: Georgia Institute of Technology, 1994.
- [16] 王宝军,施斌,蔡奕,等. 基于GIS的黏性土SEM图像三维可视化与孔隙度计算[J]. 岩土力学, 2008, 29(1): 251.
WANG Baojun, SHI Bin, CAI Yi, *et al.* 3D visualization and porosity computation of clay soil SEM image by GIS[J]. Rock and Soil Mechanics, 2008, 29(1): 251.
- [17] 张先伟,孔令伟,郭爱国,等. 基于SEM和MIP试验结构性黏土压缩过程中微观孔隙的变化规律[J]. 岩石力学与工程学报, 2012, 31(2): 406.
ZHANG Xianwei, KONG Lingwei, GUO Aiguo, *et al.* Evolution of microscopic pore of structured clay in compression process based on SEM and MIP test [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2012, 31(2): 406.
- [18] 徐日庆,邓祎文,徐波,等. 基于SEM图像的软土三维孔隙率计算及影响因素分析[J]. 岩石力学与工程学报, 2015, 34(7): 1497.
XU Riqing, DENG Yiwen, XU Bo, *et al.* Soft soil three-dimensional porosity calculated base on semimage and its influence factors analysis [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2015, 34(7): 1497.